

Exercice 1

pour Major-Prépa

1) on a: $\forall x \in]a, +\infty[$, $g(x) = 0$

donc g est bien définie sur $] -\infty, 0[$ en tant que fonction nulle.

De plus, comme F est la fonction de répartition d'une variable
aléatoire à densité, $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$
(et est croissante sur $\mathbb{R}$)

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in]0, 1[$, d'où pour $x = a$

$$F(a) \in]0, 1[$$

donc $F(a) \neq 0$

donc $x \mapsto \frac{F(x)}{F(a)}$ est bien définie sur

$] -\infty, a]$ en tant que quotient (dont le dénominateur
ne s'annule pas) de fonctions définies sur $] -\infty, a]$.

Donc g est définie sur $] -\infty, a]$

Ainsi, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, g est continue sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un ensemble fini $(\{a\})$ de points.

En outre, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$)

Enfin, on a :

$$\forall A \in]-\infty, a[\int_A^a g(x) dx = \int_A^a \frac{f(x)}{F(a)} dx$$

$$= \frac{1}{F(a)} [f(x)]_A^a$$

$$= \frac{F(a) - F(A)}{F(a)} \quad \text{Or } \lim_{A \rightarrow -\infty} F(A) = 0$$

donc par passage à la limite ($A \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a g(x) dx = \frac{F(a)}{F(a)} = 1$$

Donc $\int_{-\infty}^a g(t) dt = 1$

(2)

De plus, $\forall x \in]a, +\infty[$, $g(x) = 0$

donc $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge et vaut 0

donc comme les intégrales $\int_{-\infty}^a g(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$

convergent, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge
et d'après la relation de Chasles:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt &= \int_{-\infty}^a g(t) dt + \int_a^{+\infty} g(t) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc g est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire Y

2/a) on a :

$$\forall x \in]a, +\infty[, g(x) = 0 \text{ , et}$$

$$\forall x \in]-\infty, a] , g(x) = \frac{f(x)}{f(a)}$$

d'où

$$\forall x \in]a, +\infty[, G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt \text{ , d'où par la relation de Chasles:}$$

$$= \int_{-\infty}^a g(t) dt + \int_a^x g(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^a \frac{f(t)}{f(a)} dt + 0 \text{ , et (cf 1/1)}$$

$$= 1$$

De plus,

$$\forall x \in]-\infty, a] , G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{f(a)} dt$$

Donc

(3)

$$\forall x \in]-\infty, a[\quad \forall A \in]-\infty, x], \quad \int_A^x \frac{f(t)}{F(a)} dt = \left[\frac{F(t)}{F(a)} \right]_A^x \\ = \frac{F(x) - F(A)}{F(a)}$$

d'où comme $\lim_{A \rightarrow -\infty} F(A) = 0$, par passage à la limite:

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^x \frac{f(t)}{F(a)} dt = \frac{F(x)}{F(a)}$$

donc on en déduit que l'intégrale converge et:

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad G(x) = \frac{F(x)}{F(a)}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in [a, +\infty[\\ \frac{F(x)}{F(a)} & \text{Si } x \in]-\infty, a[\end{cases}$$

2)b) on 2

$$\forall x \in]-\infty, a[, P_{[X \leq a]} [X \leq x] = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)}$$

$$\text{or } \forall x \leq a, [X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq x]$$

$$= \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)}$$

$$= \frac{F(x)}{F(a)}$$

$$= G(x)$$

et -

$$\forall x \in [a, +\infty[, P_{[X \leq a]} [X \leq x] = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)} \quad \text{or} \quad \forall x > a, [X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq a]$$

$$= \frac{P(X \leq a)}{P(X \leq a)}$$

$$= 1.$$

④

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, G(x) = P_{[X \leq x]}(X \leq x)$$

3)a) on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, a[, \forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) &= P(H_n \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n Y_i \leq x\right), \text{ d'où par indépendance } \\ &\quad \text{des } (Y_i)_{1 \leq i \leq n}: \\ &= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \text{ Or } (Y_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ suivent } \\ &\quad \text{la même loi que } Y: \\ &= \prod_{i=1}^n P(Y \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n (G(x)) \text{ , d'où par 2)a): } \\ &= \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) &= \prod_{i=1}^n (G(x)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \in]-\infty, a[\end{cases}$$

3)b)
on a :

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad 0 \leq F(x) < F(a) \text{ et comme } \begin{matrix} F(a) > 0 \\ (\text{cf 1)}) : \end{matrix}$$

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad 0 \leq \frac{F(x)}{F(a)} < 1$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty, a[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n = 0$$

d'où en posant $Z = a$ et en notant G_Z
la fonction de répartition de Z :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\end{cases}$$

(5)

On a donc pour tout réel x tel que G_z soit continue en x :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = G_z(x)$$

Ainsi, $\boxed{M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a}$

4) a) on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, H_n(x) = P(Z_n \leq x)$$

$$= P(n(a - M_n) \leq x)$$

$$= P(a - M_n \leq \frac{x}{n})$$

$$= P(-M_n \leq \frac{x}{n} - a)$$

$$= P(M_n \geq a - \frac{x}{n})$$

$$= 1 - P(M_n \leq a - \frac{x}{n})$$

$$= 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} \right)^n$$

et comme M_n est à densité:
d'où q 3/b):

D'après 1), on a $Y(\Omega) =]-\infty, a]$

d'où comme les $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivent la même loi que Y

et comme $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n(\Omega) =]-\infty, a]$, donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, M_n(\omega) \leq a$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, n(a - M_n(\omega)) \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n(a - M_n))/(\Omega) = \mathbb{R}^+$

or

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, H_n(x) = P(Z_n \leq x)$
 $= P(Q)$
 $= 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} \right)^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4/b) on a:

⑥

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{x}{n}\right) = a \quad \text{et comme} \quad \lim_{y \rightarrow a} F(y) = F(a)$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(a - \frac{x}{n}\right) = F(a)$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} \right| = 0$$

D'où par algèbre des limites:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} - 1 + \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} \right) &= 0 \times \left(\frac{F(a)}{F(a)} - 1 + 0 \right) \\ &= 0 \times (1 - 1) \\ &= 0 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc par caractérisation de la négligeabilité:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} - 1 + \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ donc:}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

4)c) on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} \right)^n = e^{n \ln \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} \right)}$$

$$= e^{n \ln \left(1 + \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} \right)} \quad (1)$$

or d'après 4)b) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$$

$$\text{or comme } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} \right) = 0$$

$$\text{alors } \forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} = 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}^+, \ln \left(1 + \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, n \ln \left(1 + \frac{F(a - \frac{x}{n}) - F(a)}{F(a)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{f(a)}{F(a)} \times x$$

(7)

$$\text{d'où: } \forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{f(a - \frac{x}{n})}{f(a)} - 1 \right) = \frac{-f(a)}{f(a)} x$$

$$\text{et comme } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{y \rightarrow \frac{-f(a)}{f(a)} x} e^y = e^{-\frac{f(a)}{f(a)} x}, \text{ alors:}$$

d'après (1)

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(a - \frac{x}{n})}{f(a)} \right)^n = e^{-\frac{f(a)}{f(a)} x}, \text{ d'où:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 1 - e^{-\frac{f(a)}{f(a)} x}$$

$$\text{et comme } \frac{f(a)}{f(a)} > 0$$

$$\text{on pose } w \rightsquigarrow \mathcal{E} \left(\frac{f(a)}{f(a)} \right)$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, H_w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \\ 1 - e^{-\frac{f(a)}{f(a)} x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Donc, pour tout réel x tel que H_w soit continue en x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_w(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M_n \longrightarrow w, \text{ avec } w \rightsquigarrow \mathcal{E} \left(\frac{f(a)}{f(a)} \right)}$$

Exercice 2

$$\text{On a } F = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \exists k \in [0, 1[, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k \|x\| \right\}$$

1) Lorsque $k=0$, on a :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq 0 \right\} \quad \text{or, comme une norme est positive:}$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| = 0 \right\}$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), f = 0 \right\}$$

$$= \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

$\text{Ainsi, } F = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$

On vérifie ensuite par le calcul que:

⑧

$$\begin{cases} \exists X \neq 0, (A - \frac{1}{3}I)X = 0 \\ \exists X \neq 0, (A + \frac{1}{3}I)X = 0 \end{cases}$$

Donc λ et μ sont valeurs propres de A .

1)c) Comme A est symétrique réelle, et comme $\lambda \neq \mu$, les vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux à deux et comme $A = \text{Mat}_B(f)$

Les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux et donc, supplémentaires.

(9)

3)a) *Supposons que $id \in F$.

Alors $\exists k \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}^3, \|id(x)\| \leq k \|x\|$

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \leq k \|x\|$, d'où pour $x = 1$

$$\sqrt{3} \leq k \sqrt{3}, \text{ donc } \sqrt{3} \neq 0$$

$$1 \leq k$$

$$k \in [1, +\infty[$$

Absurde.

Donc $id \notin F$

3)b) *Supposons que F est un sous-espace vectoriel
 alors F est stable pour les f et e .

d'où $\forall (f, g, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}, \exists k \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}^3, \|(\lambda f + g)(x)\| \leq k \|x\|$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in F^2, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|(\lambda f + g)(x)\| \leq k \|x\| \quad (1)$$

et de plus, par inégalité triangulaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in F^2, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|\lambda f(x) + g(x)\| \leq \|\lambda f(x)\| + \|g(x)\| \quad \text{et comme} \\ (f, g) \in F^2$$

$$\forall (f, g) \in F^2, \exists (k', k'') \in [0, 1]^2, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|\lambda f + g\|(x) \leq \lambda k' \|f\| + k'' \|g\| \\ \leq (\lambda k' + k'') \|f\| \\ \text{d'où en posant} \\ \lambda = \frac{4}{k'}$$

$$\forall (f, g) \in F^2, \forall x \in \mathbb{R}^3, \left\| \left(\frac{4}{k'} f + g \right)(x) \right\| \leq (4 + k'') \|f\| \quad (2)$$

on pose alors
 $\mu = 4 + k''$, avec $k'' \in [0, 1]$
 donc $\mu \in [4, 5]$

D'où en soustrayant membre à membre (1) et (2)
 (et en ayant posé $\lambda = \frac{4}{k'}$ dans (1)) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, 0 \leq (k - \mu) \|x\| \quad \text{et pour } x = 1 \\ 0 \leq (k - \mu) \sqrt{3} \quad \text{et } \sqrt{3} \neq 0 :$$

$$0 \leq \kappa - \mu$$

⑩

$$\mu \leq \kappa$$

absurde car $\mu \in [4,5[$
 $\kappa \in [0,1[$

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

3)c) Soit $f \in F$, soit $g \in F$

$\exists \kappa \in [0,1[, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq \kappa \|x\|$, d'où pour $x = g(y)$
 $(y \in \mathbb{R}^3)$

$\exists \kappa \in [0,1[, \forall y \in \mathbb{R}^3, \|f(g(y))\| \leq \kappa \|g(y)\|$ et comme
 $g \in F$

$\exists \kappa \in [0,1[, \forall y \in \mathbb{R}^3, \|f \circ g(y)\| \leq \kappa^2 \|y\|$ or $\kappa^2 \in [0,1[$

Donc $\forall (f,g) \in F^2, (f \circ g) \in F$.

Ainsi, F est stable par la loi de composition
des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

3)d) * Supposons que f est un automorphisme de F .

* Supposons alors que $f^{-1} \in F$
d'où $ff^{-1} = id$ et $f \in F$

comme $f^{-1} \in F$:

d'après 3)c): $ff^{-1} \in F$ i.e.

$id \in F$ absurde d'après 3)a)

Donc $f^{-1} \notin F$

4)a) Soit p un projecteur non nul

* Supposons que $p \in F$

Alors $\exists K \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^3, \|p(x)\| \leq K \|x\|$, d'où
en posant
 $x = p(y) (y \in \mathbb{R}^3)$

$\exists K \in [0, 1], \forall y \in \mathbb{R}^3, \|p^2(y)\| \leq K \|p(y)\|$ et comme $p^2 = p$

$\exists K \in [0, 1], \forall y \in \mathbb{R}^3, \|p(y)\| \leq K \|p(y)\|$ or comme $p \neq 0$

$\exists K \in [0, 1], 1 \leq K$

Absurde.

$\forall y \in \mathbb{R}^3, \|p(y)\| \neq 0$
d'où:

Donc $p \notin F$.

i.e. Pour tout projecteur non nul, $p \notin F$.

Soit p^* le projecteur nul. On a bien:

$$\exists k \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^3, \|p^*(x)\| \leq k \|x\|$$

Donc $p^* \in F$.

Ainsi F ne contient pas de projecteurs autre que le projecteur nul.

4)b) Soit S une symétrie.

* Supposons que $S \in F$

On a $S \circ S = \text{id}$ donc $\text{id} \in F$ d'après 3)c)
absurde

Donc $S \notin F$

F ne contient pas de symétries

5) a) On pose $\kappa = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$

On a :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| = \|\lambda x\| \\ = |\lambda| \|x\| \text{ or}$$

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\} \\ \text{et comme } \forall x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \geq 0$$

$$\leq \kappa \|x\|$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq \kappa \|x\|}$
avec $\kappa = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$

5) b) * Supposons que $f \in F$

$$\text{Donc } \exists \kappa \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq \kappa \|x\|$$

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}^3, \|\lambda x\| \leq \kappa \|x\|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, |\lambda| \|x\| \leq \kappa \|x\| \text{ d'où pour } x=1$$

$$|\lambda| \sqrt{3} \leq \kappa \sqrt{3} \quad \text{d'où comme } \sqrt{3} \neq 0 \quad (12)$$

$$|\lambda| \leq \kappa$$

$$-\kappa \leq \lambda \leq \kappa \quad \text{or } \kappa \in [0, 1[$$

$$-1 < \lambda < 1$$

Donc toutes les valeurs propres de f appartiennent à $] -1, 1[$

* Supposons que toutes les valeurs propres de f appartiennent à $] -1, 1[$

$$\text{on a donc } \text{Sp}(f) \subset] -1, 1[$$

$$\text{d'où comme } \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\} \in [0, 1[$$

$$\text{alors } \kappa \in [0, 1[$$

Donc d'après 5)a):

$$\exists \kappa \in [0, 1[, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq \kappa \|x\|$$

Donc $f \in F$.

$$\boxed{f \in F \text{ ssi } \operatorname{sp}(f|_C) = -1, 1}$$

6) a2:

$$A^2 = \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \frac{1}{6^3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6^3} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d'au $A^3 = \frac{1}{6^2} \times 9 \times A$

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 2 \times 2} \times 3 \times 3 \times A$$

$$A^3 = \frac{1}{4} A$$

(13)

donc $X^3 - \frac{1}{3}X$ est un polynôme annulateur
de A
qui admet pour racines réelles $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

6)b) comme $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
 $\mathcal{B}$ est une base orthonormée

et comme ${}^tA = A$, f est un endomorphisme symétrique
de $\mathbb{R}^3$.

Donc d'après 5b); comme $\text{Sp}(f) \subset]-1, 1[$
 $f \in F$. (cf 6a))

et en posant $K = \max\{| \lambda |, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

donc (cf 5b)); $\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|x\|$.

6)c)

$$K = \max(|\text{spec}(A)|)$$

Exercice 3

1)a) On a: $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$

et comme les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes
de même loi que X :

$\forall i \in \mathbb{N}^*, X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et donc

$\forall i \in \mathbb{N}^*, X_i(\omega) \in \{0, 1\}$, donc

$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, 0 \leq X_i(\omega) \leq 1$, d'où en sommant pour
 $i=1$ à $i=N(\omega)$

$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \leq N(\omega)$

et comme

$\forall \omega \in \Omega, N(\omega) \in \mathbb{N}^*$

car $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall \omega \in \Omega, S(\omega) \in \mathbb{N}$

Ainsi, $\boxed{S(\Omega) = \mathbb{N}}$.

1)b) Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i admet une espérance
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une espérance en tant que
combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une
espérance. et N admet une espérance

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S admet une espérance pour la probabilité $P_{[N=n]}$ (14)

S admet donc une espérance

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et comme $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$ et sont indépendantes par somme de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli, indépendantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n &\sim \mathcal{B}(n, p) \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, E(S_n) &= np \end{aligned}}$$

3) on a :

$([N=n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements d'où par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, P(S=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([S=k] \cap [N=n]) \quad \text{or } S = \sum_{i=1}^N X_i = S_N \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P([S_n=k] \cap [N=n]) \quad \text{et en utilisant les termes nuls} \\ &\quad \text{car } \bigcup_{n=1}^{k-1} [\sum_{i=1}^n X_i = k] \cap [N=n] = \emptyset \end{aligned}$$

et comme N est indépendante des variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$
d'après le lemme des conditions,

N et $\sum_{i=1}^n X_i = S_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont indépendantes
d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S > k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n > k) \cdot P(N=n)$$

4) a) on a $N-1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$

donc $(N-1)(\Omega) = \mathbb{N}$

d'où $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(N-1=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, donc

$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket P(N-1=k-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$\forall k \geq 2, P(N=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

or $P(N-1=0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$ donc $P(N=1) = e^{-\lambda}$

donc le cas $k=1$ rejoint le cas général.

$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

Ainsi,

(15)

$$N(\Omega) = N^*$$

$$\forall k \in N^*, P(N=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

4/b) D'après 2) et 4/a), on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in N^*, P(S=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)! (n-1)!} \times \lambda^{n-1}$$

$$\forall k \in N^*, P(S=k) = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n (\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

d'où en effectuant le changement de variable $n' = n-k$

$$\begin{aligned} \forall k \in N^*, P(S=k) &= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k) (\lambda q)^n}{n!} \\ &= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (\lambda q)^n}{n!} + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S=k) = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-1}}{(n-1)!} + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \left(\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} + k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \right)$$

d'où en
reconnaissant
la somme
d'une série
exponentielle

$$= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q e^{\lambda q} + k e^{\lambda q})$$

et $q = 1-p$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q e^{\lambda(1-p)} + k e^{\lambda(1-p)})$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda + k) e^{-\lambda p}}$$

4)c) on a $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$P(S=0) = P\left(\sum_{i=1}^N X_i = 0\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^N X_i = 0\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n X_i = 0\right) \cap \bar{N} = \emptyset\right)$$

4)d) on a :

(16)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(S | N=n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N X_k \mid N=n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k \mid N=n\right), \text{ d'où par linéarité de l'espérance;}$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k \mid N=n) \text{ et comme les } (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ sont indépendantes de } N;$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \text{ et comme les } (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ suivent la même loi que } X;$$

$$= n \mathbb{E}(X)$$

D'après la formule de l'espérance totale (hypothèses admises) :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(S | N=n) \cdot P(N=n), \text{ d'où}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{E}(X) \cdot P(N=n)$$

$$= \mathbb{E}(X) \sum_{n=0}^{+\infty} n P(N=n)$$

$$= \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(N)$$

$\text{Ainsi, } \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(N)$

Problème

1) on a

$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$, d'où par définition:

il existe une fonction h de limite 1 en 0^+ telle que
au voisinage de 0^+ : $f(x) = h(x) \cdot x$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]0, \alpha[\Rightarrow f(x) = h(x) \cdot x \text{ d'où en composant par } \ln :$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(h(x) \cdot x)$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(h(x)) + \ln(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]0, \alpha[\setminus \{1\} \Rightarrow \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(h(x))}{\ln(x)} + 1$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$ et $\lim_{y \rightarrow 1} \ln(y) = 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(h(x))) = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

Donc par passage à la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = 1$$

d'où $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$

Partie 1

(17)

2)a) on a $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh}(x),$$

donc sh est impaire.

2)b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont.

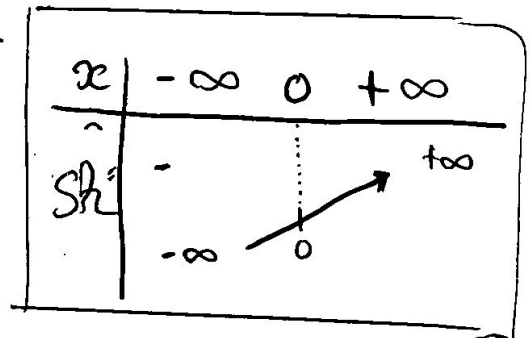
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\geq 0$$

Donc sh est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sh}(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{sh}(x)) = -\infty, \text{ d'où}$$



2)c) et $e^x = 1 + x + o(x)$

$$e^{-x} = 1 - x + o(x)$$

$$\text{donc } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + o(x), \text{ donc } \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1 + o(1)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = 1$

D'où $\boxed{gh(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$

3)a) on a:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}, ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$

Donc $\boxed{ch \text{ est paire}}$

3)b) on a ch une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont. D'où:

$\forall x \in \mathbb{R}, ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $= sh(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} ch(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = +\infty$

Or, d'après 2)b), $\forall x \in \mathbb{R}^-, ch'(x) \leq 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}^+, ch'(x) \geq 0$

Donc ch est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$

d'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

4) on a

(18)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{ch}(x))^2 - (\operatorname{sh}(x))^2 &= (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)) \\ &= \left(\frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= e^x \cdot e^{-x}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch}(x))^2 - (\operatorname{sh}(x))^2 = 1}$

Partie 2

5)a) comme la fonction exp définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \neq 0$

Donc comme $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$

$\boxed{\operatorname{th} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$

5)b) on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)}, \text{ donc, d'après 2)a) et 3)a):} \\ &= -\operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc th est impaire}}$

5)c) On remarque que: $ch' = sh$
et $sh' = ch$

d'où th étant dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient
(dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions
qui le sont:

$$\begin{aligned} th' &= \frac{sh' \times ch - sh \times ch'}{ch^2} \\ &= \frac{ch^2 - sh^2}{ch^2} \quad \text{et donc d'après 4);} \\ &= \frac{1}{ch^2} \quad , \text{d'où d'après 3/b):} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) \geq 0$$

Donc th est croissante sur $\mathbb{R}$

5)d) on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{e^x}{e^x} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$

(19)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$

Ainsi :

x	$-\infty$	$+\infty$
th	-1	1

↗

6/a) on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{ae^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{ae^{-x}(1 + e^{-x}) + be^{-x}(1 - e^{-x})}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})}$

$= \frac{ae^{-x} + ae^{-2x} + be^{-x} - be^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

$= \frac{a + ae^{-x} + b - be^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

d'où
comme
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{e^x}{e^x} = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}_t^*, \frac{a e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{b e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{(a+b) + (a-b) e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=b=1$$

Ainsi, $\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}}$

c) b) on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_t^*, \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

on en déduit alors qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sinh(x)}$ sur $\mathbb{R}_t^*$ est $x \mapsto \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 + e^{-x}) + K$ ($K \in \mathbb{R}$)

or

20

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) \text{ d'ou d' } \int dx : \\ = \ln\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sinh(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) + K$ ($K \in \mathbb{R}$)

7) D'après 2)c):

$$\sinh(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$$

$$\text{et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = 1$$

$$\cosh(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

$$\text{d'ou } \tanh(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$$

$$\text{done } \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2}$$

Donc d'après 1), comme $\ln$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (cf 5.1d) :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{or } \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$$

$$\text{donc } \ln(x) - \ln(2) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

Partie 3

$$\text{Ainsi } \ln\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

8/a) on a) comme $se > 0$:

$\forall t \in [k, k+1]$, $kx \leq tx \leq (k+1)x$ d'où comme sh est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in [k, k+1], sh(kx) \leq sh(tx) \leq sh((k+1)x) \quad \text{et en composant par la fonction inverse strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* :$$

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \frac{1}{sh(tx)} \leq \frac{1}{sh(kx)}$$

d'où, les fonctions en présence étant continues sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégrale $(k < k+1)$:

$$\frac{k+1-k}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \frac{k+1-k}{sh(kx)}$$

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \frac{1}{sh(kx)} \right|$$

8)b) D'où en sommant pour $k=1$ à $k=n$
d'après la relation de Charles:

(21)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \quad (1)$$

De même, en sommant pour $k=1$ à $k=n-1$

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\text{sh}((k+1)x)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)}$$

d'où $k'=k+1$:

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt$$

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

Or, comme $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\text{sh}(kx)} = \frac{1}{\text{sh}(x)}$

$$\int_1^1 \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)} = \frac{1}{\text{sh}(x)}$$

Donc le cas $n=1$ rejoint le cas général, d'où:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\text{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\text{sh}(x)} \quad (2)$$

done, d'après ① et ②:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{dt}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

9) a) On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

or d'après 6) b) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt &= \left[\ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{tx}{2} \right) \right) \right]_1^n \\ &= \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Or comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(y) = 1$ (cf 5d))

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{nx}{2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{th} \left(\frac{nx}{2} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{nx}{2} \right) \right) = 0$$

D'où par passage à la limite: (22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = -\ln(\operatorname{th}(x)) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

et comme la suite $\left(\int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} dt + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \right)$

est croissante d'après les variations de sh
(cf. 2))
on en déduit que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq -\ln(\operatorname{th}(x)) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$$

$$\text{et comme } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} = \frac{1}{\operatorname{sh}((n+1)x)}$$

la fonction $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \right)$ est croissante. comme elle
est en outre majorée, d'après le théorème de
la limite monotone:
la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \right)$ converge.

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{\sinh(kx)}$ converge.

g)b) on a d'après 8)b):

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left[\frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{nx}{2} \right) \right) \right]_1^{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sinh(kx)} \leq \left[\frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{nx}{2} \right) \right) \right]_1^n + \frac{1}{\sinh(x)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \right) - \frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{nx}{2} \right) \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sinh(kx)} \leq \frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{nx}{2} \right) \right) - \frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\sinh(x)}$$

or d'après 9)a):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \right) = 0 \quad \text{or d'après 9)a):}$$

D'où par théorème de prolongement des inégalités:

$$\forall x > 0, \quad -\frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{x}{2} \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(kx)} \leq -\frac{1}{x} \ln \left(\sinh \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{1}{\sinh(x)}$$

9)c), en divisant par $-\frac{\ln(x)}{x} > 0$ ($x \in]0, 1[$)

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{\ln(\tanh(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} \leq \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(x)}}{-\frac{\ln(x)}{x}} \leq \frac{\ln(\tanh(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)\sinh(x)} \quad (23)$$

et comme d'après 7) $\frac{\ln(\tanh(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1$

d'après 2)c): $\sinh(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x$ d'où

$$\frac{1}{\sinh(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}, \text{ donc}$$

$$-\frac{x}{\ln(x)\sinh(x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{\ln(x)},$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\ln(x)} = 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tanh(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\tanh(\frac{x}{2}))}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)\sinh(x)} \right) = 1$$

Ainsi par théorème d'encadrement:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n(n\pi)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} - \frac{\ln(x)}{x}$$

10)

$$S = 2 / (\exp(k \cdot x) - \exp(-k \cdot x)) + 5$$