Code sujet : 283

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris – ESCP Europe

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Lundi 7 mai 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

- On rappelle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si le réel x est strictement supérieur à 1.
- On note ζ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $\forall x>1,\ \zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$; on admet que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.
- Toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
- Si R est un élément de la tribu $\mathcal{A}$, on note $\overline{R}$ l'événement contraire de R.

L'objet du problème est l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires. La convergence de telles séries, en loi ou en probabilité, est celle de la suite des sommes partielles associées. Autrement dit, pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ converge (en loi ou en probabilité) lorsque la suite de variables aléatoires $\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge (en loi ou en probabilité).

Partie I. Séries télescopiques

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X de référence, et on étudie la convergence de la série aléatoire $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{X_n}{n}-\frac{X_{n+1}}{n+1}\right)$.

1.a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$. Calculer la somme de cette série.

b) Dans cet exemple, quelle est la loi de la variable aléatoire de référence X ?

Tournez la page S.V.P.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit Y_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\dfrac{1}{n+1} \quad \text{ou} \quad \text{si } x > 1 \\ 1 + (n+1)x & \text{si } -\dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 0 \\ c_n & \text{si } 0 < x < \dfrac{n}{n+1} \\ (n+1)(1-x) & \text{si } \dfrac{n}{n+1} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

où c_n est une constante strictement positive.

a) Calculer la valeur de c_n et représenter graphiquement f_3 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n. La fonction F_n est-elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}$?

c) Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire de référence X possède une densité f bornée.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $D_n = X_1 - \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X.

c) Justifier que la variable aléatoire D_n admet pour densité la fonction f_{D_n} telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{D_n}(x) = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f\big((n+1)(t-x)\big)\, \mathrm{d}t\,.$$

d) En déduire une nouvelle démonstration du résultat obtenu dans la question 2.c).

4. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire de référence X suit la loi normale centrée réduite.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $U_n = \dfrac{X_n}{n} - \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire U_n.

b) Justifier la convergence en loi de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} U_n$.

c) Soit $(U'_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, U'_n et U_n ont même loi.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $T'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U'_k$.

(i) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T'_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance $\dfrac{\pi^2}{3} - 1$.

(ii) Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas ceux obtenus dans les questions 3.b) et 4.b) ?

Partie II. Séries harmoniques « lacunaires »

Dans cette partie, on étudie des séries numériques obtenues à partir de la série harmonique divergente $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *par effacement de certains de ses termes.*

Pour toute partie $\mathcal{G}$ *de* $\mathbf{N}^*$, *on note* $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ *la fonction indicatrice de* $\mathcal{G}$, *c'est-à-dire la fonction définie sur* $\mathbf{N}^*$ *à valeurs dans* $\{0,1\}$ *telle que :* $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{1}_{\mathcal{G}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{G} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose : $\forall \mathcal{G} \subset \mathbf{N}^*,\ h_n(\mathcal{G}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(k)}{k}$.

Dans la question 5, on étudie deux cas de convergence et la question 6 est consacrée à un cas de divergence.

5. On pose : $\mathcal{D} = \{n^2 ; n \in \mathbf{N}^*\}$ et $\mathcal{T} = \{n^3 ; n \in \mathbf{N}^*\}$.

a) Exprimer $h_n(\mathcal{D})$ à l'aide d'une somme partielle de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

b) En déduire la convergence de la suite $\big(h_n(\mathcal{D})\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$.

c) Justifier que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ est l'ensemble des entiers m pour lesquels $m^{1/6} \in \mathbf{N}^*$.

Pour traiter cette question, on admet que la racine carrée d'un entier naturel qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire, un nombre qui ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

d) Montrer que la suite $\big(h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T})\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n}$ à l'aide de certaines valeurs de la fonction ζ.

6. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs : $\mathcal{I} = \{2n-1 ; n \in \mathbf{N}^*\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1}\right) \mathrm{d}t$.

a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, établir l'encadrement : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{(2n-1)^2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $h_n(\mathcal{I}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, justifier l'encadrement : $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n}\left(2\left\lfloor\dfrac{n+3}{2}\right\rfloor - 1\right)\right) \leqslant \dfrac{2}{n}$.

d) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

On pose : $\delta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}\,)\big) = \delta$.

e) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{2n-1}$.

f) Justifier pour tout entier $n \geqslant 3$, l'encadrement : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \delta - \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}\,)\big) \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

g) La fonction *Scilab* suivante, dont le script est incomplet (ligne (6)), permet de donner une valeur approchée de δ en calculant successivement des valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}\,)$ jusqu'à atteindre une précision donnée.

```
(1)    function s=delta(eps)
(2)    n=3 ;
(3)    s=1+1/3-(log(3)/2) ;
(4)    while 1/(n-2)>eps
(5)    n=n+2 ;
(6)    s=s+1/n+ ········· ;
(7)    end ;
(8)    endfunction
```

(*i*) Quelles sont les valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}\,)$ affectées successivement à la variable `s` lorsqu'on applique cette fonction à `eps=0.2` ?

(*ii*) Compléter la ligne (6).

(*iii*) Pour quelles raisons l'algorithme utilisé peut-il assurer une précision arbitraire au calcul de la valeur approchée de δ ?

Partie III. Séries de Riemann alternées

Dans cette partie, on note $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur la paire $\{-1,+1\}$, c'est-à-dire : pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $P(X_n=1)=P(X_n=-1)=\dfrac{1}{2}\cdot$

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose : $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$.

   On suppose l'existence d'un réel $\alpha\geqslant 0$ et d'un réel $M>0$ tels que : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ |s_n|\leqslant M\,n^{\alpha}$.

   a) Soit β un réel tel que $\beta>\alpha$.

   (i) Montrer pour tout entier $n\geqslant 2$, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k^{\beta}}=\frac{s_n}{n^{\beta}}+\sum_{k=1}^{n-1}s_k\Big(\frac{1}{k^{\beta}}-\frac{1}{(k+1)^{\beta}}\Big)\cdot$

   (ii) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x_n}{n^{\beta}}$ est convergente.

   b) Justifier pour tout réel $x>0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^{x}}\cdot$

8. Soit s et t des réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 1.

   a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n}.

   b) En utilisant l'écriture de e^u $(u\in\mathbf{R})$ sous forme de somme d'une série, établir l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}\right)\leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,.$$

   c) À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que : $P\big([S_n>s]\big)\leqslant \exp\Big(\dfrac{n\,t^2}{2}-ts\Big)\cdot$

   d) Justifier l'inégalité : $P\big([|S_n|>s]\big)\leqslant 2\,\exp\Big(-\dfrac{s^2}{2\,n}\Big)\cdot$

9. Pour tout réel $\alpha\geqslant 0$, on pose : $\mathcal{C}_\alpha=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\,[\,|S_k|>k^{\alpha}]\Big)$.

   a) Justifier que $\mathcal{C}_\alpha$ est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

   b) Montrer que si $\alpha>\dfrac{1}{2}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}P\big([\,|S_n|>n^{\alpha}]\big)$ est convergente.

   c) En déduire que pour tout réel $\alpha>\dfrac{1}{2}$, on a $P(\mathcal{C}_\alpha)=0$.

10. *Dans cette question, on s'intéresse à la série aléatoire* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{X_n}{n}\cdot$

   On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\omega\in\Omega$ pour lesquels la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{X_n(\omega)}{n}$ converge et pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

   on pose : $K_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{k}\cdot$

   Soit K l'application définie sur Ω par : $K(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}K_n(\omega) & \text{si } \omega\in\mathcal{C}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

   On admet sans démonstration que $\mathcal{C}$ est un élément de la tribu $\mathcal{A}$ et que K est une variable aléatoire.

   a) En utilisant le résultat de la question 7.a), montrer que si α vérifie $0\leqslant\alpha<1$, alors on a : $\overline{\mathcal{C}_\alpha}\subset\mathcal{C}$.

   b) À l'aide des résultats de la question 9, montrer que $P(\mathcal{C})=1$.

c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on considère l'événement $E(\varepsilon)$ défini par : $E(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \Big(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon] \Big)$.

Montrer que $P\big(E(\varepsilon)\big) = 0$ et en déduire que la suite de variables aléatoires $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire K.

On admet sans démonstration que la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge alors en loi vers K.

Dans les questions 11 et 12, on considère une suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ · Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$ ·

11.a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer l'espérance et la variance de H_n et trouver leurs limites respectives lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que, quel que soit le réel $r > 0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} P\big([H_n \leqslant r]\big) = 0$.

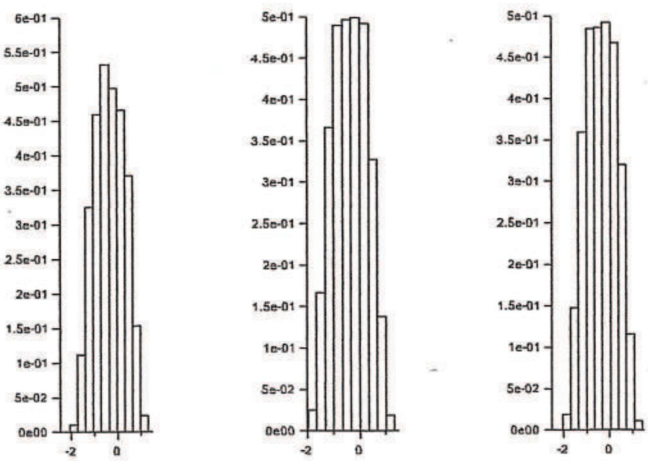
c) La fonction *Scilab* suivante, dont le script est incomplet (ligne(5)), permet d'effectuer p simulations de la variable aléatoire $H_n - h_n(\mathcal{I})$, où $h_n(\mathcal{I})$ a été définie dans la partie II (préambule et question 6).

```
(1)    function y=simul(n,p)
(2)    y=zeros(p,1) ;
(3)    for i=1 : p
(4)    for k=1 : n
(5)    y(i,1)=y(i,1)+(grand(1,1,'bin',1,0.5)+·········)/k ;
(6)    end ;
(7)    end ;
(8)    endfunction
```

(i) Compléter la ligne (5).

(ii) Les trois histogrammes suivants représentent la distribution simulée de la variable aléatoire $H_n - h_n(\mathcal{I})$ pour $n = 50$, $n = 100$ et $n = 200$. Par quelles instructions ont-ils pu être obtenus ?

(iii) Pourquoi ces histogrammes suggèrent-ils une convergence en loi de la suite $\big(H_n - h_n(\mathcal{I})\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$?



12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $B'_n = \dfrac{1 + X_n}{2}$.

a) Justifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k}$ ·

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $\big(H_n - h_n(\mathcal{I})\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de la forme $\lambda K + \mu$, où λ et μ sont des réels dont on précisera la valeur.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1168 – D'après documents fournis