

Problème 1

Partie A

1) a) On a:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où: } C_3 \leftrightarrow C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et avec: } C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donc avec } C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme les deux premiers vecteurs colonne de cette matrice forment une famille échelonnée, donc une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme le dernier vecteur colonne est nul, alors $\boxed{\operatorname{rg}(A) = 2}$

et comme $A \in M_3(\mathbb{R})$

A est inversiblessi $\text{rg}(A) = 3$

donc comme $\text{rg}(A) \neq 3$

A est non inversible.

1)b) on a:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

(2)

Donc $\boxed{A^3 - A^2 + A = 0}$

1)c) D'où :

$$A(A^2 - A + I) = 0$$

Donc $X(X^2 - X + 1)$ est un polynôme annulateur de A qui admet pour unique racine réelle

or, 0 est valeur propre de A ssi $\exists X \neq 0, AX = 0$

or

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $E_0(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

0 est donc l'unique valeur propre réelle

(de sous-espace propre $E_0(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$)

Comme $\dim(E_0(A)) = 1$
 $\neq 3$

On en déduit que A n'est pas diagonalisable
dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2/a) Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Donc $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus, ${}^tB = {}^t({}^tAA)$
 $= {}^tAA$
 $= B$

donc B est symétrique réelle

Ainsi, B est diagonalisable

2/b) i) on a:

$$\begin{aligned} R^t R &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

Donc R est orthogonale

(3)

2)b)ii) on a:

$$B = {}^t A A$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et donc:}$$

$${}^t R B R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } {}^t R B R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ${}^t R B R$ est bien diagonale.

3) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

On pose $\begin{cases} X = \text{Mat}_B(x), X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \\ Y = \text{Mat}_B(y), Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned} \langle x, g(y) \rangle &= {}^t X ({}^t M Y) \\ &= ({}^t X {}^t M) Y \\ &= {}^t (M X) Y \\ &= \langle f(x), y \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle}$

De plus,

④

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \langle x, g(f(x)) \rangle$, d'où d'après le résultat précédent:

$$= \langle f(x), f(x) \rangle$$

$$= \|f(x)\|^2$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2}$

4)a) on a $x \in \ker(h)$ donc $h(x) = 0$

D'où: $\langle x, h(x) \rangle = \langle x, 0 \rangle$

$= 0$, d'où d'après 3):

$$\|f(x)\|^2 = 0, \text{ i.e.}$$

$$\|f(x)\| = 0, \text{ donc:}$$

$$f(x) = 0, \text{ d'où}$$

$$\boxed{x \in \ker f}$$

4/b) d'après 4/a), on a: $\text{Ker}(h) \subset \text{Ker } f$.

Soit alors $x \in \text{Ker } f$.

$$\text{donc } f(x) = 0$$

$$\text{et comme } h(x) = g(f(x))$$

$$= g(0) \quad \text{et } g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \text{ donc}$$

g est linéaire:

$$= 0$$

$$\text{d'où } x \in \text{Ker } h$$

$$\text{donc } \text{Ker } f \subset \text{Ker } h$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } h}$$

On remarque que comme
 $(f, g) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2$ et $h = g \circ f$
alors $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

De plus, comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie
et $(f, h) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^2$, d'après la formule du rang:

$$\begin{cases} \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = n \\ \dim(\text{Ker}(h)) + \text{rg}(h) = n \end{cases}$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\text{Ker}(h)) + \text{rg}(h) \quad \text{et comme } \text{Ker } f = \text{Ker } h$$
$$\text{rg}(f) = \text{rg}(h)$$

Enfin, comme $\text{rg}(M) = r$ et $M = \text{Mat}_B(f)$ ⑤

alors $\text{rg}(f) = r$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{rg}(h) = r}$$

5)a)

on a $h = g \circ f$, d'où :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(h) &= \text{Mat}_B(g \circ f) \\ &= \text{Mat}_B(g) \times \text{Mat}_B(f) \\ &= {}^t M M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } {}^t(\text{Mat}_B(h)) &= {}^t({}^t M M) \\ &= {}^t M M \\ &= \text{Mat}_B(h) \end{aligned}$$

et comme $\text{Mat}_B(h) \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{Mat}_B(h)$ est symétrique réelle.

donc $\boxed{\text{Mat}_B(h) \text{ est diagonalisable}}$

... (Donc h est diagonalisable.)

De plus comme $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a: (6)

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\mathcal{B}$ forme une base orthonormée.

comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ est la matrice représentative symétrique réelle de h dans une base orthonormée

on en déduit que h est symétrique.

Ainsi, h est diagonalisable et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h .

5)b) Soit λ une valeur propre de h associée au vecteur propre x .

$$\text{on a } h(x) = \lambda x$$

$$\text{d'où } \langle x, h(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ = \lambda \|x\|^2,$$

or comme x est un vecteur propre, $x \neq 0$, donc $\|x\|^2 \neq 0$, d'où

$$\lambda = \frac{\langle x, h(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

et d'après 3): $\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$
 ≥ 0

Donc les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

6) Comme les bases B et B_1 sont orthogonales, avec $P = \text{Mat}_{B, B_1}(\text{id})$, P est la matrice de passage d'une base orthogonale dans une autre base orthogonale, donc:

P est orthogonale

De plus, on a $\text{Mat}_B(h) = {}^tMM$

et d'après 5)a), on pose $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, d'où

$$\text{Mat}_{B_1}(h) = D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$$

et d'après la formule du changement de base:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_B(h) &= \text{Mat}_{B, B_1}(\text{id}) \times \text{Mat}_{B_1}(h) \times \text{Mat}_{B_1, B}(\text{id}) \text{ d'où} \\ &= \text{Mat}_{B, B_1}(\text{id}) \times \text{Mat}_{B_1}(h) \times {}^t \text{Mat}_{B, B_1}(\text{id}), \text{ i.e.} \end{aligned}$$

$${}^tMM = PDP^t$$

Comme les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont valeurs propres de h et $\textcircled{P}$
 comme d'après 5)b) les valeurs propres de h sont positives
 ou nulles

il existe des réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ positifs ou nuls tels que :

$${}^tMM = PD^tP \text{ avec } D = \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n})$$

7) Comme M est symétrique réelle, M est diagonalisable et :
 il existe une matrice Q orthogonale, D' diagonale et
 des réels $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

$$M = QD'^tQ \text{ avec } D' = \text{diag}((\mu_i)_{1 \leq i \leq n})$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } {}^tM &= Q^tD'^tQ \\ &= QD'^tQ \end{aligned}$$

$$(\text{Donc } \text{Sp}(M) = \{\mu_i, i \in [1, n]\})$$

$$\text{Donc } {}^tMM = QD'^tQ QD'^tQ$$

$$= Q(D')^{2t}Q \quad \text{or comme } Q \text{ est orthogonale}$$

$$= Q(D')^2Q^{-1}$$

Les matrices tMM et $(D')^2$ sont donc semblables

$$\text{Donc } \text{Sp}({}^tMM) = \text{Sp}((D')^2) \text{ i.e.}$$

$$\{\lambda_i, i \in [1, n]\} = \{\mu_i^2, i \in [1, n]\}$$

On en déduit alors que :

$$\forall i \in [1, n], \mu_i^2 = \lambda_i \quad , \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, n], \sigma_i &= \sqrt{\lambda_i} \\ &= \sqrt{\mu_i^2} \\ &= |\mu_i| \end{aligned}$$

Les valeurs singulières de M sont donc les valeurs
absolues de ses valeurs propres

$$\text{i.e. } \forall i \in [1, n], \sigma_i = |\mu_i| .$$

8) Comme deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables
ssi elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans
des bases différentes

et comme le rang d'un endomorphisme est le rang de sa matrice
dans toute base

i.e. pour toute base de $\mathbb{R}^n$, $\text{rg}(\text{Mat}_B(f)) = \text{rg}(f)$

Donc deux matrices semblables ont même rang.

et comme tMM et D sont semblables (d'après 6) :

$$\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(D) \quad \text{or} \quad \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(M) = r$$

$$\text{Ainsi, } \text{rg}(D) = r$$

Comme D est diagonale, D admet r coefficients
diagonaux non nuls et $n-r$ coefficients nuls.

g) a) Soit $i \in \{1, \dots, r\}$

* Supposons $f(\varepsilon_i) = 0$

d'après 3): $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$, d'où pour $x = \varepsilon_i$

$$\langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i) \rangle = \|f(\varepsilon_i)\|^2$$

donc $\lambda_i \|\varepsilon_i\|^2 = \|0\|^2$ comme $h(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$

$$\lambda_i = 0 \text{ ou } \|\varepsilon_i\|^2 = 0 \quad (\text{cf 7)})$$

donc :

$$\|\varepsilon_i\|^2 = 0$$

$\varepsilon_i = 0$ or, comme $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq r}$ sont des vecteurs

propres de K , on sait que $\forall i \in [1, r]$, $\varepsilon_i \neq 0$
 cela aboutit donc à une contradiction. 1

⑧

$$f(\varepsilon_i) \neq 0$$

Donc $\forall i \in [1, r]$, $\varepsilon_i \neq 0$.

et d'après 3), pour $x = \varepsilon_i$ ($i \in [1, r]$)

$$\forall i \in [1, r], \|f(\varepsilon_i)\|^2 = \langle \varepsilon_i, K(\varepsilon_i) \rangle \quad \text{et } (\lambda_i)_{i \in [1, r]} \text{ valeurs propres de } K;$$

$$= \lambda_i \|\varepsilon_i\|^2 \quad \text{et comme } (\varepsilon_i)_{i \in [1, r]} \text{ est une base orthogonale}$$

$$= \lambda_i x_i$$

donc $\forall i \in [1, r], \|f(\varepsilon_i)\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall i \in [1, r] \begin{cases} f(\varepsilon_i) \neq 0 \\ \|f(\varepsilon_i)\| = \sigma_i \end{cases}}$$

9)b) on a

$$\forall i \in [1, r], \langle u_i, u_i \rangle = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|^2} \langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_i) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sigma_i^2} \|f(\varepsilon_i)\|^2,$$

$$= \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma_i^2$$

$$= 1$$

et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\|g(\varepsilon_i)\| \|g(\varepsilon_j)\|} \times \langle g(\varepsilon_i), g(\varepsilon_j) \rangle$$

et d'après 3):

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \times \langle \varepsilon_i, (g \circ f)(\varepsilon_j) \rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \cdot \langle \varepsilon_i, g(\varepsilon_j) \rangle$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$$

$$= 0$$

or $(\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ forment une base orthogonale.

$$\text{Donc } \forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la famille $(u_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ est orthogonale.

g)c) D'après g)a) et g)b): ②

$$\forall i \in [1, r], u_i = \frac{1}{\sigma_i} f(e_i), \text{ d'où}$$

$$\forall i \in [1, r], f(e_i) = \sigma_i u_i,$$

et comme $\forall i \in [r+1, n], \lambda_i = 0$

et d'après 7): $\forall i \in [1, n], \mu_i^2 = \lambda_i$

Alors $\forall i \in [r+1, n], \mu_i^2 = 0$, d'où

$$\forall i \in [r+1, n], \|u_i\| = 0 \text{ (par 7);}$$

$$\forall i \in [r+1, n] \sigma_i = 0$$

comme $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien et comme la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$ est orthonormée, d'après le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut la compléter en $n-r$ vecteurs $(u_i)_{r+1 \leq i \leq n}$

donc la base $B_2 = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée et

$$\text{Mat}_{B_1 B_2}(f) = \text{diag}((\sigma_i)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n})$$

10) Comme $f = \text{id} \circ f \circ \text{id}$:

(10)

$$\text{Mat}_B(f) = \text{Mat}_{B, B_2}(\text{id}) \times \text{Mat}_{B_2, B_1}(f) \times \text{Mat}_{B_1, B}(\text{id})$$

$$\text{or } Q = \text{Mat}_{B, B_2}(\text{id})$$

$$\Delta = \text{Mat}_{B_1, B_2}(f)$$

d'après glc

$$\text{et } {}^t P = \text{Mat}_{B_1, B}(\text{id})$$

et comme Δ est diagonale

$${}^t \Delta = \Delta = \text{Mat}_{B_2, B_1}(f)$$

$$= Q \Delta {}^t P$$

$$\text{Ainsi, } M = Q \Delta {}^t P$$

et comme B et B_2 sont deux bases orthonormées, Q est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée, donc :

Q est orthogonale.

41) on a $B = {}^tAA$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

on a alors:

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } C_1 \leftrightarrow C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } C_2 \leftrightarrow C_2 + C_1$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } C_3 \leftrightarrow C_3 - C_1$$

et comme les deux premiers vecteurs colonne de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ forment une famille échelonnée donc libre de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ avec un vecteur nul, alors :

en plus
 $\text{rg}(B) = 2$

De plus,

(11)

$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de B ss: $\exists X \neq 0, (B - \lambda I)X = 0$

or

$$(B - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

avec $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0$$

d'où

$$L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1+(1-\lambda)(2-\lambda) \end{pmatrix} X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} X = 0 \quad (1)$$

$$\text{avec } L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

avec $P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2$

$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda$$

$$= \lambda(\lambda - 3)$$

Donc $\text{Sp}(B) = \{0, 1, 3\}$

et comme B est symétrique ^{réelle},
il existe une matrice P orthogonale
de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice

$\text{diag}(v_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de $M_3(\mathbb{R})$ telles

que $B = P \text{diag}(v_i)_{1 \leq i \leq 3} P^t$

On reprend les notations de la partie 2 appliquée à la question 11, avec

$$A = \text{Mat}_B(f)$$

$$B = \text{Mat}_B(h)$$

on a alors

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 0$$

donc les valeurs singulières de la matrice B

sont

$$\sigma_1 = \sqrt{3}$$

$$\sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 = 0$$

D'où

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc d'après les résultats précédents

il existe deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $M_3(\mathbb{R})$

et une matrice Δ_1 diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = Q_1 \Delta_1^t P_1$$

Partie C

12) On a:

$$\begin{aligned}MM^t &= Q \operatorname{diag}(\sigma_i)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n})^t P P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n}) \\&= Q \operatorname{diag}(\sigma_i)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n}) \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n})^t Q \\&= Q \operatorname{diag}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i}\right)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n})^t Q \\&= Q \operatorname{diag}((1)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n})^t Q\end{aligned}$$

* Supposons que M est inversible

Alors $\operatorname{rg}(M) = n$, donc comme $\operatorname{rg}(M) = r$
 $n = r$

$$\begin{aligned}\text{donc } MM^t &= Q \operatorname{diag}((1)_{1 \leq i \leq n})^t Q \\&= Q I^t Q \\&= Q^t Q \\&= I\end{aligned}$$

$$\text{Donc } M^{-1} = M^t$$

Ainsi, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^t$

• Si 3 est valeur propre de B , en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(1) devient :

$$(B - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_3(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et en posant $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a $\|u\| = \sqrt{6}$, d'où

on pose $X_1 = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Si 1 est valeur propre de B ,
en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, (1) devient :

$$(B - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et en posant $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\|u\| = \sqrt{2}$

d'où on pose $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|u\|} u$.

- Si 0 est valeur propre de B , en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ① devient:

$$BX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $E_0(B) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'où en posant $\|u\| = \sqrt{3}$

$$X_3 = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on a donc, d'après 9a), en posant $X_1 = \text{Mat}_B(\varepsilon_1)$

$$u_1 = \frac{1}{\|f(\varepsilon_1)\|} f(\varepsilon_1)$$

$$X_2 = \text{Mat}_B(\varepsilon_2)$$

$$X_3 = \text{Mat}_B(\varepsilon_3)$$

$$= \frac{1}{0_1} \times \frac{1}{\sqrt{6}} f(2, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3 \times 6}} f(2, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} f(2, 1, 1) \quad \text{d'où en posant } Y_1 = \text{Mat}_B(u_1)$$

$$Y_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De même, on trouve :

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

enfin, en posant $Y_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

en par résolution de $\begin{cases} \langle Y_1, Y_3 \rangle = 0 \\ \langle Y_2, Y_3 \rangle = 0 \end{cases}$

on peut prendre : $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(après calculs)

Donc on pose

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

13)a) D'après 12), on a :

(13)

$$MM^t = Q \operatorname{diag} \left((1)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n} \right)^t Q$$

13)b) on pose $\Delta^* = \operatorname{diag} \left((1)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n} \right)$

Donc $MM^t = Q \Delta^* Q$, d'où en multipliant à gauche et à droite par Q^{-1} et Q

$$Q^{-1} MM^t Q = \Delta^*$$

et comme $MM^t = \operatorname{Mat}_B(p)$

$Q = \operatorname{Mat}_{B, B_2}(\operatorname{id})$ (d'après 10)), on a :

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \operatorname{Mat}_{B_2, B}(\operatorname{id}) \times \operatorname{Mat}_B(p) \times \operatorname{Mat}_{B, B_2}(\operatorname{id}), \text{ d'où par la formule du changement de base :} \\ &= \operatorname{Mat}_{B_2}(p) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \operatorname{Mat}_{B_2}(p) = \operatorname{diag} \left((1)_{1 \leq i \leq r}, (0)_{r+1 \leq i \leq n} \right)$$

on pose $B_2 = (S_i)_{1 \leq i \leq n}$

Donc par lecture matricielle, comme on a :

$$\text{Mat}_{B_2}(p) = \begin{pmatrix} p(s_1) & p(s_2) & \dots & p(s_n) \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & & \\ (0) & & & & (0) & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |s_1 \\ |s_2 \\ \vdots \\ |s_n \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-r}$

Alors $\forall i \in [1, n], p(s_i) = \begin{cases} s_i & \text{si } i \in [1, r] \\ 0 & \text{si } i \in [r+1, n] \end{cases}$

on a $\text{Vect}(s_i)_{1 \leq i \leq r} \oplus \text{Vect}(s_i)_{r+1 \leq i \leq n} = \mathbb{R}^n$

et comme $\forall i \in [1, r], p(s_i) = s_i$

$\in \text{Vect}(s_i)_{1 \leq i \leq r}$

p est la projection sur $\text{Vect}(s_i)_{1 \leq i \leq r}$

et comme $\text{Mat}_{B_2}(p) = A^*$, $\text{Mat}_{B_2}(p) = \text{Mat}_{B_2}(p)$

donc $\text{Mat}_{B_2}(p)$ est symétrique. Comme B_2 est une base orthonormée alors :

p est symétrique.

Comme p est un projecteur symétrique,

p est un projecteur orthogonal

13)c) Done

$$\begin{aligned} \text{rg}(p) &= \dim(\text{Im } p) \text{ , or comme } p \text{ est le projecteur sur } \text{Vect}((s_i)_{1 \leq i \leq r}) \text{ par propriété:} \\ &= \dim(\text{Vect}((s_i)_{1 \leq i \leq r})) \quad \text{Im } p = \text{Vect}((s_i)_{1 \leq i \leq r}) \\ &= r \quad \text{et comme } (s_i)_{1 \leq i \leq r} \text{ forme une famille libre de } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

d'où $\text{rg}(p) = \text{rg}(MM^t)$ donc :

$$\text{rg}(MM^t) \leq r \text{ , donc } \dim(\text{Im } p) = r$$

On a (cf supra) :

$$\text{Im } p = \text{Vect}((s_i)_{1 \leq i \leq r})$$

et comme $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, S_i = p(S_i)$

$$= f(f^+(S_i))$$

$$\in \text{Im} f$$

Alors $\text{Vect}((S_i)_{1 \leq i \leq r}) \subset \text{Im} f$

$$\text{Avec } \dim(\text{Vect}((S_i)_{1 \leq i \leq r})) = r = \dim \text{Im} f$$

Alors $\text{Vect}((S_i)_{1 \leq i \leq r}) = \text{Im} f$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Im} p = \text{Im} f}$$

14) a) Comme $\text{Vect}(S_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (15)
 et p une projection orthogonale sur $\text{Vect}(S_i)_{1 \leq i \leq r}$
 par caractérisation par minimisation de la norme:

$$\forall y' \in \text{Vect}(S_i)_{1 \leq i \leq r} \quad \|y - p(y)\| \leq \|y - y'\|, \text{ d'où d'après } (13) c)$$

$$\forall y' \in \text{Im } f : \|y - p(y)\| \leq \|y - y'\|, \text{ d'où, comme}$$

$$\forall y' \in \text{Im } f, \exists x' \in \mathbb{R}^n, y' = f(x') \\ \text{donc :}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|}$$

14) b) Soit $x_0 = f^+(y)$.

$$\text{On a } f(x_0) = (f \circ f^+)(y) \\ = p(y)$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - f(x_0)\| \leq \|y - f(x)\|$$

Donc $x_0 = f^+(y)$ est le vecteur rendant minimal $\|y - f(x)\|$
 et qui répond donc au problème posé.

15/a) on 2

$$\text{Im} f_1 = \text{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3))$$

or $f_1(e_1) = -e_3$

$$f_1(e_2) = e_1$$

$$f_1(e_3) = e_1 + e_3$$

d'où :

$$\text{Im} f_1 = \text{Vect}(-e_3, e_1, e_1 + e_3)$$

*Supposons que $y \in \text{Im} f$

soit $\exists (\lambda, \mu, r) \in \mathbb{R}^3$ $y = \lambda(-e_3) + \mu e_1 + r(e_1 + e_3)$

$$(1, 1, 1) = (r + \mu, 0, r - \lambda)$$

donc $0 = 1$

absurde.

donc $y \notin \text{Im} f$

15)b) On a $AX = \begin{pmatrix} y+z \\ 0 \\ -x+z \end{pmatrix}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow f_1(x) = (x_2 + x_3, 0, x_3 - x_1)$ (16)

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \|y - f_1(x)\|^2 = \|y\|^2 - 2\langle y, f_1(x) \rangle + \|f_1(x)\|^2$$

$$= (\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})^2$$

$$- 2(x_2 + x_3 - x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$$

$$= 3 - 2(-x_1 + x_2 + 2x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2$$

$$= \frac{(x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1}{2}$$

15)c) Comme $r = 2$ et $n = 3$

$2 < 3$, donc d'après 14)b),

il existe deux vecteurs distincts x^* et z^* , minimisant $\|y - f(x)\|$

en posant $y = (a_1, a_2, a_3)$ on a $M^+ y = M^+ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (17)

$$= [\dots]$$

et après calculs,

on trouve 2 vecteurs qui convergent

Problème 2

Partie A

1) on a :

$$\underline{C_0 = 1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1}$$

$$\underline{= 1}$$

$$C_2 = \frac{1}{3} \binom{6}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

$$= \frac{6 \times 5}{6}$$

$$\underline{= 5}$$

2) a) on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)! \cdot n}{(n!)(n!)} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \binom{2n}{n} \frac{n+1-n}{n+1} = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

15)b) On a $AX = \begin{pmatrix} y+z \\ 0 \\ -x+z \end{pmatrix}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow f_1(x) = (x_2+x_3, 0, x_3-x_1)$ (16)

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \|y - f_1(x)\|^2 = \|y\|^2 - 2\langle y, f_1(x) \rangle + \|f_1(x)\|^2$$

$$= (\sqrt{1^2+1^2+1^2})^2 - 2(x_2+x_3 - x_1+x_3) + (x_2+x_3)^2 + (x_3-x_1)^2$$

$$= 3 - 2(-x_1+x_2+2x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2$$

$$= (x_2+x_3-1)^2 + (x_1-x_3+1)^2 + 1$$

15)c) Comme $r=2$ et $n=3$

$2 < 3$, donc d'après 14)b),

il existe deux vecteurs distincts x^* et z^* minimisant $\|y - f(x)\|$

en posant $y = (a_1, a_2, a_3)$ on a $M^+ y = M^+ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
 $y = \text{Mat}_B(y)$
 $= [\dots]$

et après calculs,

on trouve 2 vecteurs qui convergent.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

(17)

$$2/b) \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \binom{2n}{n} \in \mathbb{N}^* \\ \binom{2n}{n+1} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \right) \in \mathbb{Z}$$

Or, comme $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \geq 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \geq 0$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \left(\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \right) \in \mathbb{N}$$

* Supposons que, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, c_{n_0} = 0$

$$\text{donc } \binom{2n_0}{n_0} = \binom{2n_0}{n_0+1}$$

$$\frac{(2n_0)!}{((n_0)!)^2} = \frac{(2n_0)!}{(n_0-1)!(n_0+1)!}$$

$$((n_0-1)!)^2 n_0 (n_0+1) = (n_0!)^2$$

$$(n_0-1)!^2 (n_0+1) = (n_0-1)! n_0!$$

$$(n_0-1)!(n_0+1) = n_0!$$

$$n_0! (n_0+1) = n_0! n_0 \quad \text{d'au}$$

$$n_0+1 = n_0$$

$$1=0$$

absurde.

done $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \neq 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{N}^*$

3) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$

4) `function c = estalon(n)`
`c = 1`
`for k = 1:n`
`c = (2 * (2 * k + 1)) / (k + 2) * c`
`end`
`endfunction`

5)a) on a, d'après 3), comme $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \neq 0$ (cf 2b));

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1 \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N}, 4n+2 > n+2$$

d'où;

Donc (c_n) est croissante