ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option économique

MATHÉMATIQUES II

Jeudi 6 mai 2004 de 8h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations sur E_n. Pour tout ensemble fini A, on note $\mathrm{card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k, le nombre $\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On rappelle enfin la formule de Poincaré, sous sa forme ensembliste : soit A un ensemble de cardinal fini, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, des sous-ensembles de A. Alors

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Partie I

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{card}(\Omega)$.

Pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in E_n$ et pour tout $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$

$$\mathrm{card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = (n-k)!$$

En déduire, pour tout $k \in E_n$, la valeur de

$$s_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

ESSEC MBA
AVENUE BERNARD HIRSCH - BP 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL. : 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01
WEB : WWW.ESSEC.FR

ESSEC
ÉTABLISSEMENT PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
RECONNU PAR L'ÉTAT, MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST
agir en pionnier

ESSEC BUSINESS SCHOOL
ÉTABLISSEMENTS PRIVÉS D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
ASSOCIATION LOI 1901,
ACCRÉDITÉS AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION
FOR MANAGEMENT EDUCATION,
ACCRÉDITÉS EQUIS - THE EUROPEAN QUALITY IMPROVEMENT SYSTEM
AFFILIÉS À LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE
DE VERSAILLES VAL D'OISE - YVELINES.

3. On note

$$D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n,\ \omega(i) \neq i\}$$

a) Montrer que

$$d = \text{card}(D_{n,0}) = n! - \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

Pour tout $k \in E_n$, on appelle $D_{n,k}$ l'ensemble formé des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ et tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on a $\omega(i_j) = i_j$, et pour tout $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, on a $\omega(\ell) \neq \ell$.

b) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = \text{card}(D_{n,k}) = \binom{n}{k} \text{card}(D_{n-k,0})$$

c) Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$d_k = s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \binom{k+2}{k} s_{k+2} + \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s_n$$

4. On pose $d_0 = s_0 = 0$.

a) Écrire la matrice du système d'équations qui donne $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ en fonction de $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$.

b) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, donner l'expression de l'endomorphisme représenté, dans la base canonique, par cette matrice.

c) En déduire que cet endomorphisme est inversible en exprimant son inverse.

d) En déduire la relation qui lie $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ à $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$.

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b Euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B Euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, sont compris entre 1 et n et choisis «au hasard».

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le «coût» d'une telle campagne.

Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme discrète P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la question I. 3, déterminer la loi de X_n.

b) Établir les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$$

(on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$X_n = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \cdots + 1_{A_n}$$

et en déduire l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

3. a) Montrer que

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} 1_{A_i \cap A_j}$$

b) En déduire la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

4. a) Montrer que le coût aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n$$

En déduire le coût moyen $E(C_n)$, ainsi que le *risque* donné par l'écart type $\sigma(C_n)$.

b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

5. Montrer que le gain d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par

$$G_n = BY_n - b$$

où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli de paramètre $1/n$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

2. Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leqslant \frac{2}{m!}$$

(on remarquera que pour tout $k \geqslant 1$, $m(m+1) \cdots (m+k-1) \geqslant m^k$)

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k+1)!} \leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

5. On considère les instructions Pascal suivantes :

```
eps := 0.00001 ;
x := 2 ;
k := 2 ;
While x > eps/2 do
  begin
  x := x*(2/k) ;
  k := k+1
  end ;
writeln(k)
```

a) On entre dans la boucle While avec $x = 2$. On suppose qu'on est passé $j \geqslant 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ est décroissante et admet une limite que l'on calculera.

c) En déduire que la boucle While ci-dessus se termine.

d) La valeur affichée par la dernière ligne est 11. Que représente-t-elle ?

Partie IV

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ, $(\ell \geqslant 1)$, exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$.

On note Y_n^ℓ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces ℓ exemplaires achetés.

1. On rappelle que pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \cdots + 1_{A_{j_\ell}}$$

En déduire l'espérance $E(Y_n^\ell)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

2. a) Montrer que

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}} + \sum_{1 \leqslant i \neq k \leqslant \ell} 1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}$$

b) En déduire la variance de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

3. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\ell$.

b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.

c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?