ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

506903

CHAUVIN

ESTEN

29/04/2003

Note de délibération : 18.92 / 20

Numéro d'inscription 50903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/09

Numéro de table 102

Signature

Exercice 1.

Partie I

1. Par définition même de F, on a $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

De plus, $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$

Donc par théorème, $\boxed{F \text{ est un sous-espace propre de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

De plus, on a $\left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right) = \left(I_3, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$

une famille génératrice de F.

Montrons que $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$ est libre, Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On suppose que $aI_3 + b\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} = O_3$

Alors, $\begin{pmatrix} a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Donc par identification des coefficients,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc $aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc par théorie, $\mathcal{F}$ est libre.

Libre et génératrice de $\mathcal{F}$, $\boxed{\text{la famille } \left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$

De plus, cette base comporte 2 vecteurs,

Donc par définition,

$$\boxed{\dim(\mathcal{F}) = 2}$$

2. ~~On réalise une caractérisation en 3 points.~~

- ~~Par définition même de G,~~

  ~~$G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$~~

- ~~$O_3 \in G$~~

  ~~En effet,~~

~~On a $O_3^2 = O_3$~~

- ~~**G est stable par combinaison linéaire.**~~

~~En effet, Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$~~

~~Soit $(M,N)\in G^2$~~

~~On a $(\lambda M+\mu N)^2 = \lambda M^2 + 2\lambda\mu MN + \mu N^2$~~

~~$\underset{(1)}{=} \lambda M + 2\lambda\mu MN + \mu N$~~

Soit $M \in G$

Donc $M^2 = M$

Donc $M^2 - M = O_3$

Donc $M(M-I_3) = O_3$

Donc $M = O_3$ ou $M - I_3 = O_3$

Donc $M = O_3$ ou $M = I_3$

Donc $G = \{O_3, I_3\}$

On a donc, $G \subset \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$

En revanche G n'est pas stable par combinaison linéaire, en effet, par exemple, $1.O_3 + 2I_3 = 2I_3 \notin G$.

Donc $\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

(3) (a)

- On a $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

En posant $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ on a donc

$A \in F$

- De plus, $A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Donc $A \in G$.

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/09

Numéro de table 102

On a donc $A \in F$ et $A \in G$

Donc $\boxed{A \in F \cap G}$

(b) On a donc d'après (3)(a), en particulier,

$A \in G$.

Donc $A^2 = A$ Donc $A^2 - A = 0_3$

Donc $\boxed{X \mapsto X^2 - X \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

(c) Les racines du polynôme annulateur $X \mapsto X^2 - X$ sont 0 et 1. (racines évidentes)

On a donc par théorème, $Sp(A) \subset \{0, 1\}$

Vérifions que ces nombres sont bien valeurs propres.

(*)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

- Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a $AX = 0.X$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a-b-c \\ -a+2b-c \\ -a-b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-c=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -a-b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 & (L_1=-L_2) \\ 2a-b-c=0 & (L_2=L_1) \\ -a-b+2c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ 3b-3c=0 \\ -3b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ b-c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ b=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0 \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A}$

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_0(A)$

et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre comme famille réduite à un vecteur non nul.

Libre et génératrice de $E_0(A)$, $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(A)}$

- Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On a $A.X = 1.X$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a-b-c\\-a+2b-c\\-a-b+2c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a-b-c\\-a+2b-c\\-a-b+2c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2a-b-c\\-a+2b-c\\-a-b+2c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3a\\3b\\3c\end{pmatrix}\right) = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a-b-c=0\\-a-b-c=0\\-a-b-c=0\end{cases}$ (1)

$\Leftrightarrow \{a+b+c=0 \Leftrightarrow a=-b-c$

Donc $X = \begin{pmatrix}-b-c\\b\\c\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc $X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A}$

Un test de liberté trivial montre que $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre.

Libre et génératrice de $E_1(A)$, $\boxed{\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(A)}$

On a donc $\{0,1\} \subset Sp(A)$

et d'après (*), $Sp(A) \subset \{0,1\}$

Donc par double inclusion,

$$\boxed{Sp(A) = \{0,1\}}$$

(d) • $0 \in Sp(A)$ donc par théorème,

$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

• On a $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ une base de $E_0(A)$

Or $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ comporte un unique vecteur.

Donc $\dim(E_0(A)) = 1$

• On a $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ une base de $E_1(A)$

Or cette famille comporte 2 vecteurs distincts.

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/09

Numéro de table 102

Donc $\dim(E_1(A)) = 2$.

On a donc $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 2+1 = \underline{3}$

et $A \in \mathcal{M}_{\underline{3}}(\mathbb{R})$

Donc par théorème, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

<u>Partie II</u>

(4) (a) On a, $M \in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2-a = 0 \\ 2ab+b^2-b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

Donc $\boxed{M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b^2=a \\ b(b+2a-1)=0 \end{cases}}$

(4) On a $M \in F$

et $M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b^2=a \\ b(b+2a-1)=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^2+2b^2=a \\ b=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2+2b^2=a \\ b=-2a+1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=0 \text{ ou } a=1 \\ b=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2+2(-2a+1)^2=a \\ b=-2a+1 \end{cases}$

$\iff M=O_3$ ou $M=I_3$ ou $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \text{ ou } a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$\iff M=O_3$ ou $M=I_3$ ou $M=A$ ou $M=I_3-A$

Donc $\boxed{M \in F \cap G \iff M \in \{O_3, I_3, A, I_3-A\}}$

(5) On a $B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{Vect}((A,B)) = \mathrm{Vect}((A, I_3 - A))$

$$= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, I_3 - A\right)\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} - aI_3 , I_3 - A + A\right)\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}, I_3\right)\right)$$

Or d'après (I), 1), $\left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}, I_3\right)$ est une base de F.

Donc en particulier, $\left(\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}, I_3\right)$ est génératrice de $\mathcal{F}$

Donc par théorème, (A,B) est génératrice de (A,B). (*)

De plus, $\dim(\mathcal{F}) = 2$ d'après 1)

et (A,B) comporte 2 vecteurs. (**)

Ainsi, d'après (*) et (**),

$\boxed{(A,B) \text{ est une base de } \mathcal{F}.}$

(6) (a).

On a $\alpha A + \beta B = \alpha(A) + \beta(I_3 - A)$

$$= \alpha A + \beta I_3 - \beta(A)$$

$$= (\alpha - \beta) A + \beta I_3$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(\alpha-\beta) & -\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & 2(\alpha-\beta) & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha+\beta & 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3b \\ 3b & 3a & 3b \\ 3b & 3b & 3a \end{pmatrix}$$

$$= M.$$

Donc $\boxed{M = \alpha A + \beta B.}$

(b) On a

$$AB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

et $BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription 56903

Né(e) le 29/04/2003

Signature

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 102

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{AB = BA}$.

(c) On a $AB = BA$

et $M = \alpha A + \beta B$

~~Donc d'après le binôme de Newton (*), $\forall n \in \mathbb{N}$~~

$$\cancel{M^n = (\alpha A + \beta B)^n \underset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha A^k \beta B^{n-k} = \alpha\beta}$$

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n : « $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ »

Montrons que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ en raisonnant par récurrence.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

- Initialisation :

Par théorème, $M^1 = M$

et $\alpha^1 A + \beta^1 B = \alpha A + \beta B$

$= M$

Donc P_1 est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère que P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie sous cette hypothèse,

On a $M^{n+1} = M^n \times M$

$\underset{(1)}{=} (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$

$= \alpha^n A^2 + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha BA + \beta^n B^2$

$\underset{(2)}{=} \alpha^n A + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha AB + \beta^n B$

$= \alpha^n (A + \beta AB) + \beta^n (\alpha AB + B)$

$= \alpha^n (A(I_3 + \beta B)) + \beta^n ((\alpha A + I_3) B)$

$\underset{(3)}{=} \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$

(1) <u>hypothèse de récurrence,</u>

(2) $A \in G$ donc $A^2 = A$

et $B \in G$ donc $B^2 = B$

(3) On a admis que $A(I_3 + \beta B) = \alpha A$

et que $(\alpha A + I_3) B = \beta B$

Donc P_{n+1} est vraie

- <u>Conclusion :</u> Ainsi, en vertu du principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$$

<u>Partie III</u>

(8) . $I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$

On a donc $I_3 - T =$

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Numéro de table 002

Exercice 2.

Partie I.

1. Soit $x > 0$

Alors $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

On par croissances comparées, puis somme,

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

On $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc par produit, puis somme, $\lim_{x \to 0^+} \left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$

On $\lim_{-\infty} \exp = 0$

Donc par composition, $\lim_{x \to 0^+} \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0}$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc par produit, puis somme, $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$.

$\lim_{+\infty} \log = +\infty$

Donc par produit, $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$ $(2 > 0)$

- On $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$

Donc par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = +\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{+\infty} g = +\infty}$

(2) (a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus, les formules usuelles nous donnent :

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

Or $\forall x > 0, \ \frac{1}{x} + 2 > 0$

Donc par théorème, $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^*_+}$

(b). On a :

- h est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ comme somme de fonctions continues sur cet intervalle.

- h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$ (d'après (2)(a))

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

  En effet, $\lim_{0^+} \log = -\infty$

  et donc par somme, $\lim_{0^+} h = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

  en effet, $\lim_{+\infty} \log = +\infty$

  donc par somme, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après les 4 point précédents et le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ ~~[illegible]~~ sur $\left]\lim_{x \to 0^+} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Or $0 \in \mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\exists! \alpha > 0 \text{ tel que } h(\alpha) = 0}$.

On a de plus, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\,\frac{1}{2} - 1$

$= -\ln(2)$

et $h(1) = \ln(1) + 2 - 1$

$= 0 + 2 - 1$

$= 1$.

Or $\ln(2) > 0$

Donc $-\ln(2) < 0$

et $1 > 0$

Donc $0 \in [-\ln(2), 1]$

Donc d'après un corollaire du théorème de la bijection, $\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/09

Numéro de table 002

(c) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)$ est défini et dérivable $\forall x > 0$.

Donc par composition, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$

De plus, les formules de dérivation usuelles nous donnent :

$$g'(x) = \left(\frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\ln(x)}{x^2}\right)\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{x} - \frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) g(x)$$

$$= \left(\frac{2x-1+\ln(x)}{x^2}\right) g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x)+2x-1\right) g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2} h(x)\, g(x)$$

18.92 / 20

Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x).}$

(c) • $\forall x > 0, \ \frac{1}{x^2} > 0$

• $\forall x > \alpha, \ h(x) > 0$

$\forall x \leq \alpha, \ h(x) \leq 0$

• $\forall x > 0, \ g(x) > 0$ par positivité stricte de la fonction exponentielle.

On en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

Donc $\boxed{\text{g est décroissate strictement sur }]0, \alpha] \text{ et croissate strictement sur } [\alpha, +\infty[.}$

3 : Soit $x > 0$

On a
$$g(x) - x^2 = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2$$
$$= \frac{1}{x^2} h(x)\, g(x) - x^2$$
$$= \frac{h(x)\, g(x) - x^4}{x^2}$$
$$= \frac{(\ln(x) + 2x - 1)\left(\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)\right) - x^4}{x^2}$$

x

Partie II.

4 : Notons $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : « u_n existe et $u_n > 0$ »

Montrons que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

- Initialisation :
  - u_0 existe
  - $u_0 > 0$ par hypothèse

  Donc P_0 est vraie
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie

Montrons que P_{n+1} est vraie sous cette hypothèse.

- On a par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et u_n existe

On $u_{n+1} = g(u_n)$

$$= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n)\right)$$

On en déduit alors que u_{n+1} existe car g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après l'étude menée en I.

et de plus, par positivité stricte de la fonction exponentielle,

$u_{n+1} > 0$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : Ainsi, en vertu du principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0.}$

(5)

```
function Y = Un(u0, n)
    A = [u0] , uk = u0
    for k = 1:n
        uk = exp((2-1/uk) * log(uk))
        A = [A, uk]
    end
```

Numéro d'inscription | 5 0 6 9 0 3

Né(e) le | 29 / 04 / 2003

Signature

Nom | CHAUVIN

Prénom (s) | ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 006

Y = A

endfunction.

(6) (a).

On a $x \mapsto x-1$ croissante strictement (affine à coefficient positif) sur $\mathbb{R}$ a fortiori sur $\mathbb{R}^*_+$.

De plus $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Donc $x \mapsto x-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$ et s'annule en 1.

De plus, par propriété usuelle, log est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$ et s'annule en 1

Donc on dresse le tableau.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$	||	$+$	0	$+$	

Donc $\boxed{(x-1)\ln x \geq 0 \ \forall x > 0 \text{ et } (x-1)\ln(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

(b) Soit $x > 0$

Alors $(x-1)\ln x \geqslant 0$ (d'après 6)(a))

Donc

On admet le résultat.

(c) $\forall x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ d'après 6) b

Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) \geqslant x}$

On a $g(1) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{1}\right)\ln(1)\right)$

$= \exp(0)$

$= 1$

7. On sait que $\forall x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$

Donc en particulier, puisque d'après (u), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n > 0$,

$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{g(u_n)}{u_n} \geqslant 1$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ et a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

Donc par théorie $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite croissante.}}$

(8) On note $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : « $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ »

On montre que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ <u>en raisonnant par récurrence</u>,

- <u>Initialisation</u> : immédiate.
- <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie

Montrons que P_{n+1} est vraie sous cette hypothèse.

On a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ par hypothèse de récurrence,

~~Donc, $-\ln(2) \leq \ln(u_n) \leq 0$~~

~~De plus, $2 \geqslant \frac{1}{u_n} \geqslant 1$~~

~~Donc $-2 \leq -\frac{1}{u_n} \leq -1$~~

~~Donc $0 \leq 2 - \frac{1}{u_n} \leq 1$~~

~~Donc par produit des 2 inégalités,~~

On a $(u_n)_n$ croissante donc $u_{n+1} \geq u_n$

Donc $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

De plus, par hypothèse de récurrence,

$u_n \leq 1$, donc $g(u_n) \leq g(1)$ par croissance de g.

Donc $g(u_n) \leq 1$ d'après (6)(c).

Donc $u_{n+1} \leq 1$

Donc $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$

Donc P_{n+1} est vraie

- Conclusion. Ainsi, en vertu du principe de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\tfrac{1}{2}, 1]}$$

(b) d'après (7), $(u_n)_n$ est croissante.

de plus d'après (8)(a), $(u_n)_n$ est majorée.

Donc d'après le théorème de la limite monotone,

$\boxed{(u_n)_n \text{ est convergente.}}$

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29 / 04 / 2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 002

On a ainsi $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

De plus, par théorie sur les suites extraites affines,

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(l)$

Donc par unicité de la limite,

$g(l) = l$

Or d'après (7), $g(l) = l \Leftrightarrow l = 1$.

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(9). (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : « $u_n > 1$ »

On montre que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

- <u>Initialisation</u> : immédiat
- <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vrai.

Donc par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$.

Or par croissance de g sur $\mathbb{R}^*_+$,

$$g(u_n) \geq g(1)$$

Donc $g(u_n) \geq 1$

Donc $u_{n+1} \geq 1$

Donc P_{n+1} est vraie.

- <u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1}$$

(b) $g \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

Donc $(g(u_n))_n$ tend vers $+\infty$.

Donc $(u_{n+1})_n$ tend vers $+\infty$.

Donc par théorème sur les suites extraites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

(10) On a $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

(...)

Partie III.

$(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \left(y - \frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Donc par somme, $(x,y) \mapsto \left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus, exp est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ a fortiori sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Donc par composition,

$(x,y) \mapsto \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Donc $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$

14 : admis.

15 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

On a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a + b = \lambda a \\ a = \lambda b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(2-\lambda)+b=0 \\ a=\lambda b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda b(2-\lambda)+b=0 \\ a=\lambda b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda b-\lambda^2 b+b=0 \\ a=\lambda b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2\lambda-\lambda^2+1)=0 \\ a=\lambda b \end{cases}$$

On le discriminant de $x \mapsto 2x-x^2+1$ est 8.

et les deux racines sont :

$$R_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{-2} \qquad R_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{-2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{8}}{2} \qquad = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$$

On remarque que les deux valeurs propres éventuelles sont de signe opposés.

Donc, $\boxed{\text{f n'admet pas d'extremum local en a mais un point col.}}$

Numéro d'inscription 506903

Né(e) le 29/04/2003

Nom CHAUVIN

Prénom (s) ESTEN

18.92 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option économique. Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 00L

Exercice 3.

Partie I.

(1) (a) Tout d'abord : dans chaque urne, il y a dans le « pire des cas » 0 jeton.
dans le « meilleur des cas » n jetons
tous les cas intermédiaires étant possibles.

Donc $X_n(\Omega) = Y_n(\Omega) = Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

On reconnait un schéma binomial, à chaque tirage de jeton se réalise une épreuve de Bernoulli aléatoire et indépendante relative à chaque urne : Ainsi, pour chaque urne la probabilité d'obtenir le jeton est de $\frac{1}{3}$ par équiprobabilité.

Ainsi,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.92 / 20

$$\boxed{\begin{array}{l} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \\ Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \\ Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}) \end{array}}$$

(b) $\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} \frac{1}{3}^0 \frac{2}{3}^n$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n} \frac{1}{3}^n \frac{2}{3}^0$

$= \frac{1}{3^n}$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ \text{et } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{3^n} \end{array}}$

(c) $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ est réalisé

si et seulement si au moment n il y a 0 boules dans U_2 et U_3

si et seulement si au moment n, il y a n boules dans U_1

si et seulement si $[X_n = n]$ est réalisé

Donc $\boxed{[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]}$

(3) (a)

```
function t = T( )
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
  liste = [X, Y, Z]
  while X==0 | Y==0 | Z==0.
    i = grand (1, 1, 'uin', 1, 3)
    liste (i) = liste (i) + 1
    n = n + 1
  t = n
endfunction.
```

Exercice 2

Partie III.

12 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On a $\partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{y}{x} - \frac{x\frac{1}{x} - \ln(x)}{x^2}\right) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \frac{xy - 1 + \ln(x)}{x^2} f(x,y)$$

$$\boxed{\partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

et $\partial_2(f)(x,y) = \left(\ln(x) - \frac{x^{\wedge}}{x}\right) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \ln(x) \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Donc $\boxed{\partial_2(f)(x,y) = \ln(x) f(x,y) \text{ et ce } \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$