**Q1)** Notons que $T(1) = 3\cdot 1^3 - 1^2 - 1 - 1 = 0$ donc que 1 est racine de $T$.

$T(X) = (X^3 - X^2) + (X^3 - X) + (X^3 - 1) = (X-1)X^2 + (X-1)X(X+1) + (X-1)(X^2+X+1)$.

$T(X) = (X-1)(X^2+X^2+X+X^2+X+1)$.

$T(X) = (X-1)(3X^2+2X+1)$.

Le discriminant réduit du trinôme $3X^2+2X+1$ est : $1-3=-2$ ; ainsi $3X^2+2X+1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

<u>1 est la seule racine réelle de $T$.</u>

Les racines non réelles de $T$ sont les racines de $3X^2+2X+1$ c'est à dire

$\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$. Leur somme est $-\dfrac{2}{3}$ et leur produit $\dfrac{1}{3}$.

"$-\dfrac{b}{a}$" "$\dfrac{c}{a}$"

Ainsi $\underline{\alpha+\bar{\alpha} = -\dfrac{2}{3} \text{ et } \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{1}{3}}$.

**Q2)** a) Soit $A$ un élément de $\mathbb{C}[X]$ et $B$ un élément <u>non nul</u> de $\mathbb{C}[X]$.

Il existe un couple $(Q,R)$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ et un seul tel que :

$$\begin{cases} A = QB+R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

b) Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$ et soit $(P_1,P_2)$ un couple d'éléments de $\mathbb{C}[X]$.

$\exists!(Q_1,R_1)\in\mathbb{C}[X]^2$, $P_1 = Q_1T+R_1$ et $\deg R_1 < \deg T$. $R_1 = \varphi(P_1)$.

$\exists!(Q_2,R_2)\in\mathbb{C}[X]^2$, $P_2 = Q_2T+R_2$ et $\deg R_2 < \deg T$. $R_2 = \varphi(P_2)$.

Alors 1° $\lambda P_1+P_2 = (\lambda Q_1+Q_2)T + \lambda R_1+R_2$

2° $\lambda Q_1+Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda R_1+R_2 \in \mathbb{C}[X]$

3° $\deg(\lambda R_1+R_2) < \deg T$ car $\deg R_1 < \deg T$ et $\deg R_2 < \deg T$.

Ainsi $\lambda R_1+R_2$ est le reste dans la division de $\lambda P_1+P_2$ par $T$.

Alors $\varphi(\lambda P_1+P_2) = \lambda R_1+R_2$ or $\lambda R_1+R_2 = \lambda\varphi(P_1)+\varphi(P_2)$.

Donc $\varphi(\lambda P_1+P_2) = \lambda\varphi(P_1)+\varphi(P_2)$.

Ceci achève de prouver que $\varphi$ est linéaire.

· Par définition $\varphi$ est une application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

c... le reste dans la division de T par T est $0_{\mathbb{C}[X]}$ ; $T \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $T \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.
$\varphi$ n'est pas injectif. En fait $\operatorname{Ker}\varphi = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid T \text{ divise } P\}$.
. $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg \varphi(P) < \deg T \leq 3$ ; $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_2[X]$.
Ainsi $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{C}_2[X]$ ; $\operatorname{Im}\varphi \neq \mathbb{C}[X]$.
$\varphi$ n'est pas surjectif. En fait $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}_2[X]$.

Q3 a) Rappelons que $L_1$, $L_2$ et $L_3$ sont des éléments de $\mathbb{C}_2[X]$.
Soit $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $a'L_1 + b'L_2 + c'L_3 = 0_{\mathbb{C}[X]}$.
$(a'L_1 + b'L_2 + c'L_3)(1) = 0$ ; $c'L_3(1) = 0$ car $L_1(1) = L_2(1) = 0$.
Or $L_3(1) = (1-\alpha)(1-\bar{\alpha}) \neq 0$ ; ainsi $c' = 0$.

En utilisant $\alpha$ (resp. $\bar{\alpha}$) on montre de la même manière que $b' = 0$ (resp. $a' = 0$).
$\forall (a', b', c') \in \mathbb{C}^3$, $a'L_1 + b'L_2 + c'L_3 = 0_{\mathbb{C}[X]} \Rightarrow a' = b' = c' = 0$.
$(L_1, L_2, L_3)$ est alors une famille libre de $\mathbb{C}_2[X]$. Comme $\mathbb{C}_2[X]$ est de dimension 3 et que $(L_1, L_2, L_3)$ est une famille de cardinal 3, $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b) $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_2[X]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^n) \in \mathbb{C}_2[X]$. Comme $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!\, (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{C}^3$, $\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\exists Q_n \in \mathbb{C}[X]$, $X^n = Q_n T + \varphi(X^n) = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

Rappelons que $1$, $\alpha$ et $\bar{\alpha}$ sont les racines de T.

Alors $1^n = Q_n(1)T(1) + a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = c_n L_3(1) = c_n(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})$

Ainsi $c_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})}$.

En utilisant $\alpha$ et $\bar{\alpha}$ on obtient de la même manière $b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})}$

et $a_n = \dfrac{\bar{\alpha}^n}{(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{\bar\alpha^n}{(\bar\alpha-1)(\bar\alpha-\alpha)}$ , $b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\bar\alpha)}$ et $c_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\bar\alpha)}$.

$(1-\alpha)(1-\bar\alpha) = 1-(\alpha+\bar\alpha)+\alpha\bar\alpha = 1-\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3} = 2$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{1}{2}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $X^n = Q_n T + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n = Q_n(f)\circ T(f) + a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$

Or $T(f)=\theta$ donc $Q_n(f)\circ T(f)=\theta$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

d) $\alpha\bar\alpha = \frac{1}{3}$ ; $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\bar\alpha^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{2}$.

Les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers les réels $0, 0, \frac{1}{2}$.

Q4 a) $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f) = \frac{1}{2}L_3(f)$.

$L_3(X) = (X-\alpha)(X-\bar\alpha) = X^2-(\alpha+\bar\alpha)X + \alpha\bar\alpha = X^2+\frac{2}{3}X+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3X^2+2X+1)$.

Alors $h = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(3f^2+2f+Id_E)$. $h = \frac{1}{6}(3f^2+2f+Id_E)$.

Voir également p 8'

b) $h\circ h = \frac{1}{36}(3f^2+2f+Id_E)\circ(3f^2+2f+Id_E) = \frac{1}{36}(9f^4+6f^3+3f^2+6f^3+4f^2+2f$

$+3f^2+2f+Id_E) = \frac{1}{36}(9f^4+12f^3+10f^2+4f+Id_E)$.

$3f^3 = f^2+f+Id_E$ et $9f^4 = 3f^3+3f^2+3f = f^2+f+Id_E+3f^2+3f = 4f^2+4f+Id_E$.

Alors $h^2 = \frac{1}{36}(4f^2+4f+Id_E+4f^2+4f+4Id_E+10f^2+4f+Id_E) = \frac{1}{36}(18f^2+12f+6Id_E) = h$.

$h\in\mathcal{L}(E)$ et $h\circ h = h$ ; $h$ est un projecteur.

# EXERCICE 2

2.1.1 Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1]$, $(t-1)^2\geq 0$ ; $\forall t\in[0,1]$, $t^2+1-2t\geq 0$.

$\forall t\in[0,1], 0\leq t\leq \frac{1+t^2}{2}$ ; $\forall t\in[0,1]$, $0\leq t^n\leq\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.

En intégrant il vient : $\int_0^1 t^n dt\leq a_n$ ; $\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\leq a_n$ ; $\frac{1}{n+1}\leq a_n$.

$\forall t\in[0,1]$, $t^2\leq t$ ; $\forall t\in[0,1]$, $0\leq\frac{t^2+1}{2}\leq\frac{t+1}{2}$.

$\forall t\in[0,1]$, $0\leq\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^n\leq\frac{(t+1)^n}{2^n}$.

En intégrant il vient : $a_n\leq\frac{1}{2^n}\int_0^1(t+1)^n dt=\frac{1}{2^n}\left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2^n}\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

$a_n\leq\frac{1}{2^n}\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\leq\frac{2^{n+1}}{2^n(n+1)}=\frac{2}{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1}\leq a_n\leq\frac{2}{n+1}$.

2.1.2 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1}\leq a_n$. La série de terme général $\frac{1}{n+1}$ étant divergente, les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la divergence de la série de terme général $a_n$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x|=1\Rightarrow|u_n(x)|=|a_n x^n|=|a_n||x|^n=a_n$

Ainsi si x est un réel vérifiant $|x|=1$ : la série de terme général $u_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

2.1.3 Soit $x\in\mathbb{R}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{|x|^n}{n+1}\leq a_n|x|^n\leq\frac{2}{n+1}|x|^n$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{|x|^n}{n+1}\leq|u_n(x)|\leq\frac{2}{n+1}|x|^n\leq|x|^n$.

1^er cas : $|x|<1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq|u_n(x)|\leq|x|^n$.

La convergence de la série de terme général $|x|^n$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|u_n(x)|$.

2ème cas .. $|x| \geqslant 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \geqslant \frac{|x|^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0$.

La divergence de la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la divergence de la série de terme général $|u_n(x)|$... on pouvait également remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ pour $|x|>1$.

Finalement la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $|x|<1$.

2.2 Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.

2.2.1 . Supposons $x$ dans $[0,1[$.

$-xt^2 \geqslant -x$ $\quad \begin{cases} 2 \geqslant 3/2 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

$\forall t \in [0,1]$, $xt^2 \leq x$ ; $\forall t \in [0,1]$, $2 - x - xt^2 \geqslant 2 - 2x = 2(1-x) \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$

. Supposons $x$ dans $[-1,0[$.

$\forall t \in [0,1]$, $-xt^2 \geqslant 0$ ; $\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant 2-x$

$\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant 2-x = \frac{3}{2}(1-x) + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$

Finalement : $\forall x \in [-1,1[, \forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$.

2.2.2 $x$ est élément de $[-1,1[$. $\forall t \in [0,1]$, $2-x-xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x) > 0$.

Alors $t \mapsto 2-x-xt^2$ est continue et non nulle sur $[0,1]$.

Ainsi $t \mapsto \frac{2}{2-x-xt^2}$ est continue sur $[0,1]$.

Alors pour tout $x$ dans $[-1,1[$, $\int_0^1 \frac{2\,dt}{2-x-xt^2}$ existe.

2.2.3 $x \in [-1,1[$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt\ x^k.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left(x\left(\frac{1+t^2}{2}\right)\right)^k dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{1-\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x(1+t^2)}{2}}\, dt.$$

$\frac{1+t^2}{2}x \neq 1$ car $0 < \frac{1+t^2}{2} \leq 1$ et $x < 1$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \int_0^1 \frac{2\left(1-\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}\right)}{2-x-xt^2}\, dt = f(x) - 2\int_0^1 \frac{\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{2-x-xt^2}\, dt$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| = \left|2\int_0^1 \frac{\left(\frac{x(1+t^2)}{2}\right)^{n+1}}{2-x-xt^2}\, dt\right| \leq 2\int_0^1 \frac{\left|\frac{x(1+t^2)}{2}\right|^{n+1}}{2-x-xt^2}\, dt$$

$\forall t\in[0,1],\ 2-x-xt^2 \geq \frac{3}{2}(1-x) > 0$. $\forall t\in[0,1],\ 0 \leq \frac{1}{2-x-xt^2} \leq \frac{2}{3}\frac{1}{1-x}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \frac{2}{3}\frac{1}{1-x}2\int_0^1 |x|^{n+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)}\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} dt = \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)}a_{n+1} \leq \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)}\frac{2}{n+2}.$$

Ainsi $\forall x\in[-1,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$.

4. $0 \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq \frac{8}{3(n+2)(1-x)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[-1,1[$.

Par encadrement à droite $\lim_{n\to+\infty} \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} = 0$ ... pour tout $x\in[-1,1[$.

Toujours par encadrement : $\lim_{n\to+\infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right) = 0$ pour tout $x$ dans $[-1,1[$.

Alors $\forall x\in[-1,1[,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = f(x)$.

Pour tout $x$ dans $[-1,1[$, la série de terme général $u_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$

5. $a_0 = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^0 dt = \int_0^1 1\,dt = 1.$ $\qquad \underline{\underline{a_0 = 1.}}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1} dt \underset{4}{=} \left[t\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t \times (k+1) \times t \times \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt.$

IPP avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}$

$a_{k+1} = 1 - (k+1)\int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 1 - 2(k+1)\int_0^1 \left(\frac{t^2+1}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt$

$a_{k+1} = 1 - 2(k+1)\left(a_{k+1} - \frac{1}{2}a_k\right) = 1 - 2(k+1)a_{k+1} + (k+1)a_k.$

Alors $\left(2(k+1)+1\right)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$

$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \quad (2k+3)\,a_{k+1} = 1 + (k+1)\,a_k.}}$

6. Soit $x \in [-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à $\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$ près.

Donc $\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à $10^{-p}$ près dès que

$\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq 10^{-p}$ ou dès que $\underline{\frac{|x|^{n+1}}{n+2} \leq \frac{3}{8}(1-x)\,10^{-p}}$ ou $|x|^{n+1} \leq \frac{3}{8}(1-x)10^{-p}(n+2)$

Rappelons nous avons remarqué que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+2} = 0.$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; u_k(x) = a_k x^k = \frac{1 + k a_{k-1}}{2k+1} x^k. \quad u_0(x) = a_0 = 1.$

Le programme s'écrit alors sans difficulté. Voir p 8'

décomposition en él. simples

• $x\in ]0,1[$. $f(x)=\int_0^1 \frac{2\,dt}{2-x-xt^2} = -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right)^2} \overset{\downarrow}{=} -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}-\frac{1}{t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right)dt.$

$$f(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\left[\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{t+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right|\right]_0^1 = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{2-x}{x}}}{1+\sqrt{\frac{2-x}{x}}}\right| = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right).$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\ln\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2}{2-x-x}\right]=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{x+2-x+2\sqrt{x(2-x)}}{2-2x}\right).$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right).$$

• $x\in[-1,0[$. $f(x)=\int_0^1 \frac{2\,dt}{2-x-xt^2} \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}} \frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{2-x-x\,\frac{x-2}{x}u^2}\,du = \frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{2-x}\int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\frac{du}{1+u^2}.$

$\left[\begin{array}{l} u=\sqrt{\frac{x}{x-2}}\ t \\ \text{car } 2-x-xt^2=-x\left(t^2+\frac{x-2}{x}\right)\ldots \end{array}\right.$

$$f(x)=2\sqrt{\frac{2-x}{-x}}\,\frac{1}{2-x}\int_0^{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

Finalement : $\forall x\in[-1,0[$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ , $f(0)=1$ et

$\forall x\in]0,1[$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right)$.

<u>Exercice</u> Montrer que le domaine de définition de $g: x\longmapsto \int_0^1\frac{2\,dt}{2-x-xt^2}$ est $]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[$.

Montrer que $\forall x\in D_g$, $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{si } x\in]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[ \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x(2-x)}}{1-x}\right) & \text{si } x\in]0,1[ \end{cases}$

```
program ECRICOME_2002;

var p,k:integer;x,puis,s,a,stop:real;

begin
write('Donnez la valeur de x. x=');readln(x);
write('Donnez la valeur de p. p=');readln(p);

stop:=3*(1-x)/exp(p*ln(10))/8;

puis:=1;a:=1;s:=1;k:=0;

while (abs(puis)*abs(x)>=(k+2)*stop) do
      begin
      k:=k+1;
      a:=(1+k*a)/(k+k+1);
      puis:=puis*x;
      s:=s+puis*a;
      end;

writeln('Une valeur approchée est : ', s,' Elle obtenue pour k=',k);


if x>0 then begin
            s:=sqrt((2-x)*x);
            writeln('La valeur exacte est : ', 1/s*ln((1+s)/(1-x)));
            end
       else if x=0 then writeln('La valeur exacte est 1.')
                   else writeln('Valeur exacte : ',
                        2/sqrt(x*(x-2))*arctan(sqrt(x/(x-2))));

end.
```

## Une remarque sur l'exercice 1 et un complément sur l'exercice 2

**Ex 1** Q4 b), c'est à dire $h \circ h = h$, peut se faire sans calcul.
$h = \frac{1}{2}L_3(f)$. Notons que $T = X(X-1)L_3$. Ainsi $3(f-Id_E)\circ L_3(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou $(f-Id_E)\circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ! Alors $f\circ h = h$. Une récurrence simple donne alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ h = h$. Il est alors aisé de voir que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f)\circ h = h$. En posant $P = L_3$ on obtient $h \circ h = h$.

**Ex 2** Il est finalement assez facile de calculer $\int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\,dt$ en distinguant trois cas.

- $x = 0$ . $f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$ .

# PROBLÈME

## 3.1 Propriétés de la relation de préférence.

1. a) $\forall (x,y) \in B,\ u(x,y) \geq u(x,y)$ !

Pour tout $(x,y)$ dans $B$, $(x,y)$ est préféré ou indifférent à $(x,y)$.

b) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B, \forall (x'',y'') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ et $u(x',y') \geq u(x'',y'') \Rightarrow u(x,y) \geq u(x'',y'')$

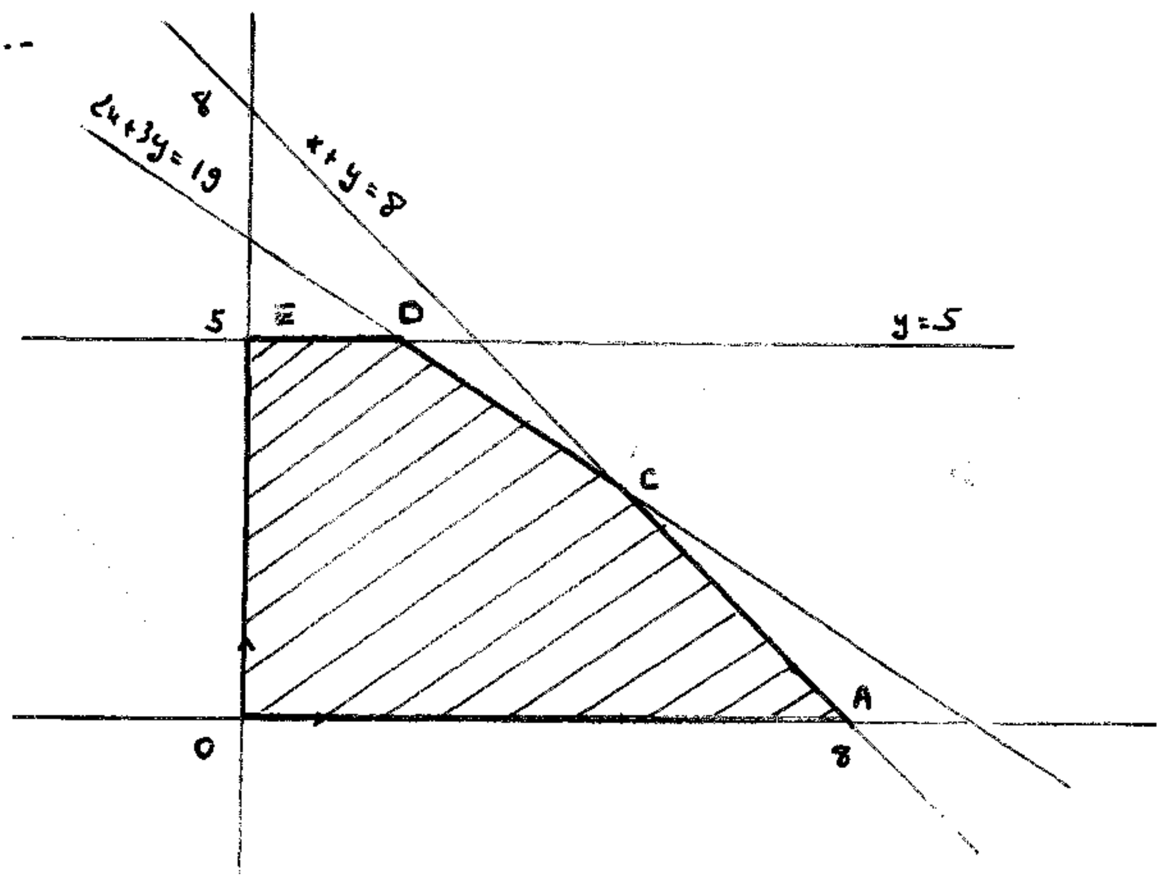
Si $(x,y), (x',y'), (x'',y'')$ sont trois éléments de $B$ tels que $(x,y)$ est préféré ou indifférent à $(x',y')$ et $(x',y')$ est préféré ou indifférent à $(x'',y'')$ alors $(x,y)$ est préféré ou indifférent à $(x'',y'')$.

c) $\forall (x,y) \in B, \forall (x',y') \in B,\ u(x,y) \geq u(x',y')$ ou $u(x',y') \geq u(x,y)$ !

Si $(x,y)$ et $(x',y')$ sont deux éléments de $B$, $(x,y)$ est préféré ou indifférent à $(x',y')$ ou $(x',y')$ est préféré ou indifférent à $(x,y)$.

## 3.2 Courbes d'indifférence

1. -



Notons que les droites d'équations $x+y=8$ et $2x+3y=19$ (resp. $2x+3y=19$ et $y=5$) se coupent au point C (resp. D) de coordonnées $(5,3)$ (resp. $(2,5)$).

Ainsi les cinq sommets du polygone constituant le bord de B sont les points O, A, C, D, E de coordonnées $(0,0)$, $(8,0)$, $(5,3)$, $(2,5)$, $(0,5)$.

2.-a) Soit $(x,y) \in A_m$.
$u(x,y)=m \iff (y-3)e^{x+2}=m \iff y-3=m e^{-(x+2)} \iff y=m e^{-(x+2)}+3$.

La fonction $f_m$ telle que, pour tout élément $(x,y)$ de $A_m$, $y=f_m(x)$ est $x \mapsto m e^{-(x+2)}+3$

b) $f_m : x \mapsto m e^{-(x+2)}+3$.

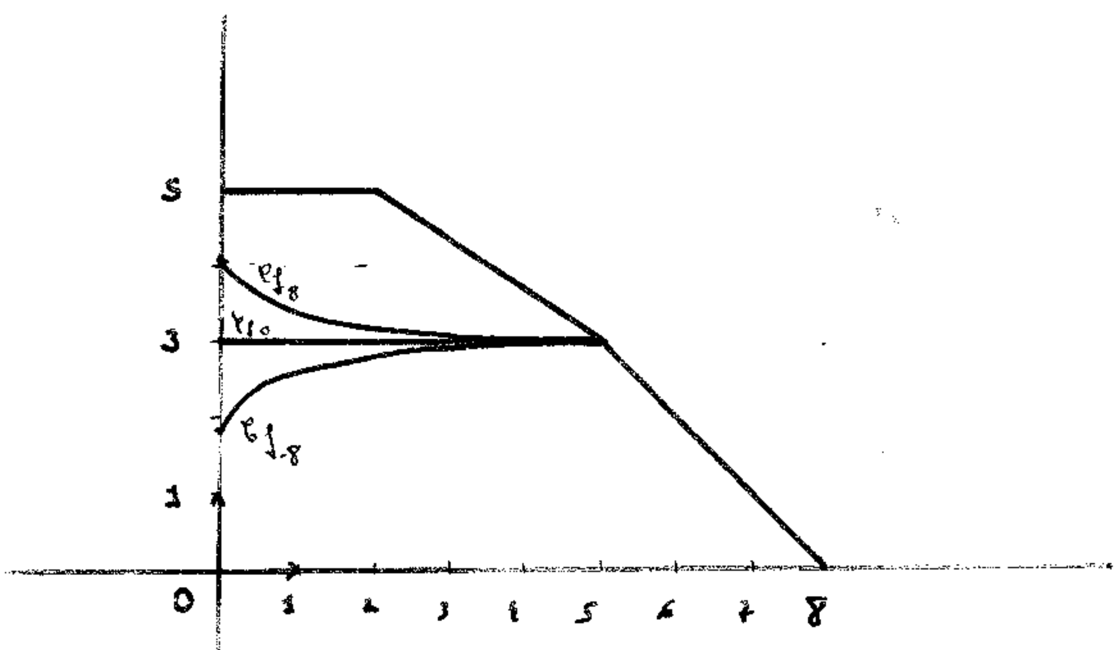
$f_0$ est constante et vaut 3. $f_8$ est décroissante sur $[0,8]$ et $f_{-8}$ est croissante sur $[0,8]$

$f_8(0)=8e^{-2}+3 \simeq 4,12$ ; $f_8(1)=8e^{-3}+3 \simeq 3,4$ ; $f_8(2)=8e^{-4}+3 \simeq 3,16$ ; $f_8(3)=8e^{-5}+3 \simeq 3,056$

$f_8(4)=8e^{-6}+3 \simeq 3,016$ ; $f_8(5) \simeq 8e^{-7}+3 \simeq 3,008$

De même $f_{-8}(0) \simeq 1,88$ ; $f_{-8}(1) \simeq 2,6$ ; $f_{-8}(2) \simeq 2,84$ ; $f_{-8}(3) \simeq 2,944$ ; $f_{-8}(4) \simeq 2,984$

$f_{-8}(5) \simeq 2,992$.



c. Soit $m$ un réel.

$T$ est tangente à la courbe représentative de $f_m$

$\Updownarrow$

$$\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = f_m(x) \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ f'_m(x) = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = m e^{-(x+2)} + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \\ -m e^{-(x+2)} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = \frac{2}{3} + 3 \\ x = \frac{1}{2}(19 - 3y) \\ m = \frac{2}{3} e^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = \frac{11}{3} \\ x = 4 \\ m = \frac{2}{3} e^{6} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3} e^{6}.$$

<u>Il existe un réel et un seul $m_0$ tel que la courbe représentative de $f_{m_0}$ soit tangente à la droite (T) d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$ ; $m_0 = \frac{2}{3} e^{6}$.</u>

Notons que dans ces conditions le point de " contact " est le point de coordonnées $(4, \frac{11}{3})$.

Voir la représentation graphique à la page précédente.

## 3.3 Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. Soit $(x,y)\in B$. $0 \le x$, $0 \le y \le 5$, $2x + 3y \le 19$ et $x + y \le 8$.

   $0 \le y \le 5$ et $0 \le x = 8 - y \le 8$ ; $|x| \le 8$ et $|y| \le 8$ !

   $\operatorname{Max}(|x|, |y|) \le 8$.

   Alors $B$ est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 8 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   Ainsi <u>$B$ est (fermé et) borné.</u>

2. $(x,y) \mapsto y - 3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \mapsto e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($(x,y) \mapsto x+2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$)

   Par produit $(x,y) \mapsto (y-3)e^{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $u$ est continue sur le fermé borné $B$. Alors $u$ possède un maximum sur $B$.

$\exists\ (x_0,y_0)\in B,\ \forall (x,y)\in B,\ u(x_0,y_0)\geq u(x,y)$.

<u>Réponse : il existe un couple $(x_0,y_0)$ de $B$ préféré ou indifférent à tous les couples $(x,y)$ de $B$.</u>

3. $\mathring{B}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u$ est de classe $C^1$ sur $\mathring{B}$ ( $(x,y)\mapsto y-3$ et $(x,y)\mapsto e^{x+2}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$).

Si $u$ possède un extremum local en un point $(x,y)$ de $\mathring{B}$ alors $\operatorname{grad} u(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$.

$\forall (x,y)\in\mathring{B},\ \operatorname{grad} u(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)=\left((y-3)e^{x+2},\ e^{x+2}\right)\neq(0,0)$.

Ainsi <u>$u$ n'admet pas d'extremum local sur $\mathring{B}$.</u>

Notons alors que $u$ atteint son maximum en un point de $B-\mathring{B}$ et que

$B-\mathring{B}=\{(x,y)\in B\mid x=0\}\cup\{(x,y)\in B\mid y=0\}\cup\{(x,y)\in B\mid y=5\}\cup\{(x,y)\in B\mid 2x+3y=19\}\cup\{(x,y)\in B\mid x+y=8\}$.

4. a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\in B \text{ et } 2x+3y=19 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ 0\leq x\\ 0\leq y\leq 5\\ x+y\leq 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ x\geq 0\\ 0\leq\frac{1}{3}(19-2x)\leq 5\\ x+\frac{1}{3}(19-2x)\leq 8\end{cases}$$

$$(x,y)\in B \text{ et } 2x+3y=19 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}(19-2x)\\ x\geq 0\\ 2\leq x\leq\frac{19}{2}=9{,}5\\ x\leq 24-19=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[2,5]\\ y=\frac{1}{3}(19-2x)\end{cases}$$

Pour $F_3=\{(x,y)\in B\mid 2x+3y=19\}=\{(x,y)\in\ \mid x\in[2,5] \text{ et } y=\frac{1}{3}(19-2x)\}$.

$$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=\max_{x\in[2,5]} u\left(x,\tfrac{1}{3}(19-2x)\right)=\max_{x\in[2,5]}\left(\tfrac{1}{3}(19-2x)-3\right)e^{x+2}=\max_{x\in[2,5]}\frac{10-2x}{3}e^{x+2}$$

<u>Chercher le maximum de $u$ sur $B$ sous la contrainte $2x+3y=19$ c'est</u>

chercher le maximum de $x\mapsto\frac{10-2x}{3}e^{x+2}$ sur $[2,5]$.

b. Posons $\forall x\in[2,5]$, $g(x)=\frac{1}{3}(10-2x)e^{x+2}$

$g$ est dérivable sur $[2,5]$ et $\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{1}{3}(-2+10-2x)e^{x+2}$

$\forall x\in[2,5]$, $g'(x)=\frac{2}{3}(4-x)e^{x+2}$.

$g$ est strictement décroissante sur $[4,5]$ et strictement croissante sur $[2,4]$.

Ainsi $g$ admet un maximum sur $[2,5]$ atteint une fois et une seule en $4$.

$\max\limits_{x\in[2,5]} g(x) = g(4)=\frac{2}{3}e^{6}$.

$\max\limits_{(x,y)\in F_1} u(x,y)=\frac{2}{3}e^{6}$ ; ce maximum est atteint en le seul point $(4,\frac{1}{3}(19-2\cdot4))=(4,\frac{11}{3})$.

5. • $F_2=\{(x,y)\in B \mid x+y=8\}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 0\le x \\ 0\le y\le 5 \\ 2x+3y\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 0\le x \\ 0\le 8-x\le 5 \\ 2x+24-3x\le 19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ 0\le x \\ 3\le x\le 8 \\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ \text{et} \\ 5\le x\le 8\end{cases}$$

$$\max_{(x,y)\in F_2} u(x,y) = \max_{x\in[5,8]} u(x,8-x) = \max_{x\in[5,8]} (8-x-3)e^{x+2} = \max_{x\in[5,8]} (5-x)e^{x+2}$$

Posons $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)=(5-x)e^{x+2}$. $\forall x\in[5,8]$, $\hat{g}(x)\le\hat{g}(5)=0$

$\max\limits_{x\in[5,8]}\hat{g}(x)=0$. $\max\limits_{(x,y)\in F_2} u(x,y)=0$ ; $(5,3)$ est le seul point qui réalise ce maximum.

• $F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0,\ 0\le y\le 5,\ 3y\le 19,\ y\le 8\}$

$F_3=\{(x,y)\in B \mid x=0\}=\{(0,y)\ ;\ y\in[0,5]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_3} u(x,y) = \max_{y\in[0,5]} u(0,y) = \max_{y\in[0,5]} (y-3)e^{2} = 2e^{2}$$

$\max\limits_{(x,y)\in F_3} u(x,y)=2e^2$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,5)$.

- $F_4 = \{(x,y)\in B \mid y=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,\ 2x\le 19,\ x\le 8 \text{ et } y=0\} = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,8]\}$

$$\max_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = \max_{x\in[0,8]} u(x,0) = \max_{x\in[0,8]} (-3e^{x+2}) = -3e^2$$

$\max_{(x,y)\in F_4} u(x,y) = -3e^2$ et ce maximum est atteint en le seul point $(0,0)$.

- $F_5 = \{(x,y)\in B \mid y=5\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,\ 2x+15\le 19,\ x+y\le 8,\ y=5\}$

$F_5 = \{(x,5) ;\ x\in[0,2]\}$.

$$\max_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = \max_{x\in[0,2]} u(x,5) = \max_{x\in[0,2]} 2e^{x+2} = 2e^4.$$

$\max_{(x,y)\in F_5} u(x,y) = 2e^4$ et ce maximum est atteint en le seul point $(2,5)$.

6.. $\max_{(x,y)\in B} u(x,y) = \max_{(x,y)\in B\setminus\mathring{B}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4\cup F_5} u(x,y) = \max\{\frac{2}{3}e^6, 0, 2e^2, -3e^2, 2e^4\}$

$\max_{(x,y)\in B} u(x,y) = \frac{2}{3}e^6 = u(4,\frac{11}{3})$ ; $(4,\frac{11}{3})$ est le seul point qui réalise ce maximum.

Le maximum de $u$ sur $B$ est $\frac{2}{3}e^6$ et il est atteint en le seul point $(x_0,y_0) = (4,\frac{11}{3})$.

## 3.4 Etude de deux tests d'arrêts.

### Partie 1.

1 a) $T_1(\Omega) = \{2,3,4\}$. Rappelons que $X_1, X_2, X_3$ et $X_4$ sont indépendantes.

- $p(T_1=2) = p(X_1\le X_2) = \sum_{k=1}^{3} p([X_1=k]\cap(X_2\ge k))$.

$$p(T_1=2) = \sum_{k=1}^{3} p(X_1=k)p(X_2\ge k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} p(X_2\ge k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(1-p(X_2\le k-1))$$

$$p(T_1=2) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left(1-\frac{k-1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{4}{3}-\frac{k}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(4-\frac{1}{3}\,\frac{3\times 4}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

→ $p(T_1=3)=p(\{X_2<X_1\}\cap\{X_2\le X_3\})=\sum_{k=1}^{3}p(\{X_2=k\}\cap\{X_1>k\}\cap\{k\le X_3\})$

$p(T_1=3)=\sum_{k=1}^{3}p(X_2=k)\,p(X_1>k)\,p(X_3\ge k)=\sum_{k=1}^{3}\frac13\times\frac{3-k}{3}\times\frac{3-(k-1)}{3}$

$p(T_1=3)=\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{3}(3-k)(4-k)=\left(\sum_{i=0}^{2}i(i+1)\right)\times\frac{1}{27}=\frac{1}{27}(1\times2+2\times3)=\frac{8}{27}$.

$i=3-k$

→ $p(T_1=4)=1-p(T_1=2)-p(T_1=3)=1-\frac23-\frac{8}{27}=\frac{1}{27}(27-18-8)=\frac{1}{27}$.

$T_1(\Omega)=[\![2,4]\!]$. $p(T_1=2)=\frac23$, $p(T_1=3)=\frac{8}{27}$, $p(T_1=4)=\frac{1}{27}$.

$T_2(\Omega)=[\![2,4]\!]$.

→ $p(T_2=2)=p(X_1+X_2>3)=\sum_{k=1}^{3}p(\{X_1=k\}\cap\{X_2>3-k\})=\sum_{k=1}^{3}p(X_1=k)\,p(X_2>3-k)$.

$p(T_2=2)=\sum_{k=1}^{3}\frac13\times\frac{3-(3-k)}{3}=\frac19\sum_{k=1}^{3}k=\frac19\left(\frac{3\times4}{2}\right)=\frac23$. $p(T_2=2)=\frac23$.

→ $p(T_2=4)=p(\{X_1+X_2+X_3\le3\}\cap\{X_1+X_2+X_3+X_4\ge4\})$.

$p(T_2=4)=p(\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=1\}\cap\{X_4+3\ge4\})$.

$p(T_2=4)=p(X_1=1)\,p(X_2=1)\,p(X_3=1)\,p(X_4\ge1)=\frac13\times\frac13\times\frac13\times1=\frac{1}{27}$.

→ Enfin $p(T_2=3)=1-p(T_2=2)-p(T_2=4)=1-\frac23-\frac{1}{27}=\frac{1}{27}(27-18-1)=\frac{8}{27}$.

$T_2(\Omega)=[\![2,4]\!]$ ; $p(T_2=2)=\frac23$, $p(T_2=3)=\frac{8}{27}$, $p(T_2=4)=\frac{1}{27}$.

$T_1$ et $T_2$ ont même loi.

b) $E(T_1)=E(T_2)=2\times\frac23+3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{1}{27}=\frac{64}{27}\simeq2{,}37$.

$E(T_1^2)=4\times\frac23+9\times\frac{8}{27}+16\times\frac{1}{27}=\frac{160}{27}$ ; $V(T_1)=\frac{160}{27}-\left(\frac{64}{27}\right)^2=\frac{224}{729}\simeq0{,}31$.

$E(T_1)=E(T_2)=\frac{64}{27}$ et $V(T_1)=V(T_2)=\frac{224}{729}$.

## Etude de la loi de $T_1$.

1.. $T_1(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$. Il faut au minimum interroger deux personnes et au maximum $N+1$ ; ce dernier cas résultant de la réalisation de l'événement le plus défavorable : $\{X_1 > X_2 > \dots > X_N\}$ ; si cet événement est réalisé nécessairement $\{X_{N+1} \geq X_N\}$ car $X_N$ a pris la valeur 1.

2.. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(\{T_1 > 0\}) = 1 = \frac{C_N^0}{N^0}$ et $P(\{T_1 > 1\}) = 1 = \frac{C_N^1}{N^1}$.

Ainsi $P(T_1 > n) = \frac{C_N^n}{N^n}$ pour $n \in \{0, 1\}$ !

$\forall n \in [\![N+1, +\infty[\![$, $P(T_1 > n) = 0 = \frac{C_N^n}{N^n}$ ... par convention !

Soit $n \in [\![2, N]\!]$.

$P(T_1 > n) = P(X_1 > X_2 > \dots > X_n)$.

$\{X_1 > X_2 > \dots > X_n\}$ se réalise si et seulement si les $n$ premiers résultats donnent une suite strictement décroissante. Le nombre de suites strictement décroissantes de $n$ éléments de $[\![1, N]\!]$ est $C_N^n$ (pour construire une telle suite on choisit $n$ éléments de $[\![1, N]\!]$ deux à deux distincts et on les range dans l'ordre décroissant).

Ainsi $P(T_1 > n) = P(X_1 > X_2 > \dots > X_n) = \frac{C_N^n}{N^n}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T_1 > n) = \frac{C_N^n}{N^n}$.

---

$\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $P(T_1 = n) = P(T_1 > n-1) - P(T_1 > n) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}$.

$\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $P(T_1 = n) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}$.

---

3. $E(T_1) = \sum_{n=2}^{N+1} n\left(\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}\right) = \sum_{n=2}^{N+1} n\,\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \sum_{n=2}^{N+1} n\,\frac{C_N^n}{N^n}$.

$$E(T_1) = \sum_{n=1}^{N}(n+1)\frac{C_N^n}{N^n} - \sum_{n=2}^{N+1 \text{ ou } N} n\,\frac{C_N^n}{N^n} = 2\,\frac{C_N^1}{N} + \sum_{n=2}^{N}\frac{C_N^n}{N^n} = 1+1+\sum_{n=2}^{N}\frac{C_N^n}{N^n}.$$

$$E(T_1) = \sum_{n=0}^{N}\frac{C_N^n}{N^n} = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N . \quad E(T_1) = \left(\frac{N+1}{N}\right)^N.$$

$\underline{E(T_1) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N}$. Pour $N=3$ on retrouve $\frac{64}{27}$ et c'est heureux.

4. $E(T_1^2 - T_1) = \sum_{n=2}^{N+1}(n^2-n)\times\left(\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}\right)$

$$E(T_1^2-T_1) = \sum_{n=2}^{N+1} n(n-1)\,\frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \sum_{n=2}^{N+1 \text{ ou } N} n(n-1)\,\frac{C_N^n}{N^n}. \qquad \underline{n\,C_N^n = N\,C_{N-1}^{n-1}}$$

$n \to n+1$

$$E(T_1^2-T_1) = \sum_{n=1}^{N}(n+1)n\,\frac{C_N^n}{N^n} - \sum_{n=2 \text{ ou } 1}^{N} n(n-1)\,\frac{C_N^n}{N^n} = 2\sum_{n=1}^{N} n\,\frac{C_N^n}{N^n} = 2N\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{N-1}^{n-1}}{N^n}$$

$$E(T_1^2-T_1) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{N-1}^{n-1}}{N^{n-1}} = 2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{C_{N-1}^{n}}{N^n} = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}.$$

$\underline{E(T_1^2-T_1) = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}}$.

$$V(T_1) = E(T_1^2-T_1) + E(T_1) - (E(T_1))^2 = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1+\frac{1}{N}\right)^N - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{2N}$$

$$V(T_1) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}\left(3+\frac{1}{N} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1+\frac{1}{N}\right)^N - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{2N}.$$

5. $N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\times\frac{1}{N} = 1$. $\lim_{N\to+\infty}\left(N\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\right) = 1$ ; $\lim_{N\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1$.

Alors $\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = e$. $\underline{\lim_{N\to+\infty} E(T_1) = e}$.

$V(T_1) = 2\,\frac{1}{1+\frac{1}{N}}\,E(T_1) + E(T_1) - (E(T_1))^2$ ; $\lim\limits_{N\to+\infty} V(T_1) = 2e + e - e^2$.

$\lim\limits_{N\to+\infty} V(T_1) = 3e - e^2 = e(3-e)$.

## Etude de la loi de $T_2$.

1.- Fixons d'abord $n$ dans $\mathbb{N}$. Notons par récurrence que : $\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum_{k=n}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$

. $\sum_{k=n}^{n} C_k^n = C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ ; la propriété est vraie pour $r=n$.

. Supposons la propriété vraie pour $r$ dans $[\![n,+\infty[\![$ et montrons la pour $r+1$.

$$\sum_{k=n}^{r+1} C_k^n = \sum_{k=n}^{r} C_k^n + C_{r+1}^n \overset{HR}{=} C_{r+1}^{n+1} + C_{r+1}^n = C_{r+2}^{n+1}$$ ; ceci achève la récurrence.

$\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum_{k=n}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$. Or avec la convention proposée : $\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n = 0$

Ainsi $\forall r \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$.

Avec la convention proposée pour $r$ dans $[\![0,n-1]\!]$ on a : $\sum_{k=0}^{r} C_k^n = 0 = C_{r+1}^{n+1}$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$.

2.- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur minimum que prend $X_1+X_2+\cdots+X_n$ est $n$ et la valeur maximum est $nN$.

Notons que $n > N$ équivaut à $n \geq N+1$ et que $nN > N$ équivaut à $n \geq 2$.

Ainsi $T_2$ prend ses valeurs dans $[\![2, N+1]\!]$.

3.. Notons par récurrence que, pour tout $n$ dans $[\![1,N]\!]$,

$$\forall j\in[\![1,N]\!],\quad p(X_1+\dots+X_n\leq j)=\frac{C_j^n}{N^n}.$$

- $\forall j\in[\![1,N]\!]$, $p(X_1\leq j)=\sum_{\ell=1}^{j}p(X_1=\ell)=\sum_{\ell=1}^{j}\frac{1}{N}=\frac{j}{N}=\frac{C_j^1}{N^1}$.

La propriété est donc vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour $n$ élément de $[\![1,N-1]\!]$ et notons-la pour $n+1$. Soit $j$ un élément de $[\![1,N]\!]$.

$p(X_1+\dots+X_{n+1}\leq j)=\sum_{\ell=1}^{N}p(\{X_{n+1}=\ell\}\cap\{X_1+\dots+X_n\leq j-\ell\})$ car $(\{X_{n+1}=\ell\})_{\ell\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements.

$X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1}$ sont indépendantes donc $X_{n+1}$ et $X_1+\dots+X_n$ le sont également.

Alors $p(X_1+\dots+X_{n+1}\leq j)=\sum_{\ell=1}^{N}p(X_{n+1}=\ell)\,p(X_1+\dots+X_n\leq j-\ell)=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}p(X_1+\dots+X_n\leq j-\ell)$

$$\forall \ell\in[\![1,N]\!],\quad p(X_1+\dots+X_n\leq j-\ell)=\begin{cases}0 & \text{si } j-\ell<1 \quad (\text{i.e. } j-1<\ell)\\[4pt] \dfrac{C_{j-\ell}^n}{N^n} & \text{si } j-\ell\geq 1 \quad (\text{H.R.})\quad (j-\ell\leq N\dots)\end{cases}$$

Alors $p(X_1+\dots+X_{n+1}\leq j)=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{j-1}\frac{C_{j-\ell}^n}{N^n}=\frac{1}{N^{n+1}}\sum_{\ell=1}^{j-1}C_\ell^n=\frac{1}{N^{n+1}}\sum_{\ell=\underline{0}}^{j-1}C_\ell^n$

Le résultat de 1. donne alors $p(X_1+\dots+X_{n+1}\leq j)=\frac{1}{N^{n+1}}C_{j-1+1}^{n+1}=\frac{C_j^{n+1}}{N^{n+1}}$ et ainsi s'achève la récurrence car ce dernier résultat vaut encore pour $j=1$ $(0=0\,!)$.

$\forall n\in[\![1,N]\!]$, $\forall j\in[\![1,N]\!]$, $p(X_1+X_2+\dots+X_n\leq j)=\frac{C_j^n}{N^n}$. ⚠ Notons que ceci vaut pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ car si $n\in[\![N+1,+\infty[\![$, $\forall j\in[\![1,N]\!]$, $p(X_1+\dots+X_n\leq j)=0=\frac{0}{N^n}=C_j^n/N^n$.

4.. Soit $n\in[\![2,N+1]\!]$

$p(T_2=n)=p(\{X_1+\dots+X_{n-1}\leq N\}\cap\{X_1+\dots+X_n>N\})$

Notons que $\{X_1+\cdots+X_n > N\} = \{X_1+\cdots+X_{n-1} > N\} \cup (\{X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N\} \cap \{X_1+\cdots+X_n > N\})$.
L'union étant disjointe il vient :

$$p(X_1+\cdots+X_n > N) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} > N) + p(\{X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N\} \cap \{X_1+\cdots+X_n > N\}).$$

Alors $p(X_1+\cdots+X_n > N) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} > N) + p(T_2 = n)$.

$$p(T_2=n) = p(X_1+\cdots+X_n > N) - p(X_1+\cdots+X_{n-1} > N) = 1 - p(X_1+\cdots+X_n \leq N) - 1 + p(X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N).$$

$$p(T_2=n) = p(X_1+\cdots+X_{n-1} \leq N) - p(X_1+\cdots+X_n \leq N) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}.$$

Finalement :

$$\forall n \in [\![2, N+1]\!],\ p(T_2 = n) = \frac{C_N^{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{C_N^n}{N^n}.$$

5.. $T_1$ et $T_2$ ont même loi.

Partie 2 1.. Soyons un peu plus rigoureux que le texte. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Y_1+\cdots+Y_n$ est une variable aléatoire à densité qui admet une densité $f_n$ vérifiant :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[,\ f_n(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$.

$f_1$ est une densité de $Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- En particulier $f_1$ est une densité de $S_1 = Y_1$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et telle que $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) = \frac{x^{1-1}}{(1-1)!}$. La propriété est vraie pour $n=1$.
- Supposons la propriété vraie pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soit $f_n$ une densité de $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ telle que : $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes ainsi $S_n$ et $Y_{n+1}$ sont indépendantes.

Alors $S_n$ et $Y_{n+1}$ sont deux variables aléatoires à densité admettant pour densité $f_n$ et $f_1$. Alors le cours nous permet de dire que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_n(x-t)\,dt$

$\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^1 f_n(x-t)\,dt$.

Soit $x \in ]-\infty, 0[$. $\forall t \in [0,1]$, $x - t \in ]-\infty, 0[$ ; $h(x) = \int_0^1 0\,dt = 0$.

$h$ est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Soit $x \in [0,1]$. $h(x) = \int_0^1 f_n(x-t)\,dt \underset{u = x-t}{=} \int_x^{x-1} f_n(u)(-du) = \int_{x-1}^{x} f_n(u)\,du \underset{x-1 \leq 0}{=} \int_0^x f_n(u)\,du$.

$$h(x) = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \left[\frac{u^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}.$$

Posons alors $f_{n+1} = h$ ; $f_{n+1}$ est une densité de $S_{n+1}$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et telle que $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!}$. Ceci achève la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité $f_n$

admettant une densité $f_n$ qui vérifie : $\forall x \in ]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

2. – Notons $F_X$ et $F_Y$ les fonctions de répartition de $X$ et $Y$. $X = 1 + (N-1)Y$ donc $Y = \frac{1}{N-1}(X-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - 1 \leq x(N-1)) = P(X \leq (N-1)x + 1) = F_X((N-1)x+1)$

<u>1er cas</u>. $x \in ]-\infty, 0[$ ; $(N-1)x + 1 < 1$ ; $F_Y(x) = F_X((N-1)x+1) = 0$.

<u>2ème Cas</u>.. $x \in [0,1]$. $(N-1)x+1 \in [1,N]$. $F_Y(x) = \dfrac{((N-1)x+1)-1}{N-1} = x$.

<u>3ème Cas</u>.. $x \in ]1,+\infty[$ $(N-1)x+1 \in ]N,+\infty[$. $F_Y(x) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty,0[ \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in ]1,+\infty[ \end{cases}$ . <u>Y suit une loi uniforme sur [0,1].</u>

3.. Ici encore $T_2(\Omega) = [\![2, N+1]\!]$ car pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i$ prend ses valeurs dans $[1,N]$ ... encore que pour $N+1$ ... mais attendons.

$\forall n \in [\![2,N+1]\!],\ p(T_2 = n) = p(X_1+\dots+X_n > N) - p(X_1+\dots+X_{n-1} > N)$.

Posons pour tout $i$ dans $\mathbb{N}^*$, $Y_i = \dfrac{X_i - 1}{N-1}$. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i = 1 + (N-1)Y_i$.

Alors pour tout $i$ dans $\mathbb{N}^*$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. De plus $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

D'après 1., pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $S_i = Y_1+\dots+Y_i$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité $f_i$ qui vérifie $\forall x \in ]-\infty,0[,\ f_i(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1],\ f_i(x) = \dfrac{x^{i-1}}{(i-1)!}$.

Notons aussi que : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $S_i = Y_1+\dots+Y_i = \dfrac{X_1-1}{N-1}+\dots+\dfrac{X_i-1}{N-1} = \dfrac{1}{N-1}[X_1+\dots+X_i - i]$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_1+X_2+\dots+X_i = (N-1)S_i + i$

Alors $\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = p(X_1+\dots+X_n > N) - p(X_1+\dots+X_{n-1} > N) =$

$p((N-1)S_n + n > N) - p((N-1)S_{n-1} + n-1 > N) = p\left(S_n > \dfrac{N-n}{N-1}\right) - p\left(S_{n-1} > \dfrac{N-n+1}{N-1}\right)$.

$\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = 1 - p\left(S_n \leq \dfrac{N-n}{N-1}\right) - 1 + p\left(S_{n-1} \leq \dfrac{N-n+1}{N-1}\right) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt$

$\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $p(T_2 = n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt$.

Notons que $\forall n \in [\![2,N+1]\!]$, $\dfrac{N-n+1}{N-1} \in [0,1]$ et $\forall n \in [\![2,N]\!]$, $\dfrac{N-n}{N-1} \in [0,1]$

Si $n = N+1$ : $\dfrac{N-n}{N-1} < 0$.

Alors $\forall n \in [\![2, N+1]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n+1}{N-1}} f_{n-1}(t)\,dt = \int_{0}^{\frac{N-n+1}{N-1}} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\left[t^{n}\right]_0^{\frac{N-n+1}{N-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{N-n+1}{N-1}\right)^{n-1}$

$\forall n \in [\![2, N]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{N-n}{N-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{1}{n!}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^{n}$.

Si $n = N+1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{N-n}{N-1}} f_n(t)\,dt = 0$.

Alors $\forall n \in [\![2, N]\!]$, $\displaystyle p(T_2 = n) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{N-n+1}{N-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{n!}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^{n}$

$p(T_2 = N+1) = 0$ (Normal ! $p(T_2 = N) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \dots \cap X_N = 1) = \dots = 0$)