BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
287
ESSECM2_E

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 10 mai 2006, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les deux problèmes sont totalement indépendants, le premier est consacré aux lois de probabilité et variables aléatoires discrètes. Dans le second on manipule au contraire des lois de probabilité et des variables aléatoires continues.

Notations: si a et b sont deux nombres réels, on désigne par $a \wedge b$ le plus petit de ces deux nombres. Tout au long du sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées plus bas seront toutes définies sur cet espace probabilisé. Sous réserve de son existence, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X sera notée $E(X)$.

Problème 1 (Distance en variation et couplage)

Partie I (Distance en variation)

Dans cette première partie on considère un ensemble discret $\mathcal{K}$ dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{K}$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans $\mathcal{K}$.

Soient P et Q deux lois de probabilité sur $\mathcal{K}$. Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que $p_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$ avec $\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k = 1$. De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k\in\mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum_{k\in A} p_k$.

Lorsque $\mathcal{K}$ est fini on définit la **distance en variation** entre les probabilités P et Q par

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k|. \tag{i}$$

I. 1) Lorsque $\mathcal{K}=\{0,1\}$, exprimer $D(P,Q)$ en fonction de p_1 et q_1.
I. 2) Lorsque $\mathcal{K}=\mathbb{N}$, vérifier que la série de terme général $(|p_k - q_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.
On étend donc la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K}=\mathbb{N}$.
I. 3) Vérifier que $|P(A) - Q(A)| \in [0,1]$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.
I. 4) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

I. 5) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P,Q). \tag{ii}$$

I. 6) Montrer que la partie $A_0 = \{k \in \mathcal{K} : q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans (ii), c'est à dire que

$$|P(A_0) - Q(A_0)| = D(P,Q).$$

I. 7) Démontrer la formule

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}}(p_k \wedge q_k).$$

I. 8) On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que X soit de loi P et Y soit de loi Q. Autrement dit, pour tout $k \in \mathcal{K}$

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k \text{ et } \mathbb{P}(Y = k) = q_k.$$

Montrer que $D(P,Q) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Partie II (Couplage binomiale-Poisson)

Soit n un entier strictement positif et λ un réel strictement positif, strictement plus petit que n. L'objet de cette deuxième partie est d'étudier un exemple: l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson en terme de **distance en variation**. Plus précisément, si d'une part $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et λ/n et si d'autre part on note $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ, le but est de prouver la majoration suivante:

$$D(\mathcal{B}(n,\lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n} \tag{iv}$$

où D est définie au (i).

II. 1) Soit $Y_1, ..., Y_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n, donner sans démonstration la loi de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

II. 2) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$

$$f(x) = 1 - (1-x)\exp(x)$$

appartient à $[0,1]$.

Soit $U_1, ..., U_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$. On suppose que les variables $U_1, ..., U_n$ sont indépendantes des variables $Y_1, ..., Y_n$ de la question II. 1). Pour $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.

II. 3) Vérifier que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n et donner la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.

II. 4) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

(On pourra établir que pour tout x réel $1 + x \leq \exp(x)$).

II. 5) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right).$$

II. 6) En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n},$$

puis conclure quant à (iv).

II. 7) Quel résultat connu peut-on déduire de (iv) lorsque n tend vers l'infini?

Problème 2 (Couplage exponentielle-normale)

Dans ce problème X désigne une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite, φ sa densité de probabilité et Φ sa fonction de répartition. On note par ailleurs f la densité de la loi exponentielle de paramètre égal à 1. On définit également pour tout nombre réel x, $g(x) = -\ln(1 - \Phi(x))$ puis $Y = g(X)$.

On admettra que X admet des moments de tout ordre, ce qui signifie que pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varphi(x)\, dx$ converge.

Partie I (Quantiles gaussiens)

On démontre dans cette partie des résultats utiles pour la partie II.

I. 1) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ dont on notera Φ^{-1} l'application réciproque.

I. 2) Calculer la fonction de répartition de Y puis constater que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

I. 3) a) Vérifier la validité de l'identité suivante

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \text{ pour tout } x > 0.$$

b) En déduire l'encadrement

$$1-\frac{1}{x^2}\leq \frac{x\left(1-\Phi\left(x\right)\right)}{\varphi\left(x\right)}\leq 1 \text{ pour tout } x>0. \tag{E}$$

Indication pour la minoration: On pourra montrer tout d'abord que $\int_x^{+\infty} t^{-2}\varphi\left(t\right)dt \leq x^{-3}\int_x^{+\infty} t\varphi\left(t\right)dt$.

c) Montrer l'équivalence

$$1-\Phi\left(x\right)\sim_{x\to+\infty}\frac{\varphi\left(x\right)}{x}.$$

d) En utilisant (E) énoncée à la question I. 3)*b*), montrer que pour tout $x>1$

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\leq \ln\left(x\right)-g\left(x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right)+\frac{x^2}{2}\leq 0$$

et en déduire l'équivalence

$$g\left(x\right)\sim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}.$$

Partie II (Inégalité de transport)

On définit une application h sur $[0,+\infty[$ par: $h\left(t\right)=t\ln\left(t\right)-t+1$ pour $t>0$ et $h\left(0\right)=1$.

II. 1) Vérifier que h est une application continue de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.

Sous réserve qu'elle converge, on note $K\left(f,\varphi\right)$ la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)dx$. On désire vérifier l'inégalité (dite de transport) suivante

$$E\left(\left(X-Y\right)^2\right)\leq 2K\left(f,\varphi\right). \tag{v}$$

II. 2) Montrer que g est une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel calculer $g'\left(x\right)$ et vérifier l'identité $g'\left(x\right)f\left(g\left(x\right)\right)=\varphi\left(x\right)$.

II. 3) Vérifier que l'intégrale définissant $K\left(f,\varphi\right)$ converge et montrer que

$$K\left(f,\varphi\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\ln\left[f\left(g\left(x\right)\right)/\varphi\left(g\left(x\right)\right)\right]dx.$$

II. 4) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\left(x-g\left(x\right)\right)^2dx$ converge et justifier l'égalité suivante:

$$E\left(\left(X-Y\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\left(x-g\left(x\right)\right)^2dx.$$

II. 5) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\left(1-g'\left(x\right)\right)dx$ converge.

II. 6) Démontrer que

$$K\left(f,\varphi\right)\geq\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\ln\left[\varphi\left(x\right)/\varphi\left(g\left(x\right)\right)\right]dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)\left(-g'\left(x\right)+1\right)dx.$$

(On pourra utiliser en la justifiant l'inégalité $\ln\left(u\right)\leq u-1$, pour tout u réel strictement positif).

II. 7) Conclure grâce à une intégration par parties que l'on justifiera soigneusement.