J.F. COSSUTTA

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Ceci est un premier jet et a besoin encore de beaucoup relectures pour bien tenir la route. Si vous voyez des erreurs contactez moi.

ECRICOME 2014

EXERCICE 1

1. Notons E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Notons que E est une partie de E' et que $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ est une famille d'éléments de E'.

Soit f un élément de E'.

$f \in E \iff \exists (P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x\, P(x) + x\, \ln(x)\, Q(x).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k \right) + x\, \ln(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, x^k \right).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^{k+1} + \ln(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, x^{k+1} \right).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, x^{k} + \ln(x) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\, x^{k} \right).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, x^{k} + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} \left(x^k\, \ln(x) \right).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\, v_k(x).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, u_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\, v_k \right)(x).$

$f \in E \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \exists (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ f = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, u_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\, v_k.$

$f \in E \iff f \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n,).$

$f \in E \iff f \in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n).$

Par conséquent : $E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$.

Alors E est le sous-espace vectoriel de E' engendré par la famille $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ de E'. Finalement :

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel et } E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n).}$$

► *Exercice Montrons que la famille $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ est libre.* ◄

2. Soit f un élément de E. Comme $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$, il existe deux éléments $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, v_k$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_k(x) = x^k$ et $v_k = x^k\ \ln(x)$. Donc pour tout élement k de $[\![1,n]\!]$, u_k et v_k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u_k = \lim\limits_{x\to 0^+} x^k = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} v_k = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^k\ \ln(x)\right) = 0$ (par croissance comparée...). Alors :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, v_k\right)(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, v_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \times 0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \times 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0.

$$\boxed{\text{Chaque fonction } f \text{ de } E \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

► *Remarque 1* *On aurait pu aussi utiliser "*$f(x) = x\,P(x) + x\,\ln x\,Q(x)$*" pour montrer ce résultat* ◄

► *Remarque 2* *Soit f un élément de E. f se prolonge en une fonction continue sur R_+ que nous noterons $\widehat{f}$ dans la suite.*

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\widehat{f}(0) = 0$. *Ainsi* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Ce qui précède permet aussi de dire que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et vaut* $\displaystyle\int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *existe et vaut* $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$. *Alors $\varphi(f)(x)$ est définie pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Finalement $\varphi(f)$ est bien une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et ceci pour tout f dans E.

φ est donc une application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'. ◄

Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \widehat{u_k}(x) = u_k(x) = x^k$ et $\widehat{u_k}(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \widehat{u_k}(x) = x^k$.

Alors $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \widehat{u_k}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{1}{x}\,\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}\,x^k.$

Ainsi $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(u_k)(x) = \left(\frac{1}{k+1}\,u_k\right)(x)$. Donc $\displaystyle\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}\,u_k$.

• Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit ε un élément de $]0,+\infty[$.

$\displaystyle w_k : t \to \frac{1}{k+1}\,t^{k+1}$ et $h : t \to \ln(t)$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus $\displaystyle\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ w_k'(t) = t^k$ et $h'(t) = \frac{1}{t}\cdot$

Ceci autorise l'intégration par parties suivante. $\displaystyle\int_\varepsilon^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x t^k\ \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ \ln(t)\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{t^{k+1}}{k+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

$$\int_\varepsilon^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{k+1}\,\varepsilon^{k+1}\ \ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^x \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{k+1}\,\varepsilon^{k+1}\ \ln(\varepsilon) - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_\varepsilon^x.$$

$$\int_\varepsilon^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{k+1}\,\varepsilon^{k+1}\ \ln(\varepsilon) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot$$

$$\int_0^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{k+1}\,\varepsilon^{k+1}\ \ln(\varepsilon) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}\right)\cdot$$

Donc par croissance comparée : $\displaystyle\int_0^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - 0 - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + 0 = \frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}\,x^{k+1}.$

Alors $\displaystyle\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\ \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}\,x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\,x^k\ \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}\,x^k.$

$\varphi(v_k)(x) = \dfrac{1}{k+1}\, v_k(x) - \dfrac{1}{(k+1)^2}\, u_k(x) = \left(\dfrac{1}{k+1}\, v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}\, u_k\right)(x)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}\, v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}\, u_k$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![1, n]\!],\ \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}\, u_k \text{ et } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}\, v_k - \frac{1}{(k+1)^2}\, u_k.}$$

3. Rappelons que φ est une application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

Soit λ un réel. Soient f et g deux éléments de E.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda f + g)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x (\lambda f + g)(t)\, \mathrm{d}t = \lambda \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t + \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda\, \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = \big(\lambda\, \varphi(f) + \varphi(g)\big)(x)$ donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\, \varphi(f) + \varphi(g)$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f, g) \in E^2,\ \varphi(\lambda f + g) = \lambda\, \varphi(f) + \varphi(g)$. Par conséquent :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

Rappelons que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\varphi(u_k) = \dfrac{1}{k+1}\, u_k$ et $\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}\, v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}\, u_k$.

Ainsi pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ sont des éléments de $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$.

Alors $\mathrm{Vect}\big(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(u_n), \varphi(v_n)\big)$ est contenu dans $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$.

Soit f un élément de E. f est combinaison linéaire de $(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$.

Comme φ est linéaire, $\varphi(f)$ est combinaison linéaire de $\big(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(u_n), \varphi(v_n)\big)$.

Donc $\varphi(f)$ appartient à $\mathrm{Vect}\big(\varphi(u_1), \varphi(v_1), \varphi(u_2), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(u_n), \varphi(v_n)\big)$.

Ainsi $\varphi(f)$ appartient à $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$ donc à E.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est une fonction de } E,\ \varphi(f) \text{ est une fonction de } E.}$$

► *Remarque* *Ainsi on peut considérer que φ est un endomorphisme de E.* ◄

4. Rappelons que $\mathcal{B} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$ est une base de E et qu'ainsi E est de dimension $2n$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\varphi(u_k) = \dfrac{1}{k+1}\, u_k$ et $\varphi(v_k) = \dfrac{1}{k+1}\, v_k - \dfrac{1}{(k+1)^2}\, u_k$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$ notons alors T_k la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{k+1} & -\dfrac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{k+1} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Alors la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale par blocs égale à $\begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & T_{n-1} & \\ & & & & T_n \end{pmatrix}$.

Alors la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale par blocs égale à $\begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & T_{n-1} & \\ & & & & T_n \end{pmatrix}$ où pour tout k dans $[\![1,n]\!]$ $T_k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k+1} & -\dfrac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{k+1} \end{pmatrix}$.

5. La matrice de φ est une matrice triangulaire supérieure. Alors l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Cet ensemble est $\left\{\dfrac{1}{k+1}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$ et il ne contient pas zéro. 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible et alors φ est un automorphisme de E. Ajoutons que $\operatorname{Sp}\varphi = \operatorname{Sp} M = \left\{\dfrac{1}{k+1}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$.

L'endomorphisme φ de E est bijectif. L'ensemble des valeurs propres de φ est $\left\{\dfrac{1}{k+1}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$.

6. Rappelons que λ est un élément de $\left\{\dfrac{1}{k+1}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$. En particulier λ n'est pas nul.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x^{-1/\lambda} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^{-1/\lambda} \int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t.$

$\widehat{f}$ est une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Alors $x \to \displaystyle\int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $\widehat{f}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

Donc $x \to \displaystyle\int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et de dérivée $\widehat{f}$. De plus $x \to x^{-1/\lambda}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors par produit g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\, x^{-1/\lambda-1} \displaystyle\int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t + x^{-1/\lambda}\, \widehat{f}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\, x^{-1/\lambda-1} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x^{-1/\lambda}\, f(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\, x^{-\frac{1}{\lambda}} \left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \lambda\, f(x)\right).$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\, x^{-\frac{1}{\lambda}} \big(\varphi(f)(x) - \lambda\, f(x)\big).$

Or f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ donc $\varphi(f) = \lambda\, f$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(f)(x) - \lambda\, f(x) = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\, x^{-\frac{1}{\lambda}} \times 0 = 0$. Ainsi g est de dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Donc g est constante sur $]0,+\infty[$. Alors il existe un réel γ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \gamma = g(x) = x^{-1/\lambda} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \gamma\, x^{1/\lambda}$.

Il existe un réel γ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \gamma\, x^{1/\lambda}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda\, f(x) = \varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\, \gamma\, x^{1/\lambda} = \gamma\, x^{1/\lambda-1}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\gamma}{\lambda}\, x^{1/\lambda-1}$ (λ n'est pas nul).

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \gamma \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\gamma}{\lambda}\, x^{1/\lambda - 1}.}$$

7. Soit λ une valeur propre de φ. Soit f un vecteur propre de φ associé à λ.

D'après **Q6.**, il existe un réel γ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\gamma}{\lambda}\, x^{1/\lambda-1}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ell_\lambda(x) = x^{1/\lambda-1}$.

Alors il existe un réel γ tel que $f = \dfrac{\gamma}{\lambda}\, \ell_\lambda$. Donc $f \in \operatorname{Vect}(\ell_\lambda)$.

Ainsi SEP $(\varphi, \lambda) - \{0_E\}$ est contenu dans $\operatorname{Vect}(\ell_\lambda)$. Or 0_E appartient à $\operatorname{Vect}(\ell_\lambda)$ donc SEP $(\varphi, \lambda) \subset \operatorname{Vect}(\ell_\lambda)$.

En particulier $\dim \text{SEP } (\varphi, \lambda) \leqslant \operatorname{Vect}(\ell_\lambda) = 1$.

De plus $\dim \text{SEP } (\varphi, \lambda) \geqslant 1$ car un sous-espace propre n'est pas de dimension nulle. Alors $\dim \text{SEP } (\varphi, \lambda) = 1$.

$$\boxed{\text{La dimension des sous-espaces propres de } \varphi \text{ est } 1.}$$

Nous avons vu que l'ensemble des valeurs propres de φ est $\left\{ \dfrac{1}{k+1}\ ;\ k \in [\![1, n]\!] \right\}$. De plus $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \cdots > \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi φ possède n valeurs propres distinctes et chaque sous-propres de φ est de dimension 1.

Alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de φ est n. Or $\dim E = 2n$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

EXERCICE 2

1. Soit k un élément de $\mathbb{N}$ et soit x un réel strictement positif. Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ f_{k,x}(t) = \big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1}$.

$f_{k,x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de trois fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

• $f_{k,x}$ est positive sur $[1,+\infty[$. $\forall t \in [1,+\infty[,\ t^2\, f_{k,x}(t) = t^2\,\big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1} = \big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x+1} = \dfrac{\big(\ln(t)\big)^k}{t}\, \dfrac{t^{x+2}}{e^t}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \big(t^2\, f_{k,x}(t)\big) = 0 \times 0 = 0$ par croissance comparée. Ainsi $f_{k,x}$ est négligeable devant $t \to \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Or ces deux fonctions sont positives sur $[1,+\infty[$ (une positivité suffit...) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{k,x}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

• $\forall t \in]0,1],\ t^{1-\frac{x}{2}}\ |f_{k,x}(t)| = \left|t^{1-\frac{x}{2}}\,\big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1}\right| = \left|t^{\frac{x}{2}}\,\big(\ln(t)\big)^k\right|\, e^{-t}$.

Alors par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \big(t^{1-\frac{x}{2}}\ |f_{k,x}(t)|\big) = |0| \times 1 = 0$ car $\dfrac{x}{2}$ est strictement positif.

Ainsi $|f_{k,x}|$ est négligable devant $t \to \dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ au voisinage de 0.

Or ces deux fonctions sont positives sur $]0,1]$ (une positivité suffit...) et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ converge car $1 - \dfrac{x}{2} < 1$.

Les règles de comparaison sur les impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^1 f_{k,x}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{k,x}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} \text{ et pour tout réel } x \text{ strictement positif } \int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice x *appartient à* $]-\infty,0]$ *et* k *appartient à* $\mathbb{N}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ *diverge et que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^k\, e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ *converge.*

2. Le cours indique que :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).}$$

Rappelons que Γ est dérivable et non nulle sur $]0,+\infty[$. De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\cdot$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\,\Gamma'(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Psi(x+1) = \dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \dfrac{\Gamma(x) + x\,\Gamma'(x)}{x\,\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \Psi(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}\cdot}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Psi(n+2) - \Psi(n) = \Psi(n+2) - \Psi(n+1) + \Psi(n+1) - \Psi(n) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\cdot}$$

3. Soit A un réel strictement positif. Soit ε un réel appartenant à l'intervalle $]0, A[$.

Soit $\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[\varepsilon, A]$ dans $\mathbb{R}$.

Posons : $\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, < f, g >= \displaystyle\int_\varepsilon^A f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R})$.

L'ingalité de Cauchy-Schwartz indique que $\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, (< f, g >)^2 \leqslant < f, f > < g, g >$.

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([\varepsilon, A], \mathbb{R}))^2, \left(\int_\varepsilon^A f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_\varepsilon^A (f(t))^2\, \mathrm{d}t \int_\varepsilon^A (g(t))^2\, \mathrm{d}t.$$

Soit x un réel strictement positif. $t \to \ln(t)\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}$ et $t \to e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}$ sont continues sur $[\varepsilon, A]$.

Ainsi $\displaystyle\left(\int_\varepsilon^A \left(\left(\ln(t)\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}\right)\right) \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_\varepsilon^A \left(\ln(t)\, e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \mathrm{d}t \int_\varepsilon^A \left(e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\left(\int_\varepsilon^A \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_\varepsilon^A \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_\varepsilon^A e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)$ et ceci pour tout ε dans $]0, A[$.

Rappelons que $\displaystyle\int_0^A \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^A \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^A e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ convergent.

Donc en faisant tendre ε vers 0 dans l'inégalité précédente il vient :

$$\left(\int_0^A \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^A e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right).$$

$$\boxed{\forall (x, A) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right),\ \left(\int_0^A \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A (\ln(t))^2\ e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^A e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right).}$$

4. Soit x un réel strictement positif.

$$\forall A \in]0, +\infty[,\ \left(\int_0^A \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^A e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right).$$

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ convergent.

Donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente il vient :

$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^2 e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t\right).$$

Ainsi $\big(\Gamma'(x)\big)^2 \leqslant \Gamma''(x)\, \Gamma(x)$. Donc :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \big(\Gamma'(x)\big)^2 \leqslant \Gamma(x)\, \Gamma''(x).}$$

Γ et Γ' sont dérivables sur $]0 + \infty[$, Γ ne s'anulle pas sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ \Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\cdot$

Alors Ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ \Psi'(x) = \dfrac{\Gamma''(x)\, \Gamma(x) - \Gamma'(x)\, \Gamma'(x)}{\big(\Gamma(x)\big)^2} = \dfrac{\Gamma(x)\, \Gamma''(x) - \big(\Gamma'(x)\big)^2}{\big(\Gamma(x)\big)^2}\cdot$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ \big(\Gamma(x)\big)^2 > 0$ et $\Gamma(x)\, \Gamma''(x) - \big(\Gamma'(x)\big)^2 \geqslant 0$ d'après ce qui précéde. Alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ \Psi'(x) \geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\Psi \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

5. (a) La méthode naturelle est d'utiliser la décomposition en éléments simples :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k^2-a^2} = \dfrac{1}{2\,a}\,\dfrac{1}{k-a} - \dfrac{1}{2\,a}\,\dfrac{1}{k+a}\cdot$

Pour éviter aux gens qui ne connaissent pas d'avoir des remords je propose de montrer l'égalité de la droite vers la gauche.

Notons que $1+a>0$, $1-a>0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k+1+a>0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k+1-a>0$ car a appartient à $]0,1[$.

Ainsi $1+a$ et $1-a$ sont dans le domaine de définition de Ψ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $k+1+a$ et $k+1-a$ sont dans le domaine de définition de Ψ.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons $A_n = \dfrac{1}{2\,a}\big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\big) - \dfrac{1}{2\,a}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\big)$.

$A_n = -\dfrac{1}{2\,a}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(1+a)\big) + \dfrac{1}{2\,a}\big(\Psi(n+1-a)-\Psi(1-a)\big)$.

Notons encore que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $k+1+a$, $k+a$, $k+1-a$ et $k-a$ sont strictement positifs et en particulier appartiennent au domaine de Ψ. Alors par "télescopage" il vient :

$$A_n = -\frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\big(\Psi(k+1+a)-\Psi(k+a)\big) + \frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\big(\Psi(k+1-a)-\Psi(k-a)\big) = -\frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+a} + \frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-a}\cdot$$

$$A_n = \frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-a}-\frac{1}{k+a}\right) = \frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+a-(k-a)}{(k-a)\,(k+a)} = \frac{1}{2\,a}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\,a}{k^2-a^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2}\cdot$$

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2} = A_n = \frac{1}{2\,a}\big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\big) - \frac{1}{2\,a}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\big)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a}\big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\big) - \frac{1}{2a}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\big).}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}*$.

Ψ est croissante sur $]0,+\infty[$, $0<n+1-a\leqslant n+1+a$, $0<n+1+a\leqslant n+2$ et $0<n\leqslant n+1-a$.

Alors $\Psi(n+1-a)\leqslant\Psi(n+1+a)$, $\Psi(n+1+a)\leqslant\Psi(n+2)$, $\Psi(n)\leqslant\Psi(n+1-a)$.

Donc $0\leqslant\Psi(n+1+a)-\Psi(n+a+1)$, $\Psi(n+1+a)\leqslant\Psi(n+2)$, $-\Psi(n+1-a)\leqslant-\Psi(n)$.

Finalement $0\leqslant\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\leqslant\Psi(n+2)-\Psi(n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^* : 0\leqslant\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\leqslant\Psi(n+2)-\Psi(n).}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0\leqslant\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\leqslant\Psi(n+2)-\Psi(n) = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=0$.

Alors par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\big)=0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a}\big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\big) - \frac{1}{2a}\big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\big)$:

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2}\right) = \frac{1}{2\,a}\big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\big) = \frac{\Psi(1+a)-\Psi(1-a)}{2\,a}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2-a^2} \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = \frac{\Psi(1+a)-\Psi(1-a)}{2\,a}\cdot}$$

PROBLÈME

Dans tout ce problème, p est un réel appartenant à $]0,1[$, $q = 1 - p$, et N est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

PARTIE I : Étude d'un cas particulier.

1. Notons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0,1[$ (et pas $[0,1]$). Nous le signalons tous les ans...

Avant de commencer la simulation (assez faible) demandée, écrivons une fonction simple simulant le jeu dans le cas général.

k sera la variable qui compte les parties. s sera la variable qui donne le nombre de parties gagnées par le joueur qui reste en jeu après la $k^{\text{ème}}$ partie. Notons que :

- Après la première partie s prend la valeur 1.
- Si $k \geqslant 2$ et si le joueur A_k gagne la $k^{\text{ème}}$ partie (qui est la première partie qu'il dispute) s prend la valeur 1. Si ce n'est pas le cas l'autre joueur gagne une nouvelle partie et s prend la valeur de $s+1$.
- Si $k \geqslant 1$, le joueur A_k gagne la $k^{\text{ème}}$ partie avec la probabilité p.
- Le jeu s'arrête dès que s prend la valeur de N.

Voilà tout est dit !

```
Function CAS_GENERAL(N:integer;p:real):integer;

var k,s:integer;

Begin
k:=1;s:=1;

Repeat
k:=k+1;
If random<p then s:=1
             else s:=s+1;
Until(s=N);

CAS_GENERAL:=k;
end;
```

► *Exercice   Écrire la fonction CAS_GENERAL en utilisant While.* ◄

(a) RAS, sauf que l'on aurait pu préciser à quoi correspondait cette fonction !

```
function DUEL:integer;

begin
If random<0.5 then DUEL:=1
               else DUEL:=0;
end;
```

(b) RAS !

```
1 function TEST_VICTOIRE(a,b,c:integer):boolean;
2
3 begin
4 TEST_VICTOIRE:=((a=b) and (b=c));
5 end;
```

► *La ligne 4 surprendra quelques personnes... qui ont oublié que ((a=b) and (b=c))) est un boolean.* ◄

(c) Je préfère écrire une fonction plutôt qu'un programme qui oblige à réécrire les deux fonctions précédentes.

Je donne une version while et une version repeat.

```
1 function TOURNOI:integer;
2
3 var k,a,b,c:integer;
4
5 begin
6 k:=3;a:=DUEL;b:=DUEL;c:=DUEL;
7 while TEST_VICTOIRE(a,b,c)=false do
8     begin
9     k:=k+1;a:=b;b:=c;c:=DUEL;
10    end;
11 TOURNOI:=k;
12 end;
```

```
1 function TOURNOI:integer;
2
3 var k,a,b,c:integer;
4
5 begin
6 k:=2;a:=DUEL;b:=DUEL;
7 Repeat
8 k:=k+1;a:=b;b:=c;c:=DUEL;
9 until TEST_VICTOIRE(a,b,c);
10 TOURNOI:=k;
11 end;
```

► *La ligne 9 surprendra quelques personnes... qui ont oublié que TEST_VICTOIRE(a,b,c) est un boolean.* ◄

Q2. Le tableau suivant récapitule les 8 résultats possibles des trois premiers duels.

duel 1	A0	A0	A0	A0	A1	A1	A1	A1
duel 2	A0	A0	A2	A2	A1	A1	A2	A2
duel 3	A0	A3	A2	A3	A1	A3	A2	A3

S'il y a un gagnant il a obtenu 3 victoires consécutives. Il ne peut donc pas y avoir de gagnant à l'issue du premier duel ou à l'issue du second duel. Donc E_1 et E_2 sont des événements certains. Alors $P(E_1) = P(E_2) = 1$.

Il y a un vainqueur à la fin du troisième duel si et seulement si l'un des joueurs A_0 et A_1 est gagnant.

Le joueur A_0 (resp. A_1) gagne à la fin du troisième duel avec la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

La probabilité pour qu'il y ait un gagnant à l'issue du troisième duel est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c'est à dire $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot$

La probabilité pour qu'il n'ait pas de gagnant à l'issue du troisième duel est donc $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ c'est à dire $\frac{3}{4} \cdot$

Donc $P(E_3) = \frac{3}{4} \cdot$

$$\boxed{P(E_1) = 1,\ P(E_2) = 1 \text{ et } P(E_3) = \frac{3}{4} \cdot}$$

$\frac{1}{2}\,P(E_2) + \frac{1}{4}\,P(E_1) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{3}{4} = P(E_3).$

$$\boxed{P(E_3) = \frac{1}{2}\,P(E_2) + \frac{1}{4}\,P(E_1).}$$

Q3. Soit n un élément de $[\![3, +\infty[\![$. Notons que s'il n'y a pas de vainqueur après le duel numéro n, le vainqueur de ce duel à obtenu une victoire ou deux victoires et pas plus.

Notons E'_n (resp. E''_n) l'événement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel à obtenu une victoire (resp. deux victoires) et pas plus.

Notons que le premier cas le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel est A_n et dans le second c'est A_{n-1}.

E_n est réunion disjointe de E'_n et E''_n donc $P(E_n) = P(E'_n) + P(E''_n)$.

E'_n se réalise si et seulement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro $n-1$ et A_n gagne son premier duel. Ainsi $P(E'_n) = P(E_{n-1}) \times \frac{1}{2}$.

E''_n se réalise si et seulement il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro $n-2$ et A_{n-1} gagne les duels numéros $n-1$ et n .

Ainsi $P(E''_n) = P(E_{n-2}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot$ $P(E''_n) = \frac{1}{4}\,P(E_{n-2})$.

Par conséquent $P(E_n) = P(E'_n) + P(E''_n) = \frac{1}{2}\,P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}\,P(E_{n-2})$.

$$\boxed{\forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ P(E_n) = \frac{1}{2}\,P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}\,P(E_{n-2}) \qquad (\mathcal{R}_1).}$$

► *Remarque* *En gardant $N = 3$ et en prenant p quelconque on a :*

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1 \ \textit{et}\ \forall n \in [\![3, +\infty[\![,\ P(E_n) = p\,P(E_{n-1}) + p\,q\,P(E_{n-2}).}$$ ◄

Q4. $\big(P(E_n)\big)_{n_i n[\![1,+\infty[\![}$ est une suite réelle vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

Son équation caractéristique est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{4} = 0$ (oui $z \in \mathbb{C}$! !).

$\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 - \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{4} = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{16} = \left(z - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(z - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right).$

L'équation caractéristique précédente à deux racines distinctes appartenant à $\mathbb{R}$: $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot$

Alors il existe deux réels λ et μ tel que $\forall n \in [\![1, +\infty[\![,\ P(E_n) = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$.

On a encore $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ P(E_n) = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n$! !

$$\boxed{\text{Il existe quatre réels } \lambda,\ \mu,\ r_1,\ r_2 \text{ tels que } \forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ P(E_n) = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n.}$$

▶ *Remarque* *Reprenons* $\forall n \in [\![1, +\infty[\![,\ P(E_n) = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$ *avec* $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ *et* $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot$

En résolvant le système $\begin{cases} \lambda\, r_1 + \mu\, r_2 = P(E_1) = 1 \\ \lambda\,(r_1)^2 + \mu\,(r_2)^2 = P(E_2) = 1 \end{cases}$ *il vient* $\lambda = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ *et* $\mu = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot$

Ainsi $\forall n \in [\![1, +\infty[\![, P(E_n) = \left(1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n.$

Notons que l'on a encore : $\forall n \in [\![1, +\infty[\![, P(E_n) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right).$

On peut simplifier les calculs en posant $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = P(E_{n+1})$. *Le système initial est plus simple...* ◀

▶ *Exercice* *Dans le cas* $N = 3$ *et* p *quelconque, montrer que* $r_1 = \dfrac{p - \sqrt{p^2 + 4\,pq}}{2}$, $r_2 = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4\,pq}}{2}$ *et*

$\forall n \in [\![1, +\infty[\![, P(E_n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\sqrt{p^2 + 4\,pq}}\right) r_1^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\sqrt{p^2 + 4\,pq}}\right) r_2^n.$

Ou encore : $\forall n \in [\![1, +\infty[\![, P(E_n) = \dfrac{1}{p\sqrt{p^2 + 4\,pq}}\,(r_2^{n+1} - r_1^{n+1}).$

Disons un mot sur le calcul. En résolvant le système $\begin{cases} \lambda\, r_1 + \mu\, r_2 = P(E_1) = 1 \\ \lambda\,(r_1)^2 + \mu\,(r_2) = P(E_2) = 1 \end{cases}$ *il vient :*

$\lambda = \dfrac{1 - r_2}{r_1\,(r_1 - r_2)}$ *et* $\mu = \dfrac{1 - r_1}{r_2\,(r_2 - r_1)}\cdot$

Une piste pour le calcul de λ. $\lambda = \dfrac{1 - r_2}{r_1\,(r_1 - r_2)} = \dfrac{r_2 - r_2^2}{r_1\, r_2\,(r_1 - r_2)}\cdot$

Or $r_2^2 = p\, r_2 + pq$, $r_1 + r_2 = p$ *et* $r_1\, r_2 = -pq$. *Alors* $r_2 - r_2^2 = r_2 - p\, r_2 - pq = q\, r_2 - pq = q\,(r_2 - p) = q\,(-r_1)$.

$\lambda = \dfrac{-q\, r_1}{(-pq)\,(r_1 - r_2)} = \dfrac{r_1}{p\,(r_1 - r_2)} = -\dfrac{r_1}{p\sqrt{p^2 + 4\,pq}}$. *De même* $\mu = \dfrac{r_2}{p\sqrt{p^2 + 4\,pq}}$. *La suite est claire.* ◀

Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$. $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot$

$\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$. Alors $0 > r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} > \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} > -1$ et $0 < r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1+3}{4} = 1$.

Donc r_1 et r_2 sont deux éléments de $]-1, 1[$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = \lim\limits_{n\to_i nfi} r_2^n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0.}$$

Q5. La suite $\big(P(E_n)\big)_{n\geqslant 2}$ est décroissante pour l'inclusion car pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$ l'événement E_{n+1} est contenu dans l'événement E_n.

Donc le théorème de la limite monotone montre que $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$.

$$\boxed{\text{La probabilité de } P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) \text{ est nulle. L'événement } \bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n \text{ est quasi imposible.}}$$

Notons que l'événement "le tournoi désignera un vainqueur" est le complémentaire de l'événement $\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$. Alors :

$$\boxed{\text{la probabilité de l'événement "le tournoi désignera un vainqueur" est égale à 1. Cet événement est quasi certain.}}$$

► *Les trois derniers résultats encadrés valent encore pour $n = 3$ et p quelconque (en attendant mieux...) car $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$.* ◄

PARTIE II : Étude du cas général.

1. Ici il y a visiblement un problème. Si $A_k(n)$ se réalise, nécessairement le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n. Ainsi $A_k(n) \subset E_n$. Alors $E_n \cap A_k^{(n)} = A_k^{(n)}$.

Alors $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \dfrac{P\big(E_n \cap A_k^{(n)}\big)}{P\big(A_k^{(n)}\big)} = \dfrac{P\big(A_k^{(n)}\big)}{P\big(A_k^{(n)}\big)} = 1$! ! Donc on décroche et on passe à la question suivante ! !

2. Soit n un élément de $[\![N, +\infty[\![$. Reprécisons légèrement les $A_k^{(n)}$. Pour tout k appartenant à $[\![1, N-1]\!]$ notons $A_k^{(n)}$ l'événement "le tournoi n'est pas terminé après le $n^{\text{ème}}$ duel et le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel a obtenu exactement k victoires".

E_n est réunion disjointe des événements $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$, ..., $A_{N-1}^{(n)}$. Donc $P(E_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} P\big(A_k^{(n)}\big)$.

Soit k un élément de $[\![1, N-1]\!]$. $A_k^{(n)}$ se réalise si et seulement :

- 1. Le tournoi n'est pas terminé après le $(n-k)^{\text{ème}}$ duel.
- 2. Le joueur A_{n-k+1} gagne les duels $n-k+1$, $n-k+2$, ..., n. Notons $B_k^{(n)}$ ce dernier événement.

Ainsi $A_k^{(n)} = E_{n-k} \cap B_k^{(n)}$. Donc $P\big(A_k^{(n)}\big) = P\big(E_{n-k} \cap B_k^{(n)}\big) = P(E_{n-k})\, P_{E_{n-k}}\big(B_k^{(n)}\big)$.

Observons que A_{n-k+1} gagne le duel $n-k+1$ avec la probabilité p.

Si k est supérieur ou égal à 2, pour tout i dans $[\![2, k]\!]$ le joueur A_{n-k+1} gagne le duel $n-k+i$ avec la probabilié q.

Alors $P\big(A_k^{(n)}\big) = P(E_{n-k})\, P_{E_{n-k}}\big(B_k^{(n)}\big) = P(E_{n-k})\, p\, q^{k-1} = p\, q^{k-1}\, P(E_{n-k})$.

Finalement $P(E_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} P\big(A_k^{(n)}\big) = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{n-k})$.

$$\boxed{\forall n \in [\![N, +\infty[\![, \ P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{n-k}) \qquad (\mathcal{R}_2).}$$

3. Pour qu'il y ait un gagnant à ce tournoi il est nécessaire qu'un joueur gagne N duels consécutifs.

Il ne peut donc y avoir de vainqueur à la fin du $k^{\text{ème}}$ duel si k est un élément de $[\![1, N-1]\!]$.

Ainsi E_1, E_2, ..., E_{N-1} sont des événements certains. Alors :

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_{N-1}) = 1.}$$

$N \geqslant N$ (! !) donc la relation $(\mathcal{R}_2)$ permet d'écrire : $P(E_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{N-k})$.

Notons que $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ N-k \in [\![1, N-1]\!]$. Donc $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ P(E_{N-k}) = 1$.

Alors $P(E_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} = p\, \frac{1-q^{N-1}}{1-q} = 1 - q^{N-1}$.

$$\boxed{P(E_N) = 1 - q^{N-1}.}$$

4. Soit n un élément de $[\![N, +\infty[\![$. $P(E_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{n+1-k})$.

Un petit changement d'indice donne : $P(E_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-2} p\, q^{k}\, P(E_{n-k})$. Alors :

$P(E_{n+1}) = p\, P(E_n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k}\, P(E_{n-k}) - p\, q^{N-1}\, P(E_{n-(N-1)})$.

Ainsi $P(E_{n+1}) = p\, P(E_n) + q \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{n-k}) - p\, q^{N-1}\, P(E_{n-N+1}) = p\, P(E_n) + q\, P(E_n) - p\, q^{N-1}\, P(E_{n-N+1})$.

Donc $P(E_{n+1}) = P(E_n) - p\, q^{N-1}\, P(E_{n-N+1})$. Finalement $P(E_n) - P(E_{n+1}) = p\, q^{N-1}\, P(E_{n-N+1})$.

$$\boxed{\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ P(E_n) - P(E_{n+1}) = p\, q^{N-1}\, P(E_{n-N+1}) \qquad (\mathcal{R}_3).}$$

5. Q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, k\, X^{k-1} - 0 = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, k\, X^{k-1}$.

En particulier Q est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et Q' est strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Donc Q est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Alors Q définie une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[Q(0), \lim_{x \to +\infty} Q(x)[$.

Notons que $Q(0) = -1$ et que $\lim_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$. Alors 0 appartient à $[Q(0), \lim_{x \to +\infty} Q(x)[$.

Par conséquent il existe un unique élément r_N dans $[0, +\infty[$ tel que $Q(r_N) = 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } Q(x) = 0 \text{ possède une unique solution dans l'intervalle } [0, +\infty[.}$$

$Q(1) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1} \right) - 1 = p\, \frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = 1 - q^{N-1} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N)$.

La stricte croissance de Q sur $[0, +\infty[$ donne $1 < r_N$.

Nous avons vu plus haut que Q' est strictement positive sur $[0, +\infty[$. Donc $Q'(r_N) > 0$.

$$\boxed{r_N > 1 \text{ et } Q'(r_N) > 0.}$$

6. Montrons ce résultat à l'aide d'une récurrence d'ordre $N-1$.

- $r_N > 1$ donc $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ (r_N)^{N-k} > 1$. Ainsi : $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{k-N} > 1 = P(E_k)$.

Ainsi la propriété est vraie pour 1, 2, ..., $N-1$.

• Soit n un élément de $[\![N,+\infty[\![$. Supposons la propriété vraie pour $n-N+1$, $n-N+2$, ..., $n-1$ et montrons la pour n.

L'hypothèse de récurrence donne $\forall k\in[\![1,N-1]\!],\ 0\leqslant P(E_{n-k})\leqslant\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}$.

Alors $0\leqslant P(E_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}p\,q^{k-1}\,P(E_{n-k})\leqslant\sum_{k=1}^{N-1}p\,q^{k-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}=\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}\sum_{k=1}^{N-1}p\,q^{k-1}\,r_N^k$.

Rappelons que $Q(r_N)=0$ donc $0=Q(r_N)=\sum\limits_{k=1}^{N-1}p\,q^{k-1}\,r_N^k-1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}p\,q^{k-1}\,r_N^k=1$.

Alors $0\leqslant P(E_n)\leqslant\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N}\times 1=\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ P(E_n)\leqslant\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.}$$

7. $\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ 0\leqslant P(E_n)\leqslant\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N}=r_N^N\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n}$.

$r_N>1$ donc $\left|\dfrac{1}{r_N}\right|<1$. Alors la série de terme général $\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n}$ est convergente.

Il en est de même de la série de terme général $r_N^N\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n}$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $P(E_n)$ converge.

$$\boxed{\text{La série }\sum_{n\geqslant 1}P(E_n)\text{ converge.}}$$

$\forall n\in[\![N,+\infty[\![,\ P(E_n)-P(E_{n+1})=p\,q^{N-1}\,P(E_{n-N+1})$ donc $\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\ P(E_{n+N-1})-P(E_{n+N})=p\,q^{N-1}\,P(E_n)$.

$\forall s\in[\![1,+\infty[\![,\ p\,q^{N-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{s}P(E_n)=\sum_{n=1}^{s}\big(P(E_{n+N-1})-P(E_{n+N})\big)=P(E_N)-P(E_{s+N})$.

$\forall s\in[\![1,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{s}P(E_n)=\frac{1}{p\,q^{N-1}}\big(P(E_N)-P(E_{s+N})\big)$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}P(E_n)$ converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(E_n)=0$.
Alors :

$$\lim_{s\to+\infty}\sum_{n=1}^{s}P(E_n)=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{1}{p\,q^{N-1}}\big(P(E_N)-P(E_{s+N})\big)\right)=\frac{P(E_N)}{p\,q^{N-1}}=\frac{1-q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}\cdot\text{ Donc }\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_n)=\frac{1-q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}\cdot$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_n)=\frac{1-q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}\cdot}$$

8. (a) Notons que si $n\in[\![2,N-1]\!]$, $E_{n-1}\cap\overline{E_n}=\emptyset$ et $\{X=n\}=\emptyset$.

Donc si $n\in[\![2,N-1]\!]$, $P\big(E_{n-1}\cap\overline{E_n}\big)=0=P(X=n)$. Soit n un élément de $[\![N,+\infty[\![$.

$\{X=n\}$ se réalise si et seulement si le gagnant n'a pas été obtenu à l'issue des duels 1, 2, ..., n-1 et si il est obtenu au duel numéro n. Donc $\{X=n\}=E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{n-1}\cap\overline{E_n}$. Or $E_{n-1}\subset E_{n-2}\subset\cdots\subset E_1$ donc $E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{n-1}=E_{n-1}$.

Ainsi $\{X=n\}=E_{n-1}\cap\overline{E_n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![, \text{ les événements } E_{n-1}\cap\overline{E_n} \text{ et } \{X=n\} \text{ sont égaux.}}$$

(b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $E_{n-1}=\big(E_{n-1}\cap E_n\big)\cup\big(E_{n-1}\cap\overline{E_n}\big)=E_n\cup\big(E_{n-1}\cap\overline{E_n}\big)$ (car $E_n\subset E_{n-1}$).

Par incompatibilité il vient : $P(E_{n-1})=P(E_n)+P(E_{n-1}\cap\overline{E_n}\big)=P(E_n)+P(X=n))$.

Donc $P(X=n)=P(E_{n-1})-P(E_n)$ et ceci pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$.

Rappelons que $X(\Omega)=\{0\}\cup[\![N,+\infty[\![$. Soit s un élément de $[\![N,+\infty[\![$. Posons $T_s=0\times P(X=0)+\displaystyle\sum_{n=N}^{s} n\,P(X=n)$.

$T_s=\displaystyle\sum_{n=N}^{s} n\,P(X=n)=\sum_{n=2}^{s} n\,P(X=n)$ car $P(X=2)=P(X=3)=\cdots=P(X=n-1)=0$.

$$T_s=\sum_{n=2}^{s} n\,P(X=n)=\sum_{n=2}^{s} n\,\big(P(E_{n-1})-P(E_n)\big)=\sum_{n=2}^{s} n\,P(E_{n-1})-\sum_{n=2}^{s} n\,P(E_n).$$

$$T_s=\sum_{n=1}^{s-1}(n+1)\,P(E_n)-\sum_{n=2}^{s} n\,P(E_n)=\sum_{n=1}^{s-1}(n+1)\,P(E_n)-\left(\sum_{n=1}^{s-1} n\,P(E_n)-P(E_1)+s\,P(E_s)\right).$$

$T_s=\displaystyle\sum_{n=1}^{s-1} P(E_n)+1-s\,P(E_s)$ (car $P(E_1)=1$).

Rappelons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(E_n)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)=\frac{1-q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}\cdot$

De plus $\forall s\in[\![1,+\infty[\![,\ 0\leqslant s\,P(E_s)\leqslant s\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{s-N}=r_N^N\left(s\left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{s}\right)$.

Or $\left|\dfrac{1}{r_N}\right|<1$ donc $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(r_N^N\left(s\left(\frac{1}{r_N}\right)^{s}\right)\right)=r_N^N\times 0=0$. Alors par encadrement on obtient $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\big(s\,P(E_s)\big)=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} T_s=\lim_{s\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{s-1} P(E_n)+1-s\,P(E_s)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)+1-0=\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)+1$.

Alors $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(0\times P(X=0)+\sum_{n=N}^{s} n\,P(X=n)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)+1$.

Ainsi la série de terme général $n\,P(X=n)$ converge et est à termes positifs. Elle est donc absolument convergente. Donc :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$$

$\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(0\times P(X=0)+\sum_{n=N}^{s} n\,P(X=n)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)+1$ donc :

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(E_n)+1.}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(E_n)+1=\frac{1-q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}+1=\frac{1-q^{N-1}+p\,q^{N-1}}{p\,q^{N-1}}=\frac{1-(1-p)\,q^{n-1}}{p\,q^{N-1}}=\frac{1-q^N}{p\,q^{n-1}}\cdot$$

$$\boxed{E(X)=\frac{1-q^N}{p\,q^{n-1}}\cdot}$$

PARTIE III : Calcul de $\mathbf{P(E_n)}$.

Q1. Montrons d'abord les résultats admis.

$$(q\,X-1)\,Q(X)=(q\,X-1)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(p\,q^{k-1}\,X^k\right)-1\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\left(p\,q^k\,X^{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{N-1}\left(p\,q^{k-1}\,X^k\right)-q\,X+1.$$

$$(q\,X-1)\,Q(X)=\sum_{k=2}^{N}\left(p\,q^{k-1}\,X^k\right)-\sum_{k=1}^{N-1}\left(p\,q^{k-1}\,X^k\right)-q\,X+1=p\,q^{N-1}\,X^N-p\,X-q\,X+1=1-X+p\,q^{N-1}\,X^N.$$

$(q\,X-1)\,Q(X)=R(X)$.

$X\,R'(X)-N\,R(X)=X\left(0-1+p\,q^{N-1}\,N\,X^{N-1}\right)-N\left(1-X+p\,q^{N-1}\,X^n\right)$.

$X\,R'(X)-N\,R(X)=-X+N\,p\,q^{N-1}\,X^N-N+N\,X-N\,p\,q^{N-1}\,X^n=(N-1)\,X-N$.

$$\boxed{(q\,X-1)\,Q(X)=R(X) \text{ et } X\,R'(X)-N\,R(X)=(N-1)\,X-N.}$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q'. Alors $R(z)=(q\,z-1)\,Q(z)=0$ car $Q(z)=0$.

$R'(X)=q\,Q(X)+(q\,X-1)\,Q'(X)$ donc $R'(z)=q\,Q(z)+(q\,z-1)\,Q'(z)=0$ car $Q(z)=Q'(z)=0$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est un complexe racine de } Q \text{ et de } Q',\ z \text{ est racine de } R \text{ et de } R'.}$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q'. Alors z est racine de R et de R'.

Rappelons que $X\,R'(X)-N\,R(X)=(N-1)\,X-N$.

Alors $0=z\,R'(z)-N\,R(z)=(N-1)\,z-N$. Donc $z=\dfrac{N}{N-1}\cdot$ Ainsi z est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est un complexe racine de } Q \text{ et de } Q',\ z \text{ est un réel qui appartient à l'intervalle } [0,+\infty[.}$$

Soit z un complexe racine de Q et de Q'. Alors d'après ce qui précéde z est un réel qui appartient à l'intervalle $[0,+\infty[$.

Or $\forall x\in[0,+\infty[,\ Q'(x)=\sum_{k=1}^{N-1} p\,q^{k-1}\,k\,x^{k-1}>0$. Ceci contredit $z\in[0,+\infty[$ et $Q'(z)=0$.

$$\boxed{\text{Chaque racine complexe de } Q \text{ est de multiplicité } 1.}$$

Q appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc Q appartient à $\mathbb{C}[X]$. De plus Q est de degré $N-1$ et $N-1\geqslant 2$.

Alors dans $\mathbb{C}[X]$, Q est scindé et à racines simples d'après ce qui précède.

Notons que $Q(0)=-1$. Ainsi les racines de Q dans $\mathbb{C}$ ne sont pas nulles.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ainsi il existe un complexe } \gamma \text{ (et même un réel) non nul et } N-1 \text{ complexes } z_1,\ z_2,\ ...,\ z_{N-1} \text{ non nuls et deux à}\\ \text{deux distincts tels que } Q=\gamma\,(X-z_1)\,(X-z_2)\cdots(X-z_{N-1}).\end{array}}$$

Q2. (a) • Comme z_1, z_2, ..., z_{N-1} sont des complexes non nuls, f est bien une application de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans $\mathbb{C}^{N-1}$.

• Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Soient S et T deux éléments de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$.

$$f(\lambda\,S+T)=\left((\lambda\,S+T)\left(\frac{1}{z_1}\right),(\lambda\,S+T)\left(\frac{1}{z_2}\right),\ldots,(\lambda\,S+T)\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right).$$

$f(\lambda\, S+T)=\left(\lambda\, S\left(\dfrac{1}{z_1}\right)+T\left(\dfrac{1}{z_1}\right),\lambda\, S\left(\dfrac{1}{z_2}\right)+T\left(\dfrac{1}{z_2}\right),\ldots,\lambda\, S\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)+T\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)\right).$

$f(\lambda\, S+T)=\lambda\left(S\left(\dfrac{1}{z_1}\right),S\left(\dfrac{1}{z_2}\right),\ldots,S\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)\right)+\left(T\left(\dfrac{1}{z_1}\right),T\left(\dfrac{1}{z_2}\right),\ldots,T\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)\right)=\lambda\, f(S)+f(T).$

$\forall \lambda\in\lambda,\ \forall (P,Q)\in\mathbb{C}_{N-2}[X]\times\mathbb{C}_{N-2}[X],\ f(\lambda\, S+T)=\lambda\, f(S)+f(T)$. f est une application linéaire.

- Soit S un élément de $\operatorname{Ker} f$. $f(S)=0_{\mathbb{C}^{N-1}}$ donc $S\left(\dfrac{1}{z_1}\right)=S\left(\dfrac{1}{z_2}\right)=\cdots=S\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)=0.$

$z_1,\ z_2,\ ...,\ z_{N-1}$ sont $N-1$ nombres complexes deux à deux distincts il en est de même pour $\dfrac{1}{z_1},\ \dfrac{1}{z_2},\ ...,\ \dfrac{1}{z_{N-1}}$.

$\dfrac{1}{z_1},\ \dfrac{1}{z_2},\ ...,\ \dfrac{1}{z_{N-1}}$ sont $N-1$ racines deux à deux distinctes de S qui est un polynôme de degré au plus $N-2$.

Alors S est le polynôme nul.

Donc le noyau de f est réduit au polynôme nul. Ainsi f est une application linéaire injective de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans $\mathbb{C}^{N-1}$.

Or $\dim\mathbb{C}_{N-2}[X]=N-1$ et $\dim\mathbb{C}^{N-1}=N-1$ donc $\dim\mathbb{C}_{N-2}[X]=\dim\mathbb{C}^{N-1}<+\infty$.

Dans ces conditions f est une application linéaire bijective de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans $\mathbb{C}^{N-1}$.

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{C}_{N-2}[X] \text{ sur } \mathbb{C}^{N-1}.}$$

(b) $\forall k\in[\![0,N-2]\!],\ f(X^k)=\left(\left(\dfrac{1}{z_1}\right)^k,\left(\dfrac{1}{z_2}\right)^k,\ldots,\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)^k\right)=\left(\dfrac{1}{(z_1)^k},\dfrac{1}{(z_2)^k},\ldots,\dfrac{1}{(z_{N-1})^k}\right).$

Pour tout k dans $[\![0,N-2]\!]$, la matrice des coordonnées de $f(X^k)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$ est $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(z_1)^k}\\ \dfrac{1}{(z_2)^k}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{(z_{N-1})^k}\end{pmatrix}$.

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La matrice } A \text{ de } f \text{ dans les bases canoniques de } \mathbb{C}_{N-2}[X] \text{ et de } \mathbb{C}^{N-1} \text{ est :}\\ \begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{z_1} & \cdots & \dfrac{1}{(z_1)^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_1)^{N-2}}\\ 1 & \dfrac{1}{z_2} & \cdots & \dfrac{1}{(z_2)^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_2)^{N-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \dfrac{1}{z_{N-2}} & \cdots & \dfrac{1}{(z_{N-2})^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_{N-2})^{N-2}}\\ 1 & \dfrac{1}{z_{N-1}} & \cdots & \dfrac{1}{(z_{N-1})^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_{N-1})^{N-2}}\end{pmatrix}.\end{array}}$$

$$\boxed{\text{La transposée de } A \text{ est : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{z_1} & \dfrac{1}{z_2} & \cdots & \dfrac{1}{z_{N-2}} & \dfrac{1}{z_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{(z_1)^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_2)^{N-3}} & \cdots & \dfrac{1}{(z_{N-2})^{N-3}} & \dfrac{1}{(z_{N-1})^{N-3}} \\ \dfrac{1}{(z_1)^{N-2}} & \dfrac{1}{(z_2)^{N-2}} & \cdots & \dfrac{1}{(z_{N-2})^{N-2}} & \dfrac{1}{(z_{N-1})^{N-2}} \end{pmatrix}.}$$

(c) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{N-1}$.

$(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si ${}^tA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ P(E_2) \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$.

A est la matrice d'un isomorphisme de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ dans $\mathbb{C}^{N-1}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$.

Donc A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{C})$. Alors ${}^tA$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{C})$.

Ainsi le système $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1}$ et ${}^tA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ P(E_2) \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$ admet une solution et une seule.

Donc $(\mathcal{S})$ admet une solution et une seule.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le système } (S) : (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} & = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} + \dfrac{x_2}{z_2} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{z_{n-1}} & = P(E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \dfrac{x_2}{(z_2)^{N-2}} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} & = P(E_{n-1}) \end{array} \right. \\ \text{admet une solution et une seule que nous noterons } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}). \end{array}}$$

3. Soit n un élément de $[\![N, +\infty[\![$. Montrons que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k}$.

Si k appartient $[\![1, N-1]\!]$, $n-k \geqslant 1$ et $u_{n-k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k} = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \sum_{k=1}^{N-1} \left(p\, q^{k-1} \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \right)$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{z_j^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, z_j^k \right)$. Rappelons que $\forall j \in [\![1, N-1]\!]$, $0 = Q(z_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, z_j^k - 1$.

Alors $\forall j \in [\![1, N-1]\!]$, $\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, z_j^k = 1$. Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{z_j^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, z_j^k \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{z_j^{n-1}} = u_n$.

Donc $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } [\![N,+\infty[\![,\ u_n = \sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k}.}}$$

Montrons par une récurrence d'ordre $N-1$ que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(E_n) = u_n$.

• $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1})$ est solution de $(\mathcal{S})$ donc $\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ P(E_n) = \dfrac{\alpha_1}{z_1^{n-1}} + \dfrac{\alpha_2}{z_2^{n-1}} + \cdots + \dfrac{\alpha_{N-1}}{z_{N-1}^{n-1}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}$.

Ainsi, $\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ P(E_n) = u_n$. La propriété est vraie pour 1, 2, ..., $N-1$.

• Soit n dans $[\![N, +\infty[\![$. Supposons la propriété vraie pour $n-N$, $n-N+1$, ..., $n-1$ et montrons la pour n.

L'hypothèse de récurrence indique que $\forall k \in [\![1, N-1]\!], P(E_{n-k}) = u_{n-k}$.

De plus $(\mathcal{R}_2)$ donne $P(E_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, P(E_{n-k})$. lors $P(E_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} p\, q^{k-1}\, u_{n-k} = u_n$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*,\ P(E_n) = u_n.}$$
