Code sujet : 287

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

S'interroger sur la répartition des nombres dans un tableau de données est une question importante des mathématiques du hasard. Le problème propose trois approches dans des situations diverses. Dans une première partie, on étudie la loi du premier chiffre significatif. Dans une deuxième, on introduit une fonction auxilliaire pour obtenir un renseignement sur la répartition moyenne des nombres dans une table de logarithmes. Enfin, dans la troisième, on s'intéresse à la fréquence d'apparition d'une décimale dans l'écriture d'un nombre. **Les trois parties sont indépendantes**

I Autour de la loi de Benford

Soit $x \in I\!R$. On note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, et $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - [x]$. On note $\log z$ le logarithme <u>en base 10</u> du réel $z > 0$. On a donc $\log z = \frac{\ln z}{\ln 10}$. On rappelle en particulier les propriétés suivantes, qu'on pourra utiliser sans démonstration

$$\begin{gathered}\forall z > 0,\ 10^{\log z} = z \\ \forall z > 0, \forall z' > 0,\ \log(z.z') = \log z + \log z' \\ \forall a \in I\!R,\ \log(10^a) = a\end{gathered}$$

On a par exemple $\log(100) = 2, \log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

1)

(a) Montrer que pour tout réel x positif et non nul, on a

$$x = 10^{\{\log x\}}.10^{[\log x]}$$

Cette décomposition est dite *notation scientifique* de x.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, le couple $(10^{\{\log x\}}, [\log x])$ est l'unique couple (α, n) dans $[1, 10[\times \mathbf{Z}$ tel que $x = \alpha.10^n$.

Tournez la page S.V.P.

(c) Soit $x > 0$. On pose $\gamma = [10^{\{\log x\}}]$. Montrer que $\gamma \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
γ est appelé le premier chiffre significatif de x.

2) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 9$, on pose $p_k = \log(1 + \frac{1}{k})$. Montrer que $\sum_{k=1}^{9} p_k = 1$.

$(p_k)_{1\leq k\leq 9}$ définit donc une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, 9\}$ dite *loi de Benford*.

3) Soit X une variable aléatoire réelle strictement positive. On suppose que la variable aléatoire réelle $Y = \{\log X\}$ suit une loi uniforme sur $[0,1[$.

(a) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Montrer que $[10^Y] = k \iff k \leq 10^Y < k + 1$

(b) On considère la variable aléatoire $\Gamma = [10^{\{\log X\}}]$ égale au premier chiffre significatif de X. Déterminer la loi de la variable aléatoire Γ.

4) Soit Y une variable aléatoire réelle admettant une densité g continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que

(h1) g atteint son maximum M en un unique point $a_0 \in \mathbb{R}$.
(h2) g est croissante sur $]-\infty, a_0]$ et décroissante sur $[a_0, +\infty[$

(a)

i) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\{y\} = \{y - n\}$.

ii) Déduire que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la loi de $\{Y\}$ est identique à celle de $\{Y - n\}$.

iii) Déterminer une fonction de densité $\tilde{g}$ continue de la variable aléatoire $Y - [a_0]$.

iv) Montrer que $\tilde{g}$ admet un unique maximum en un point $\tilde{a}_0 \in [0, 1[$.

v) Montrer que $\tilde{g}$ vérifie les conditions (h1) et (h2) ci-dessus avec $\tilde{a}_0$ remplaçant a_0.

On supposera donc désormais que $a_0 \in [0, 1[$. On fixe $x \in]0, 1[$ et on note $I_{n,x} = [n, n + x[$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

(b)

i) Soit φ une fonction positive continue et croissante sur $[0,1]$. Montrer, en utilisant un changement de variable, que $\int_0^x \varphi(t)dt \leq x.\int_0^1 \varphi(u)du$.

ii) Déduire que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq -1$, on a $\frac{1}{x}\int_{I_{n,x}} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt$

On **admettra** qu'on montrerait de même que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{x}\int_{I_{n,x}} g(t)dt \leq \int_{n-1+x}^{n+x} g(t)dt$

iii) Montrer que $\frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\int_{I_{-n,x}} g(t)dt \leq \int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ et que $\frac{1}{x}\sum_{n\geq 2}\int_{I_{n,x}} g(t)dt \leq \int_{1+x}^{+\infty} g(t)dt$

iv) Montrer que $\int_{I_{0,x}} g(u)du \leq xM$ et que $\int_{I_{1,x}} g(u)du \leq xM$

v) Conclure que $\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{I_{n,x}} g(u)du = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\int_{I_{-n,x}} g(u)du + \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\int_{I_{n,x}} g(u)du \leq 1 + 2M$

On montrerait de même que $\frac{1}{x}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{I_{n,x}} g(u)du \geq 1 - 2M$, inégalité qu'on **admettra**.

vi) Montrer que l'événement $(\{Y\} < x)$ est égal à $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(Y \in I_{n,x})$.

vii) Déduire que $| P(\{Y\} < x) - x | \leq 2M$.

5) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que Z_n suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$. On pose $X_n = 10^{\sqrt{Z_n}}$ et $Y_n = \log X_n = \sqrt{Z_n}$.

(a) Déterminer une densité g_n de la loi de Y_n, continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier les variations de g_n sur $I\!R^+$ et déterminer son maximum.

(c) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $| P(\{Y_n\} < x) - x | \leq 2\sqrt{\frac{2}{n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Montrer que la suite $(\{Y_n\})_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi uniforme sur [0,1[.

II Répartition des valeurs dans une table numérique

Henri Poincaré (1854-1912) a proposé au début du 20ème siècle une façon originale d'étudier la répartition des valeurs d'une table numérique en montrant que pour un bon choix d'une fonction F de période assez grande par rapport à l'incrémentation des valeurs de la table, la moyenne des valeurs prises par F sur la table sera petite, ce qui indique une certaine forme d'équilibre dans la répartition de ces valeurs.

Poincaré considère l'exemple des valeurs d'une table de logarithmes

$$z_n = \ln\left(1 + \frac{n}{100.000}\right)$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots, 10.000$ et pose $F(y) = \sin(1000.\pi.y)$, fonction de période $\frac{1}{500}$, grande par rapport à l'incrémentation $\frac{1}{100.000}$ dans la table. Il s'intéresse à la moyenne des valeurs de F sur la table, c'est-à-dire à

$$S = \frac{1}{10.000}\sum_{k=1}^{10.000} F(z_k),$$

et désire montrer que cette valeur est petite.

Posons

$$J = \frac{1}{10.000}\int_{1/2}^{10.000+1/2} F\left(\ln(1 + \frac{x}{100.000})\right) dx.$$

6)

(a) Soit φ une fonction de classe C^2 sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $u \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, $| \varphi''(u) | \leq M$.

Montrer que pour $n \in I\!N^*$ et $| h | \leq \frac{1}{2}$, on a

$$-\frac{M}{8} \leq \varphi(n+h) - \varphi(n) - h.\varphi'(n) \leq \frac{M}{8}.$$

(b) Déduire que pour tout $n \in I\!N^*$,

$$-\frac{M}{8} \leq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \varphi(x)dx - \varphi(n) \leq \frac{M}{8}.$$

7) On pose $\varphi(x) = \sin\left(1000.\pi.\ln(1 + \frac{x}{100.000})\right)$.

(a) Calculer φ''.

(b) Montrer que pour tout $u \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, on a

$$| \varphi''(u) | < \frac{\pi^2}{(100)^2} + \frac{\pi}{1000.(100)^2}.$$

Dans la suite, on admettra que $\dfrac{\pi^2}{(100)^2} + \dfrac{\pi}{1000.(100)^2} < 0,001$.

(c) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}^*$ le réel $\varphi(k)$ en fonction de F et de z_k puis montrer que

$$J - S = \frac{1}{10.000} \sum_{k=1}^{10.000} \left(\int_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi(x)dx - \varphi(k) \right)$$

(d) Déduire que $\mid J - S \mid < 0,001$

8)

(a) Montrer que

$$J = 10. \int_{\ln(1+\frac{1}{200.000})}^{\ln(1+\frac{10.000}{100.000}+\frac{1}{200.000})} \sin(1000.\pi.u)\mathrm{e}^u du.$$

(b) Soient a, b, ω des réels tels que $0 < a < b$ et $\omega > 0$.

i) Montrer que $\left| \int_{\ln a}^{\ln b} \cos(\omega u) e^u du \right| \leq b - a$.

ii) À l'aide d'une intégration par parties et de l'inégalité précédente montrer

$$\left| \int_{\ln a}^{\ln b} \sin(\omega u) e^u du \right| \leq \frac{2b}{\omega}$$

(c) Déduire de la question précédente que $\mid J \mid < \frac{1}{100}$.

(d) Conclure que $\mid S \mid < \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$.

III Sur les nombres normaux

Dans cette partie, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.

On commence par rappeler les deux points de théorie suivants.

(i) Pour toute suite d'événements $(C_k)_{k \in I\!N}$ dans Ω, on a $P(\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(C_k)$ avec la convention que cette série vaut $+\infty$ si elle diverge.

(ii) Si $(C_k)_{k \in I\!N}$ est une suite décroissante d'événements dans Ω, au sens où $\forall k \geq 0, C_k \supset C_{k+1}$, on a $P(\bigcap_{k \geq 0} C_k) = \lim_{k \to +\infty} P(C_k)$

On rappelle aussi l'*inégalité de Markov* : si Z est une variable aléatoire positive admettant une espérance $E(Z)$, pour tout $\alpha > 0$, on a $P(Z > \alpha) \leq \dfrac{E(Z)}{\alpha}$.

On considère ici le tirage au sort d'un nombre réel entre 0 et 1 qu'on modélise de la façon suivante : $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Les $(X_n)_{n \geq 1}$ représentent les décimales du nombre tiré au hasard c'est-à-dire que ce nombre est $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{X_k}{10^k}$.

On définit enfin pour tout $k \geq 1$ une variable aléatoire Y_k à valeurs 0 ou 1 par $Y_k = 1$ si $X_k = 1$ et $Y_k = 0$ si $X_k \neq 1$.

9)

(a) Montrer que les variables Y_k sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.

(b) Déterminer $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Par conséquent, $\dfrac{S_n}{n}$ représente la fréquence des 1 dans la suite des décimales du nombre tiré.

(c) Calculer $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$ en fonction de n.

(d) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2}$.

(e) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

On va dans la suite améliorer ce résultat en montrant qu'en fait pour la plupart des nombres réels, la fréquence des 1 dans leurs décimales vaut 1/10.

10) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

(a) On pose $A = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Montrer que A est l'ensemble des ω qui appartiennent à une infinité d'événements A_k.

(b) On pose, pour tout $N \geq 1$, $B_N = \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$. Montrer que $\forall N \geq 0, B_N \supset B_{N+1}$.

(c) Déduire que $\lim_{N\to+\infty} P(B_N) = P(A)$.

(d) On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$.

i) Que vaut $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N}^{\infty} P(A_k)$?

ii) Conclure que $P(A) = 0$.

11) On pose, pour tout $k \geq 1$, $Y'_k = Y_k - \frac{1}{10}$.

(a) Montrer que $\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y'_k$.

(b) Montrer que les variables Y'_k sont indépendantes, d'espérance nulle et telles que $| Y'_k | \leq 1$.

(c) Montrer que $E[(\sum_{k=1}^{n} Y'_k)^4] \leq n + 3n(n-1)$.

(d) Déduire que

$$E\left((\frac{S_n}{n} - \frac{1}{10})^4\right) \leq \frac{3}{n^2}.$$

(e) On pose, pour $k \geq 1$, $A_k = \left((\frac{S_k}{k} - \frac{1}{10})^4 > \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $P(A_k) \leq \frac{3}{k^{3/2}}$.

(f) Déduire que $\sum_{k\geq 1} P(A_k)$ est une série convergente.

(g) On considère l'événement $A = \{\omega \in \Omega, (\frac{S_k(\omega)}{k} - \frac{1}{10})^4 > \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour une infinitéde $k\}$. Montrer que $P(A) = 0$.

(h) Déduire qu'avec probabilité 1, on peut trouver N tel que pour tout $k \geq N$, $| \frac{S_k}{k} - \frac{1}{10} | \leq \frac{1}{\sqrt[8]{k}}$.

(i) Conclure qu'avec probabilité 1, on a $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{S_k}{k} = \dfrac{1}{10}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1230 – D'après documents fournis