ECRICOME PREPA 2022 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique Mathématiques

502278

RONCHEWSKI

ALEXIS

07/02/2002

Note de délibération : 18.2 / 20

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Alexy

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 1 –

1a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad t_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$

$$= \frac{x^{k-1} \cdot x}{(k-1)! \cdot k}$$

ie $\boxed{t_k(x) = \dfrac{x}{k} t_{k-1}(x)}$

b)

```
function S = f(n,x)
    t = 1 // t = t_0(x)
    S = 1 // S = f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t*(x/k)
        S = sum(t)
    end
endfunction
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En tant que fonction polynomiale, f_n est dérivable

<u>Et</u> : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k x^{k-1}}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} > 0$$

<u>Donc</u> : f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Et</u>, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+)$.

<u>Or</u> : $f_n(\mathbb{R}_+) = [f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)[$

$$= [1, +\infty[.$$

<u>Bilan</u> : f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

Ainsi : par définition d'une bijection,
$\exists! \, u_n \in \mathbb{R}_+$ tq $f_n(u_n) = a$

3a) • Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \geq 1$.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

On calcule :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{k!} \geq 0$$

<u>Donc</u> : $\forall n \geq 1$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

<u>Donc</u> : la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est $\boxed{\text{croissante}}$.

• Comme la série de tg $\frac{x^k}{k!}$ converge.

Alors la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge.

On a : $\boxed{f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$.

b) On a : $\forall n \geq 1$, $f_n(u_n) = a$

Comme f_n est bijective, considérons f_n^{-1} son application (de même sens de variations que f_n ie croissante).

On a $\forall n \geq 1$, $f_n^{-1} \circ f_n(u_n) = f_n^{-1}(a)$

ie $\forall n \geq 1$, $u_n = f_n^{-1}(a)$

Ainsi : $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

c) • On sait que f_n^{-1} est croissante.

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Krouty

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page...

4) a) Soit $n \geqslant 1$.

6) Soit $K \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que $\forall n \geq 1$, $K \leq u_n$

Alors, par stricte croissance de $t \longmapsto e^t$:

$$e^K \leq e^{u_n}$$

Notons l la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Ainsi $e^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^l$ par composition

__Alors__ : comme $(e^{u_n})_{n \geq 1}$ est croissante,

$\forall n \geq 1$, $e^{u_n} \leq e^l$

__Or__ : $f_n(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^l$ par composition.

__et__ : $f_n(u_n) = a \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Par unicité de la limite, $e^l = a$.

Ainsi, on obtient :

[redacted], $e^K \leq a$

c)

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Écricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page.

5) a) $\forall n \geq 1$, $u_n = f_n^{-1}(a)$

Comme $f_n^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

Alors : la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0.

Et, comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante

Alors : $u_n \leq \ln(a)$ pour tout $n \geq 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_n(u_n) = \int_0^{u_n} \frac{e^t (u_n - t)^n}{n!} dt.$$

Soit $t \in [0, u_n]$,

Alors : $\cdot \; e^t \leq e^{u_n}$

i.e. $(u_n - t)^n e^t \leq (u_n - t)^n e^{u_n}$

(car $u_n - t \geq 0$)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

Ainsi : $\left| \frac{e^t (u_n - t)^n}{n!} \right| \leqslant \left| e^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} \right|$.

Par croissance de l'intégrale (et d'après l'inégalité triangulaire) :

$$|R_n(u_n)| \leqslant \frac{e^{u_n}}{n!} \int_0^{u_n} |(u_n - t)^n| \, dt$$

$$\leqslant \frac{e^{u_n}}{n!} \int_0^{u_n} (u_n - t)^n \, dt$$

$$\leqslant \frac{e^{u_n}}{n!} \left[-\frac{(u_n - t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{u_n}$$

$$\leqslant \frac{e^{u_n}}{n!} \quad \frac{u_n^{n+1}}{n+1}$$

$$\leqslant e^{u_n} \cdot \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or : $u_n \leqslant |u_n| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$

Alors : par stricte croissance de $t \longmapsto e^t$

$$e^{u_n} \leqslant e^M$$

et de même par stricte croissance de $t \longmapsto t^{n+1}$ (car $n+1 \geqslant 0$)

$$\omega_n^{n+1} \leqslant \Pi^{n+1}$$

$$\boxed{\text{Dès lors : } \quad |R_n(\omega_n)| \leqslant e^{\Pi} \cdot \frac{\Pi^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{et ceci pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

c) $\forall n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant |R_n(\omega_n)| \leqslant e^{\Pi} \cdot \frac{\Pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>Alors</u> : $$0 \leqslant \left| \frac{R_n(\omega_n)}{1/n^2} \right| \leqslant e^{\Pi} \cdot \frac{n^2\,\Pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leqslant \frac{e^{\Pi}}{(n+1)} \cdot \frac{n\,\Pi^{n+1}}{(n-1)!}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6) a) D'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'application exp (de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$), on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

ie $\boxed{e^x = f_n(x) + R_n(x).}$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) $\forall n \geq 1$, $f_n(u_n) = \alpha$.

On a d'après la 6a,

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n)$$
$$= \alpha + R_n(u_n)$$
$$\underset{n \to +\infty}{=} \alpha + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'après la 5c}$$

Par composition :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(\alpha) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Arouly

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page

7) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Appliquons à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral (à l'application exp qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$).

On a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \exp^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt$$

$$\boxed{e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt}$$

et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Comme $u_n \in \mathbb{R}_+$

Alors :

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

$$= 2 + \frac{\omega_n^{\,n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(\omega_n)$$

c) • Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$

Et que $a>1$ (ie $\ln(a) \neq 0$)

Alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(a)$

Par composition autorisée $(n+1 \geq 0)$ et par opération.

$$\boxed{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

• $$\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \times \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

par croissance comparée

Ainsi : $\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc : $\boxed{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

d) D'après la 7b,

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a même :

$$e^{u_n} - a \sim \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi :

$$\frac{e^{u_n} - a}{a} \sim \frac{\ln(a)^{n+1}}{a(n+1)!} \qquad (**)$$

ie : $\frac{1}{a} e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(a)^{n+1}}{a(n+1)!}$

Et, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$

$$e^{u_n - \ln(a)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - \ln(a)$$

Donc : $a\left(e^{u_n - \ln(a)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (u_n - \ln(a)) \times a$

Donc : $e^{\ln(a)} \cdot e^{u_n - \ln(a)} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} a(u_n - \ln(a))$

ie : $e^{u_n} - a \underset{+\infty}{\sim} a(u_n - \ln(a))$

ie : $\frac{e^{u_n} - a}{a} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - \ln(a)$

D'après $(**)$:

$$\boxed{u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(a)^{n+1}}{a(n+1)!}}$$

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature

Nom ROWCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHÉMATIQUES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 2 :

1) On a : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$f(x,y,z) = (y-z, \; 2y, \; x+4y-2z)$

* Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) + (x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow (x+y-z, \; 3y, \; x+4y-z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = 0 \\ 3y = 0 \\ x+4y-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z = 0 \\ y = 0 \\ x-z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi : $\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\left((1,0,1)\right)$

$\neq (0,0,0)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

Ainsi : -1 est valeur propre de f
Et on note $E_{-1} = \text{Vect}((\cancel{1}, 0, 1))$

* De même :

$(x, y, z) \in \ker(f - 2\,Id_{\mathbb{R}^3})$

$\iff f(x,y,z) - 2(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\iff \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2y - 2y = 0 \\ \cancel{x} + 4y - 2z - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x + 4y - 4z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} x + 4y - 4z = 0 \\ 9y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi : $\ker(f - 2\,Id_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}((0, 1, 1))$

$\neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Ainsi : $\boxed{2 \text{ est valeur propre de } f}$
On note $E_2 = \mathrm{Vect}((0,1,1))$

b) Supposons que f soit diagonalisable.

On a : $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 2 + (-2)$
$= 0$.

Par ailleurs : comme A est diagonalisable (car f l'est), il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On a donc : $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{-1, 2, \lambda_3\}$
ET $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A)$ (comme A et D sont semblables)
Or : $\mathrm{Tr}(D) = -1 + 2 + \lambda_3$
$= \lambda_3 + 1$

Donc : $\boxed{\lambda_3 = -1}$

On a donc : $Sp(A) = \{-1, 2\}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Pourtant : $E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,0,1))$

Donc : $\dim(E_{-1}) = 1$
(ce qui signifie que -1 n'apparait qu'une seule fois sur la diagonale de D).
Contradiction.

$\boxed{\text{Bilan : } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2) • Soit $x \in \ker(f + Id)$.

Alors : $f(x) = -x$

Appliquons $f + Id$.

Alors :

$$(f + Id) \circ (f + Id)(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$(= (f + Id)(0_{\mathbb{R}^3}))$$

car $f + Id$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Par conséquent :

$$(f + Id)^2 (x) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

<u>Bilan</u> : $x \in \ker((f + Id)^2)$

donc : $\ker(f + Id) \subset \ker((f + Id)^2)$

• On a $\dim(\ker(f + Id)) = 1$.

<u>Or</u> :

$\dim(\ker(f + Id) \circ (f + Id))$

$= \dim(\ker(f + Id) \cap \ker(f + Id))$

$= \dim(\ker(f + Id)) + \dim(\ker(f + Id)) - \dim(F + F)$

en notant $F = \ker(f + Id)$

$= 2 - \dim(2F)$

$\leqslant 2$

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page.

Si $\ker(f+Id) = \ker((f+Id)^2)$

<u>Alors</u> :

$$\dim(\ker(f+Id)^2) = 1$$

18.2 / 20

3) Raisonnons par analyse - synthèse.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

Analyse :

Posons $x = a + b$

où $a \in \ker(f - 2Id)$ (ie $f(a) = 2a$)

$b \in \ker((f+Id)^2)$

Alors : en appliquant f à x

$$f(x) = f(a) + f(b)$$
$$= 2a + f(b)$$

~~On : $b \in \ker((f+Id)^2)$~~

~~Alors : $(f+Id)^2(b) = 0_{\mathbb{R}^3}$~~

~~ie : $(f+Id) \circ (f+Id)(b) = 0_{\mathbb{R}^3}$~~

~~ie : $(f+Id) \circ (f(b)+b) = 0_{\mathbb{R}^3}$~~

~~ie $f^2(b) + f(b) + f(b) + b = 0_{\mathbb{R}^3}$~~

~~ie $f^2(b) + 2f(b) + b = 0_{\mathbb{R}^3}$.~~

~~Donc : $f(b) = -\frac{1}{2}(f^2(b) + b)$~~

~~Donc : $f(x) = 2a - \frac{1}{2}f^2(b) - \frac{1}{2}b$~~

On procède plutôt en appliquant $(f+Id)^2$ à x :

$$\begin{aligned}(f+Id)^2(x) &= (f+Id)^2(a) + (f+Id)^2(b)\\ &= f^2(a) + 2f(a) + a\\ &= f(2a) + 4a + a\\ &= 4a + 4a + a\\ &= 9a\end{aligned}$$

Ainsi : $a = \frac{1}{9}(f+Id)^2(x)$

<u>Donc</u> : $b = x - \frac{1}{9}(f+Id)^2(x)$.

Si elle convient, la décomposition est unique.

Synthèse.

Posons $a = \frac{1}{9}(f+Id)^2(x)$

$b = x - \frac{1}{9}(f+Id)^2(x)$

* $a+b = x$ très clairement.
* <u>On a</u> :

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Arouty

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page

4) • Soit $x \in \ker(f - 2Id)$

Alors : $f(x) = 2x$.

Appliquons f.

Alors : $f^2(x) = f(2x)$
$= 2f(x)$ car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
$= 2 \cdot 2x$
$= 4x$

Donc : $(f - 2Id)(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ainsi : $f(x) \in \ker(f - 2Id)$

d'où : $\ker(f - 2Id)$ est stable par f.

• Soit $x \in G$.

Alors : $(f + Id)^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Appliquons f.

Alors : $f \circ (f + Id) \circ (f + Id)(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

ie : $f(f^2 + 2f + Id)(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

ie $(f^3 + 2f^2 + f)(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

ie $(f^2 + 2f + Id) \circ f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

ie $(f + Id)^2 \circ f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

Donc : G est stable par f.

5) $P = (X+1)^2 (X-2)$

On a :

$$P(f) = (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)$$
$$= (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)$$

On remarque que les racines de P sont les valeurs propres de f.

Alors : P est annulateur de f.

Donc : $P(f) = \Theta$ (où Θ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$)

6) On a :

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \frac{1}{9}(f + Id)^2 \circ \left(\frac{-1}{9}(f+4Id) \circ (f - 2Id)\right)$$

$$= \frac{1}{9}(f+Id)^2 \circ \left(\frac{-1}{9}(f^2 - 2f + 4f - 8Id)\right)$$

$$= \frac{1}{9}(f^2 + 2f + Id) \circ \left(\frac{-1}{9}(f^2 + 2f - 8Id)\right)$$

$$= \frac{-1}{81}\left(f^4 + 2f^3 - 8f^2 + 2f^3 + 4f^2 - 16f + f^2 + 2f - 8Id\right)$$

$$= \frac{-1}{81}\left(f^4 + 4f^3 + 3f^2 - 14f - 8\,Id\right)$$

<u>Et</u> :

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \left(\frac{-1}{9}(f + 4\,Id)\circ(f - 2\,Id)\right)\circ\left(\frac{1}{9}(f + Id)^2\right)$$

$$= \frac{-1}{81}\left(f^2 + 2f - 8\,Id\right)\circ\left(f^2 + 2f + Id\right)$$

$$= \frac{-1}{81}\left(f^4 + 2f^3 + f^2 + 2f^3 + 4f^2 + 2f - 8f^2 - 16f - 8\,Id \right)$$

$$= \frac{-1}{81}\left(f^4 + 4f^3 - 3f^2 - 14f - 8\,Id\right)$$

$$= \pi_1 \circ \pi_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Bilan}} : \quad \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 \\ \quad (\text{ie } \pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ commutent})\end{array}}$$

7) a)

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \frac{-1}{81}(f + 4\,Id)\circ\underbrace{(f - 2\,Id)\circ(f + Id)^2}_{= P(f) = \theta} = \theta$$

b) ~~Soit $x \in \ker(\pi_2)$. Alors : $\pi_2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.~~

Soit $y \in \mathrm{Im}(\pi_1)$

Alors : $\exists x \in \mathbb{R}^3$ tq $\pi_1(x) = y$

<u>Alors</u> : $\pi_2(y) = \pi_2 \circ \pi_1(x) = \theta(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

donc $y \in \ker(\pi_2)$

Donc : $\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \ker(\pi_2)$

8 a)

$\pi_1 + \pi_2$

$= \frac{1}{9}(f^2 + 2f + Id) - \frac{1}{9}(f^2 - 2f + 4f - 8Id)$

$= \cancel{\frac{1}{9} f^2} - \cancel{\frac{1}{9} f^2} + \cancel{\frac{2}{8} f} - \cancel{\frac{2}{9} f} + \frac{8}{9} Id + \frac{1}{9} Id$

$= Id.$

$\boxed{\text{Bilan : } \pi_1 + \pi_2 = Id.}$

b) Soit $x \in Ker(\pi_2)$

Alors : $\pi_2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Alors : $\pi_1(x) = x$

Donc : $x \in Im(\pi_1)$

Bilan : $\boxed{Ker(\pi_2) \subset Im(\pi_1).}$

9) * On a déjà d'après 7b et 8b que $Ker(\pi_2) = Im(\pi_1)$.

* Comme π_1 et π_2 commutent alors $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = \theta$

Alors : comme en 7b, on prouve en intervertissant les rôles de π_2 et π_1 que $Im(\pi_2) \subset Ker(\pi_1)$

* Soit $x \in Ker(\pi_1)$

Alors $\pi_1(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$

D'après 8a : $\pi_2(x) = x$

Donc $x \in Im(\pi_2)$.

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Arouf

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) A[redacted]EXIS

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page.

Bilan : $\ker(\pi_2) = \operatorname{Im}(\pi_1)$
$\ker(\pi_1) = \operatorname{Im}(\pi_2)$.

10)

- $\pi_2 \circ \pi_1 = \theta$
- $\pi_1 + \pi_2 = Id$.

$\star$ $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1 \, (Id - \pi_2)$
$= \pi_1 - \pi_1 \circ \pi_2$
$= \pi_1$

et π_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (car f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$).

Donc : π_1 est un projecteur.

$\star$ De même : $\pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$ et $\pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Donc : π_2 est un projecteur.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

11)

12)

Posons $g = 2\pi_1 - \pi_2$.

$h = f - g$.

On a : $g = \frac{2}{9}(f + Id)^2 + \frac{1}{9}(f + 4Id) \circ (f - 2Id)$

Donc : on peut poser $Q = \frac{2}{9}(X+1)^2 + \frac{1}{9}(X+4)(X-2)$

Et : $h = f - \frac{2}{9}(f + Id)^2 + \frac{1}{9}(f + 4Id) \circ (f - 2Id)$

(h s'exprime bien en fonction de f)

On peut noter : $H = X - \frac{2}{9}(X+1)^2 + \frac{1}{9}(X+4)(X-2)$

$\boxed{\text{Bilan : } h \text{ et } g \text{ sont des polynômes de } f}$

13)

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

Signature

18.2 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/12

Numéro de table 090

Commencez à composer dès la première page

14) $h = f - g$.

On a :

* $(f - 2Id) \circ \pi_1 + (f + Id) \circ \pi_2$
$= f \circ \pi_1 - 2\pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2$
$= f \circ \pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2 - 2\pi_1$
$= f \circ (\pi_1 + \pi_2) - g$
$= f \circ Id - g$
$= f - g$
$= h$

$$\boxed{\text{Bilan : } h = (f - 2Id) \circ \pi_1 + (f + Id) \circ \pi_2 .}$$

* $h^2 = ((f - 2Id) \circ \pi_1 + (f + Id) \circ \pi_2) \circ ((f - 2Id) \circ \pi_1 + (f + Id) \circ \pi_2)$

$= (f \circ \pi_1 - 2\pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2) \circ (f \circ \pi_1 - 2Id\pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2)$

$= f \circ \pi_1 \circ f \circ \pi_1 - f \circ \pi_1 \circ 2\pi_1 + f \circ \pi_1 \circ f \circ \pi_2 + f \circ \pi_1 \circ \pi_2$
$- 2\pi_1 \circ f \circ \pi_1 + 4\pi_1 \circ \pi_1 - 2\pi_1 \circ f \circ \pi_2 - 2\pi_1 \circ \pi_2$
$+ f \circ \pi_2 \circ f \circ \pi_2 - 2 f \circ \pi_2 \circ \pi_1 + f \circ \pi_2 \circ f \circ \pi_2 + f \circ \pi_2 \circ \pi_2$
$+ \pi_2 \circ f \circ \pi_1 - 2\pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ f \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

15) On a bien trouvé que h est :

* nilpotent

et que g était diagonalisable.

<u>Donc</u> : $f = h + g$ s'exprime bien en fonction de h et g (qui respectent l'objectif fixé par l'énoncé).

Problème -

Partie I :

1) a) • Soient $s > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

* la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mu - x}{s}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

* $x \longmapsto e^x$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

<u>Donc</u> : par composition et opération

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto -\exp\left(\frac{\mu - x}{s}\right)$$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

À nouveau par composition :

$$\boxed{F_{\mu,s} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

• Dérivons $F_{\mu,s}(x) = e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{\mu,s}(x) = -\left(\frac{-1}{s}\right) e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}}$$

$$= \frac{1}{s} e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}}$$

<u>Ainsi</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{\mu,s}'(x) = \frac{1}{s} e^{\frac{\mu-x}{s}} \left(\frac{1}{s} e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}} + \frac{1}{s} \times \frac{-1}{s} e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2} e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}} - \frac{1}{s^2} e^{\frac{\mu-x}{s}} e^{-e^{\frac{\mu-x}{s}}}$$

$$= 0$$

b) * $f_{\mu,\alpha}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc : $F_{\mu,\alpha}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* Et : $F_{\mu,\alpha}''(x) = f_{\mu,\alpha}'(x) = 0$

Alors : $F_{\mu,\alpha}$ est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

* $$\frac{\mu - x}{\alpha} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$$

Donc : $$-\exp\left(\frac{\mu - x}{\alpha}\right) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

Donc : par composition

$$F_{\mu,\alpha}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad \left(\text{car : } e^{y} \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0\right)$$

* $$\frac{\mu - x}{\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

Donc : $$-\exp\left(\frac{\mu - x}{\alpha}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Donc : $$F_{\mu,x}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$ par composition.

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 17/02/2002

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

Signature A rouf

18.2 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\mu,\alpha}(x) > 0$ d'après ce qui précède.

Donc : $F_{\mu,\alpha}$ est strictement croissante.

Et $F_{\mu,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $F_{\mu,\alpha}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F_{\mu,\alpha}(\mathbb{R})$.

Or : $F_{\mu,\alpha}(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} F_{\mu,\alpha}(x), \lim\limits_{x \to +\infty} F_{\mu,\alpha}(x) \right[$

$=]0, 1[$ d'après ce qui précède.

$\boxed{\text{Bilan : } F_{\mu,\alpha} \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,1[.}$

• $G = F_{0,1}^{-1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$F_{0,1}(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{0-x}{1}\right)\right)$

$= e^{-e^{-x}}$.

18.2 / 20

On résout : $y = F_{0,1}(x) \in]0,1[$

ie $y = e^{-e^{-x}}$

ie $\ln(y) = -e^{-x}$

ie $-\ln(y) = e^{-x}$

ie $\ln(-\ln(y)) = -x$

ie $-\ln(-\ln(y)) = x$.

<u>Bilan</u> : $G(y) = -\ln(-\ln(y))$
pour tout $y \in]0,1[$.

2) * $f_{\mu,\alpha}$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.
* $f_{\mu,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$
* On étudie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\mu-x}{\alpha}} \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{\alpha}\right)\right) dx$$

Soit $(A,B) \in]-\infty, 0] \times [0,+\infty[$.
Alors :

$$\int_{A}^{B} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\mu-x}{\alpha}} \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{\alpha}\right)\right) dx$$

$$= \left[F_{\mu,\alpha}(x)\right]_A^B \, \cdots$$

$$= F_{\mu,a}(B) - F_{\mu,a}(A)$$

<u>Or</u> : $F_{\mu,a}(B) \xrightarrow[B \to +\infty]{} 1$

$F_{\mu,a}(A) \xrightarrow[A \to -\infty]{} 0$

<u>Alors</u> : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}} \cancel{\exp} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\Big)\ dx = 1$

ie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(x)\,dx = 1$

<u>Donc</u> : $f_{\mu,a}$ est une densité associée à la fonction de répartition $F_{\mu,a}$ (qui est bien croissante, de limite nulle en $-\infty$, de limite égale à 1 en $+\infty$ et continue sur $\mathbb{R}$).

3) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$.

* $Z(\Omega) = \mathbb{R}$.

* Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_X(t) = \mathbb{P}(aZ + \mu \leq t)$$
$$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{t-\mu}{a}\right) \quad \text{car } a > 0$$

$$= F_Z\Big(\underbrace{\frac{t-\mu}{a}}_{\in \mathbb{R}}\Big)$$

$$= \exp\left(-\exp\left(\frac{0 - \left(\frac{t-\mu}{a}\right)}{1}\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - t}{a}\right)\right)$$

<u>Donc</u> : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, \alpha)$

4) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(-\ln(-\ln(U)) \leq t)$$
$$= \mathbb{P}(\ln(-\ln(U)) \geq -t)$$
$$= \mathbb{P}(-\ln(U) \geq e^{-t})$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

$$= \mathbb{P}(\ln(U) \leq -e^{-t})$$
$$= \mathbb{P}(U \leq \exp(-e^{-t})) \quad \text{par stricte croissance de exp.}$$
$$= F_U(\underbrace{\exp(-e^{-t})}_{\in]0,1[})$$
$$= \exp(-e^{-t})$$

Bilan : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1)$.

b)

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Nom KONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

Signature

18.2 / 20

Écricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page

5) a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)\, e^{-u}\, du$ est impropre en 0 et $+\infty$.

* Étude en $+\infty$:

$$\frac{\ln(u)e^{-u}}{\frac{1}{u^2}} = \frac{u^2}{e^u} \times \ln(u)$$

* Étude en 0 :

$$\ln(u)\, e^{-u} \underset{u\to 0}{\sim} \ln(u)$$

Et : ln

18.2 / 20

5b) Posons $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow]0, 1[$

$$u \longmapsto e^{-u}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective

D'après le théorème de changement de variables, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u)\, e^{-u}\, du$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{u} \ln(u) \quad -u e^{-u} \; du$$

est de même nature que l'intégrale :

$$\int_0^1 -\frac{1}{-\ln(t)} \ln(-\ln(t))$$

5b) $\int_0^{+\infty} \ln(u)\, e^{-u}\, du$

$$= \int_0^{+\infty} \ln(u) \times \frac{-1}{u} \times (-u e^{-u})\, du$$

Posons $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow]0, 1[$

$$u \longmapsto e^{-u}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective strictement décroissante.

~~D'après le théorème de changement de variable : l'intégrale~~ $\int_0^{+\infty} -\frac{\ln(u)}{u}\,(-u e^{-u})\,du$ ~~est de même nature que~~ $-\int_1^0 \frac{\ln(-\ln(t))}{-\ln(t)}\,dt$

$$= \int_0^1$$

Posons $\varphi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$t \longmapsto -\ln(t)$$

bijective et de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le théorème de changement de variable l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \ln(u)\, e^{-u}\, du$ est de même nature

que $-\int_1^0 \ln(-\ln(t))\, e^{-(-\ln(t))} \cdot \frac{1}{t}\, dt$

$$= \int_0^1 \ln(-\ln(t))\, dt$$

<u>Donc</u> : l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t))\, dt$ converge.

c) D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) f_{\mu,\sigma}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\mu-t}{\sigma}} e^{-e^{\frac{\mu-t}{\sigma}}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \qquad \frac{t-\mu}{\sigma}$$

d) D'après le corollaire du th. de transfert :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sigma \mathbb{E}(Z) + \mu = \sigma\gamma + \mu}$$

Numéro d'inscription 502278

Né(e) le 07/02/2002

Signature Arony

Nom RONCHEWSKI

Prénom (s) ALEXIS

18.2 / 20

ECRICOME Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 12 / 12

Numéro de table 080

Commencez à composer dès la première page

6) a) • $(-Z)(\Omega) = \mathbb{R}$.

• Soit $t \in \mathbb{R}$.

$F_{-Z}(t) = \mathbb{P}(-Z \leq t)$

$= \mathbb{P}(Z \geq -t)$

$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq -t)$

$= 1 - F_Z(-t)$

$= 1 - F_{0,1}(-t)$

$= 1 - \exp(-\exp(t))$

• F_{-Z} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• Donc : $-Z$ est à densité.

Et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = F_{-Z}'(x) = e^{x} \cdot e^{-e^{x}}}$

b)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.2 / 20

Partie II -

7) a) Soit $\varepsilon > 0$

$$[|(V_n - V) + (W_n - W)| \geq \varepsilon]$$

$$\subset [|V_n - V| + |W_n - W| \geq \varepsilon]$$

$$\subset [|V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup [|W_n - W| \geq \varepsilon/2]$$

Donc : par croissance de la probabilité,

$$0 \leq \mathbb{P}(|(V_n - V) + (W_n - W)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|W_n - W| \geq \varepsilon/2)$$

par incompatibilité et positivité de la probabilité.

Alors : par encadrement :

$$\mathbb{P}(|V_n - V + W_n - W| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ie $$\mathbb{P}(|V_n + W_n - (V + W)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ie $$V_n + W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} V + W$$

Or : $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} V$ et $W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} W$

et $x \longmapsto \alpha x$ est continue (où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$)

$x \longmapsto \beta x$ aussi

Donc $\alpha V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \alpha V$ et $\beta W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \beta W$

Donc : $\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha V + \beta W$

b) Les X_i sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant a fortiori une même espérance (égale à $\mathbb{E}(X_1)$) et une même variance

D'après la loi faible des grands nombres

$$M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

- Les X_i^2 sont mutuellement indépendantes d'après le lemme des coalitions.
Et : les X_i^2 admettent tous la même espérance égale à $\mathbb{E}((X_1)^2)$ et une même variance.

D'après la loi faible des grands nombres

$$C_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}((X_1)^2).$$

c)