EML 2005 voie Economique

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Soient α, β, γ réels. Si $\alpha I + \beta J + \gamma K = 0$ alors $\alpha = 0$ (terme 1,1) $\beta = 0$ (terme 1,2) $\gamma = 0$ (terme 1,3) donc la famille est libre.

   Elle est génératrice de E donc c'est une base de E et $\dim E = 3$

2. On a $J^2 = K$, $JK = 0$, $KJ = 0$ et $K^2 = 0$.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

   a) On peut procèder par récurrence ou par la formule du binôme :
   Il faut pour celà calculer d'abord les puissances de J : $J^3 = K\,J = 0$ donc pour tout $i \geq 3$ on a $J^i = 0$
   $I\,J = J = J\,I$ donc

   $$\begin{aligned}(I+J)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J^i I^{n-i} = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} J^i + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} J^i \text{ découpage pour } n \geq 3 \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K \text{ car } J^2 = K\end{aligned}$$

   dont on vérifie la validité pour $n = 0 : 1 : 2$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : \ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K}$

   b) La formule est déjà vraie pour $n \geq 0$
   Pour $n \leq 0$, on revient à la définition de l'inverse :
   Pour $n \geq 0$, on vérifie que le produit "candidat" $L^{-n} \cdot L^n$ est égal à I :
   $\left(I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K\right)\left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K\right) = I + (n-n)\,J + 0 = I$ car $J\,K = 0$ et $K\,J = 0$ et $K^2 = 0$
   Donc pour tout n entier, L^n est inversible et $(L^n)^{-1} = L^{-n} = I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K$
   En particulier pour $n = 1$: L est inversible.

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier relatif } n : \ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K}$

   c) IL faut pour celà exprimer J et K en fonction de L et L^2 en résolvant les relations :
   $\begin{cases} L = I + J \\ L^2 = I + 2J + K \end{cases}$ d'où

Conclusion : $\boxed{J = L - I \text{ et } K = L^2 - I - 2(L - I) = L^2 - 2L + I}$

d'où

$$\begin{aligned}
L^n &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K \\
&= I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2}\left(L^2 - 2L + I\right) \\
&= \left(1 - n + \frac{n(n-1)}{2}\right) I + \left(n - 2\frac{n(n-1)}{2}\right) L + \frac{n(n-1)}{2} L^2 \\
&= \frac{2 - 3n + n^2}{2} I + \left(2n - n^2\right) L + \frac{n(n-1)}{2} L^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{L^n = \frac{2-3n+n^2}{2} I + (2n - n^2) L + \frac{n(n-1)}{2} L^2}$

(on a la prudence de vérifier pour $n = 0, 1$ et 2)

On considère

la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. On recherche les valeurs et les sous espaces propres de f :

Soit $u = (x, y, z)$

$$f(u) - \alpha u = 0 \iff \begin{cases} -\alpha x + 2y - z = 0 & L_1 + \alpha L_2 \\ x - \alpha y + z = 0 & \\ 2x - 3y + (3 - \alpha) z = 0 & L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2 - \alpha^2) y + (-1 + \alpha) z = 0 \\ x - \alpha y + z = 0 \\ (-3 + 2\alpha) y + (1 - \alpha) z = 0 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} (2 - \alpha^2) y + (-1 + \alpha) z = 0 \\ x - \alpha y + z = 0 \\ (-1 + 2\alpha - \alpha^2) y = 0 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

$-1 + 2\alpha - \alpha^2 = -(1 - \alpha)^2$ donc

- Si $\alpha \neq 1$ alors $(-1 + 2\alpha - \alpha^2) \neq 0$ et

  $(1) \iff \begin{cases} (-1 + \alpha) z = 0 \\ x - \alpha y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et comme $-1 + \alpha \neq 0$ on a $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

  Donc α n'est pas valeur propre
- Si $\alpha = 1$ alors

  $(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff u \in \operatorname{Vect}((-1, 0, 1)) \neq \emptyset$

  Donc 1 est bien valeur propre.

Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur propre de } f \text{ est } 1}$

Comme le sous espace propre associé est de dimension 1, la somme des dimensions des sous espace n'étant pas 3, f n'est pas diagonalisable.

(On peut aussi résonner par l'absurde : **si** f est diagonalisable alors sa matrice dans une base de vesceurs propres est I (car la diagonale ne contient que les valeurs propres) et la formule de changement de base donne alors, avec P la matrice de passage de la base canonique dans la base de vecteurs propres : $A = P\,I\,P^{-1} = I$ ce qui n'es tpas vrai.

Donc f n'est pas diagonalisable)

5. a) Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On calcule v par ses coordonnées dans la base canonique :

   La matrice de e dans la base canonique étant I,

   $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(v) = (A - I)\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(w) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $v = (-1, 1, 2)$

   $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u) = (A - I)\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $u = (1, 0, -1)$

   On reconnait dans u un vecteur propre de$f$ asocié à la valeur propre 1.

   Pour montrer que (u, v, w) est une base dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre :

   Et pour aller au plus vite, il faut penser à la question précédente : on connait les images par $f - e$

   Si $\alpha\,u + \beta\,v + \gamma\,w = 0$ alorsen prenant l'image par $(f - e)$, on asuccessivement :

   - $0 = (f - e)(\alpha\,u + \beta\,v + \gamma\,w) = \alpha\,(f - e)(u) + \beta\,(f - e)(v) + \gamma\,(f - e)(w) = \beta\,u + \gamma\,v$
   - $0 = \beta\,(f - e)(v) + \gamma\,(f - e)(w) = \gamma\,v$

   d'où $\gamma = 0$ puis $\beta = 0$ et enfin $\alpha = 0$ car w, v et u sont non nuls.

   b) On détermine les coordonnées des images :

   - Comme $(f - e)(u) = 0$ on a $f(u) = u$
   - Comme $(f - e)(v) = u$ on a $f(v) = u + v$
   - Comme $(f - e)(w) = v$ on a $f(w) = v + w$

   Donc la matrice de f dans la base (u, v, w) et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + J = L$

   c) Comme 0 n'est pas valeur propre de f, elle est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (On peut aussi raisonner sur sa matrice L dans (u, v, w) qui est inversible)

   Sa matrice dans la base (u, v, w) est L donc la matrice de f^n est $L^n = \frac{2-3n+n^2}{2}I + (2n - n^2)\,L + \frac{n(n-1)}{2}L^2$

   et f^n est l'application linéaire associée à L^n dans la base (u, v, w) donc

   Conclusion : $\boxed{f^n = \frac{2-3n+n^2}{2}e + (2n - n^2)\,f + \frac{n(n-1)}{2}f^2}$

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(t) = \dfrac{-2}{(1+t)^3} < 0$.

   En 0^+ on a $f(t) \to 1$ et $f'(t) \to -2$ donc la courbe représentative de f a une demi tangente de pente -2 en 0^+

   En $+\infty$ on a $f(t) \to 0$

   On trace donc l'axe $]-\infty,0]$ puis la tangente en 0et l'asymptote $]0,+\infty[$

2. f est positive et continue par morceaux.

   $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$

   - En $-\infty$: $\int_{-\infty}^{0} f = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$
   - En $+\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} = \ldots$

     $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^M = \frac{-1}{1+M} + 1 \to 1$ donc $\int_0^{+\infty} f = 1$
   - Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1

   Donc f est bien une densité de proabilité.

3. Comme f est une densité, $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge.

   - Pour $x \leq 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   - Pour $x \geq 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

4. Pour $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2}\\ &\Longleftrightarrow \quad 2\alpha = 1+\alpha\\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = 1\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\alpha = 1 \text{ est le seul réel positif (et le seul réel tout court) tel que } \int_0^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2}}$

5. Soit $x \in [0,+\infty[$ fixé.

   On considère la fonction φ_x définie sur $[0;+\infty[$ par : $\forall u \in [0,+\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)dt$.

   a) On a

$$\varphi_x(0) = \int_{x-0}^{x+0} f(t)dt = \int_x^x f(t)\,dt = 0$$

   Et comme $\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt = \int_{x-u}^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+u} f(t)\,dt$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge alors

$$\begin{aligned}\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt &= \int_{x-u}^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+u} f(t)\,dt\\ &\to \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt + \int_x^{+\infty} f(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f = 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi_x(0) = 0 \text{ et } \lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) = 1}$

b) Soient $0 < u < v$ alors

$$\begin{aligned}\varphi_x(v) - \varphi_x(u) &= \int_{x-v}^{x+v} f(t)\,dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt \text{ par Chasles :}\\ &= \int_{x-v}^{x-u} f(t)\,dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t)\,dt\end{aligned}$$

et comme $x - v < x - u$ et que $f \geq 0$ alors $\int_{x-v}^{x-u} f(t)\,dt \geq 0$

Donc $\quad \forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad u < v \Longrightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)dt.$

Comme on a alors $x+v > x+u \geq 0$ alors $\int_{x+u}^{x+v} f(t)dt = \int_{x+u}^{x+v} \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_{x+u}^{x+v} > 0$

Donc, $\forall (u,v) \in [0,+\infty[^2, \quad v > u \Longrightarrow \varphi_x(v) > \varphi_x(u)$ ce quiest la définition d'une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Conclusion : $\boxed{\varphi_x \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$

c) On admet que φ_x est continue sur $[0;+\infty[$.

Elle est donc strictement croissante et continue donc bijective de $[0,+\infty[$ dans $[\lim_0 \varphi_x, \lim_{+\infty} \varphi_x[= [0,1[$

Comme $\frac{1}{2} \in [0,1[$ alors l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$.

On note $U : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0;+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}$.

6. a) Soit $x \in [0; \frac{1}{2}[$

On calcule $\displaystyle\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)dt = \int_{2x-1}^{1} f(t)dt$

Et comme $2x - 1 \leq 0$ alors $\int_{2x-1}^{1} f(t)dt = \int_{2x-1}^{0} 0dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt$

$$\begin{aligned}\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)dt &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt\\ &= \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$, $U(x) = 1 - x$ est bien une solution. C'est donc **la** bonne.

b) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi_x(x) &= \int_{x-x}^{x+x} f(t)dt = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2}dt\\ &= \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^{2x}\\ &= 1 - \frac{1}{1+2x}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi_x(x)-\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{1+2x}\\ &= \frac{2x-1}{2(1+2x)}\geq 0\end{aligned}$$

(On pouvait aussi calculer explicitement l'intégrale puis prouver l'inégalité sur le résultat obtenu)

Donc $\varphi_x(x)\geq\dfrac{1}{2}$,

On a donc $\varphi_x(x)\geq\varphi_x(U(x))$ et comme φ_x est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que x et $U(x)$ en sont éléments,

$x\geq U(x)$ et donc $x-U(x)\geq 0$,

Enfin, comme $x-U(x)\geq 0$, alors $f(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$ sur tout l'intervalle $[x-U(x),x+U(x)]$ et

$$\begin{aligned}\int_{x-U(x)}^{x+U(x)}f(t)dt &= \int_{x-U(x)}^{x+U(x)}\frac{1}{(1+t)^2}dt\\ &= \left[\frac{-1}{1+t}\right]_{x-U(x)}^{x+U(x)}\\ &= \frac{-1}{1+x+U(x)}+\frac{1}{1+x-U(x)}\\ &= \frac{-(1+x-U(x))+(1+x+U(x))}{(1+x+U(x))(1+x-U(x))}\\ &= \frac{2U(x)}{(1+x)^2-U(x)^2}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi_x(U(x))=\frac{1}{2} &\iff \frac{2U(x)}{(1+x)^2-U(x)^2}=\frac{1}{2}\\ &\iff U(x)^2+4U(x)-(1+x)^2=0\end{aligned}$$

équation du second dégré en $U(x)$ qui a pour dicriminant $\Delta=16+4(1+x)^2=4\left(4+(1+x)^2\right)$ et pour racines

$$\begin{aligned}U(x) &= \frac{-4\pm 2\sqrt{4+(1+x)^2}}{2}\\ &= -2\pm\sqrt{4+(1+x)^2}\end{aligned}$$

et comme $-2-\sqrt{4+(1+x)^2}<0$ et que $U(x)\geq 0$ alors

Conclusion : $\boxed{U(x)=-2+\sqrt{4+(1+x)^2}}$

7. a) Pour $x\geq\frac{1}{2}$ on a $4+(1+x)^2\geq 0$ donc U est continue sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$
De plus elle est continue ($\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[$, $U(x)=1-x$) sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$
En $\frac{1}{2}^-$ on a $U(x)=1-x\to\frac{1}{2}$ et

$U\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{4 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = -2 + \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = -2 + \sqrt{\frac{25}{4}} = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Donc U est continue en $\frac{1}{2}^-$

Conclusion : $\boxed{U \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$

b) De même, U est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $\left(4 + (1+x)^2 > 0\right)$ et sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$
En $\frac{1}{2}$ il faut tester si les dérivée à droite et à gauche sont égales :
Comme U est continue en $\frac{1}{2}$, on peut utiliser le théorème de prolongement C^1 :¨

- Pour $x < \frac{1}{2}$: $U'(x) = -1 \to -1$ donc U est dérivable à droite de$\frac{1}{2}$ et sa dérivée à droite est de -1
- Pour $x > \frac{1}{2}$: $U'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4(1+x)^2}} 2(1+x) \to \dfrac{1}{2\sqrt{4\frac{9}{4}}} 2\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$:

  Donc U est dériable à gauche en $\frac{1}{2}$ et sa dérivée à gauche est $\frac{1}{2}$

Comme $-1 \neq \frac{1}{2}$ alor s U n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

c) En $+\infty$ on peut trouver l'assymptote en effectuant un développement limité après factorisation :

$$\begin{aligned} U(x) &= -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} \\ &= -2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \\ &= -2 + \sqrt{x^2\left(1 + 2/x + 5/x^2\right)} \end{aligned}$$

On a $\sqrt{x^2} = |x| = x$
et comme $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + X\varepsilon(X)$ quand $X \to 0$, avec $X = 2/x + 5/x^2$ on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2/x + 5/x^2} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\varepsilon(X) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} U(x) &= -2 + x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(x)\right) \\ &= x - 1 + \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - 1 \text{ est asymptote à la courbe représentative de } U \text{ en } +\infty}$

N.B. Comme l'asymptot était donné, on pouvait plus simplement déterminéer la limite de la différence :

$$\begin{aligned} U(x) - (x-1) &= -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} - (x-1) \\ &= \sqrt{4 + (1+x)^2} - (x+1) \ \text{ conjuguée:} \\ &= \frac{\sqrt{4 + (1+x)^2}^2 - (x+1)^2}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (x+1)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (x+1)} \to 0 \end{aligned}$$

d) Pour tracer la courbe représentative de U, il faut placer l'asymptote en $+\infty$, les deux demi tangentes en $\frac{1}{2}$.
Comme $U\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, il faut bien placer le point sur la droite d'équation $y=x$ ... ce qui est très utile à la suite.

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=U(a_n)\end{cases}$

a) Par récurrence :

- $a_0=1\geq\frac{1}{2}$
- Soit $n\geq 0$ tel que $a_n\geq\frac{1}{2}$
 comme U est croissante sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ et que a_n et $\frac{1}{2}$ en sont éléments alors $a_{n+1}=U\left(a_n\right)\geq U\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n\geq\frac{1}{2}\ .}$

b) On étudie le signe de $U\left(x\right)-x$ pour $x\geq\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} U\left(x\right)-x &= \sqrt{4+\left(1+x\right)^2}-\left(2+x\right)\ \text{(quantités conjuguées)} \\ &= \frac{\sqrt{4+\left(1+x\right)^2}^2-\left(2+x\right)^2}{\sqrt{4+\left(1+x\right)^2}+\left(2+x\right)} \\ &= \frac{4+(1+2x+x^2)-(4+4x+x^2)}{\sqrt{4+\left(1+x\right)^2}+\left(2+x\right)} \\ &= \frac{1-2x}{\sqrt{4+\left(1+x\right)^2}+\left(2+x\right)}\leq 0 \end{aligned}$$

Donc, comme$a_n\geq\frac{1}{2}$ on a $U\left(a_n\right)\leq a_n$

Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est décroissante.}}$

c) La suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers une limite $\ell\geq\frac{1}{2}$
Comme U est continue sur $[0,+\infty[$ elle est continue en ℓ.
Donc $U\left(\ell\right)=\ell$.
cette équation n'a pas de solution sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ où $U\left(x\right)=1-x$
Et sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, $U\left(x\right)-x$ est du signe de $1-2x$
Donc $U\left(x\right)=x\Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{a_n\to\frac{1}{2}\text{ quand } n\to+\infty}$

d) On calcule a_n et n tant que $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=a_n-\frac{1}{2}>10^{-6}$:

```
Program premier;
var n:integer;a:real;
begin
a:=1;n:=0;
while a-0.5>1E-6 do
begin
    a:=-2+sqrt(4+sqr(1+a));
```

```
        n:=n+1;
    end;
    writeln(n);
    end.
```

Exercice 3

1. **Préliminaire :**

   Soit $x \in]0;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ de la façon suivante :

   • pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès ;

   • T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

   Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

   a) T_n est le **nombre** de lancers pour obtenir le **premier** succès suivant, dans une suite d'expériences indépendantes de même probabiltié de succès $1-x$

      Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x) \text{ et } E(T_n) = \dfrac{1}{1-x} \text{ et } V(T_n) = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$

   b) Le nombre de lancer pour obtenir un pile est indépendant du numéro de alncer auquel le décoptte cmmence. Donc

      Conclusion : $\boxed{T_1, T_2, \dots, T_n. \text{ sont indépendantes}}$

   c) Pour $n \geq 1$ on a On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ donc S_n a une espérance $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k)$ et les variables étant indépendantes, $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k)$

      Conclusion : $\boxed{E(S_n) = \dfrac{n}{1-x} \text{ et } V(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}}$

   d) Le $n^{ième}$ succès peut intervenir à partier de la $n^{ième}$ expérience, sans limite de durée donc $S_n(\Omega) = [[n, +\infty[[$

      $S_n = k$ singifie que le $n^{ième}$ succès a eu lieu lors de la $k^{ième}$.

      C'est à dire, qu'il y a eu succès à la $k^{ième}$ et que lors des $k-1$ premières expériences, le nombre de succès (X_{k-1} qui suit une loi $\mathcal{B}(k-1, 1-x)$) est de $n-1$ et par indépendance Donc $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{n-1} x^{k-n} \cdot (1-x) = \binom{n-1}{k-1}(1-x)^n x^{k-n}$

      Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} S_n(\Omega) = [[n, +\infty[[\text{ et pour tout } k \in [[n, +\infty[[\\ \mathrm{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} \end{array}}$

      Et comme $S_n(\Omega) = [[n, +\infty[[$ on a donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = 1$

   e) On a donc

      $$1 = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} = \frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k$$

      donc

      $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0;1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$.

   Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

   Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

   a) X est le temps d'attente du premier pile sans mémoire (tant que l'on n'a pas pile , la porbabilité de l'obtenir reste a même) donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

      Sachant $X = k$, Y est le nombre de pile en k lancers indépendants, la porbbilité de pile étant p donc $Y_{/X=k} \hookrightarrow \mathcal{B}(k, p)$

   b) Qand $X = k$; Y prend les valeurs de $[[0, k]]$ et comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

      Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$

   c) $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\, \mathrm{P}_{X=k}(Y = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 q^k \\
&= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p}{q} q^2 \frac{1}{1 - q^2} \text{ car } \left|q^2\right| < 1 \\
&= pq \frac{1}{(1 - q)(1 + q)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}\ .}$

   d) Soit n un entier naturel non nul.

$(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Y=n\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(X=k\right)\mathrm{P}_{X=k}\left(Y=n\right)\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1}p\binom{k}{n}p^nq^{k-n}+\sum_{k=1}^{n}0\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}p^{n+1}q^{2k-n-1}\ \text{CQFD}\\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}\left(q^2\right)^k\ \text{ avec } q^2\in\left]0,1\right[\ \text{ et } h=k+1\\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\binom{h-1}{n+1-1}\left(q^2\right)^{h-1}\ \text{ et } (\text{"}n\text{"}=n+1)\\
&= \frac{p^{n+1}}{q^2}\frac{q^{n+1-1}}{p^{n+1}\left(1+q\right)^{n+1}}\\
&= \frac{pq^{n-1}}{\left(1+q\right)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(Y=n)=\dfrac{1}{(1+q)^2}(\dfrac{q}{1+q})^{n-1}}$