

Exercice 1

proposée par J. Seb. DUPRAT
pour Major-Prépa

1)a) on a :

Version avec coquilles corrigées

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, t_k(x) &= \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{x \cdot x^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \\ &= \frac{x}{k} t_{k-1}(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, t_k(x) = \frac{x}{k} t_{k-1}(x)}$$

1)b) on a :

$$\boxed{\begin{aligned}t &= k/x * t \\ S &= t + S\end{aligned}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+, g_n(x) = f_n(x) - a$

La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que fonction polynomiale.

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g_n'(x) = \sum_{k=0}^n k \frac{x^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ d'où par le changement de variable } k' = k-1:$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

d'où comme $0 < 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g'_n(x) > 0$$

Donc la fonction g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

et comme g_n est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}^+$, avec $\begin{cases} g_n(0) = 1-a \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty \end{cases}$

g_n définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1-a, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! u_n \in \mathbb{R}^+, g_n(u_n) = 0, \text{ d'où:}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! u_n \in \mathbb{R}^+, f(u_n) = a}$$

3)a) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ et comme } x \in \mathbb{R}^+$$

$$\geq 0$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (f_n(x)) \text{ est croissante.}}$$

De plus, comme la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge (série exponentielle)

de somme e alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right)$ converge de limite e^x

$$\text{i.e. } \boxed{\text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge de limite } e^x}$$

(2)

3) b)

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = a$ (cf 2) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_{n+1}) = a$
 d'où: (car c'est vrai pour tout n)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(u_n) - f_{n+1}(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_n) - a$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^k}{k!} - a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{u_n^k}{k!} - a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(u_n) - a \text{ or } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_n) = a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \text{ or } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0 \text{ cf 2)}$$

$$\geq 0$$

d'où:

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$$

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est ^{str.} croissante, d'après la 
 contraposée de la définition d'une fonction ^{str.} croissante, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_{n+1}$$

Rappel: fonction f ^{str.} croissante sur I : $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
 contraposée de cette définition: $\forall (a, b) \in I^2, f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$
 donc ici, on applique la contraposée à $a = u_n$
 $b = u_{n+1}$

(3)

Ainsi, (U_n) est décroissante

3)c) comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ cf 2), donc (U_n) est minorée
(par 0)
et comme (U_n) est décroissante (cf 3b))

d'après le théorème de la limite monotone:

(U_n) converge.

4)a) comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n(x))$ est croissante
on peut écrire:

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n, f_p(x) \leq f_n(x)$, d'où pour $x = U_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n, f_p(U_n) \leq f_n(U_n)$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
la suite $(f_p(x))$ converge de

limite e^x cf. 3a):
par théorème de prolongement des inégalités
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(U_n) \leq e^{U_n}$ or par 2), $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(U_n) = a$ (P → 100)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, a \leq e^{U_n}$ d'où en composant par $\ln$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a) \leq U_n$ (1)

4)b) On a

$\forall n \in \mathbb{N}^*, K \leq U_n$, d'où en composant par f_n ($n \in \mathbb{N}$)
croissante sur $\mathbb{R}^+$ (cf 3a) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(K) \leq f_n(U_n) \text{ i.e.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(K) \leq a$ et comme $(f_n(K))$ converge
de limite e^K (cf 3a)
par théorème de prolongement
des inégalités: ($n \rightarrow +\infty$):

$$\boxed{e^K \leq a}$$

4)c) Comme la suite (U_n) converge (cf 3a)
on note l ($l \in \mathbb{R}$) sa limite. ~~0~~

en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (1), par
théorème de prolongement des inégalités:

$$f_n(a) \leq l \quad (2)$$

De plus, comme (U_n) est décroissante et converge, elle est minorée
par sa limite: $\forall n \in \mathbb{N}, l \leq U_n$

Donc d'après 4)b), on en déduit que: $e^l \leq a$

d'où en composant cette relation par f_n croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$f \leq P_n(a) \quad (3)$$

(4)

Donc d'après les relations (2) et (3), on en déduit:

$$f = P_n(a)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = P_n(a)}$$

5)a) Comme (U_n) est convergente (cf. 3)c))
on peut directement conclure:

$$\boxed{(U_n) \text{ est bornée.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5)b) La fonction $\exp$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $\exp$ à l'ordre n entre 0 et U_n , on a:

$$\left| \exp(U_n) - \sum_{k=0}^n \frac{(U_n-0)^k}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| \leq \sup_{[0, U_n]} |\exp^{(n+1)}| \times \frac{|U_n-0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (4)$$

et comme $\exp$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, d'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à $\exp$ à l'ordre n entre 0 et U_n :

$$\exp(U_n) = \sum_{k=0}^n \frac{U_n^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^{U_n} \frac{(U_n-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt \quad (5)$$

Or, par montée finie immédiate, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}^+, \exp^{(k)}(x) = \exp(x)$$

d'où pour $x = u_n$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \exp^{(k)}(u_n) = e^{u_n}$$

et comme $e^0 < e^{u_n}$, alors $\sup_{[0, u_n]} |\exp^{(k)}| = e^{u_n}$

Enfin, d'après les relations (4) et (5) et $\forall t \in \mathbb{R}, \exp^{(n+1)}(t) = e^t$

$$\left| \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^n}{n!} dt \right| \leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{i.e.}$$

$$|R_n(u_n)| \leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et d'après 5)a) :

$|u_n| \leq M$ donc, par croissance
des fonctions
en
présence
sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} |u_n|^{n+1} \leq M^{n+1} \\ e^{u_n} \leq e^M \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$

(5)

5)c) on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{R_n(u_n)}{\frac{1}{n^2}} = n^2 A_n(u_n)$$

d'après 5)b) et comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, |n^2 R_n(u_n)| &\leq e^M \frac{n^2 M^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{💡} \\ &\leq e^M \frac{n^2 M^2 M^{n-1}}{(n+1)n(n-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } e^M \frac{n^2 M^2 M^{n-1}}{(n+1)n(n-1)!} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^M M^2 \frac{n^2 M^{n-1}}{n^2 (n-1)!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^M M^2 \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

or par négligabilité usuelle, $M^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((n-1)!)$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^M M^2 \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^M \frac{n^2 M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ainsi, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 R_n(u_n)) = 0$ j.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n(u_n)}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

Ainsi, par caractérisation de la négligeabilité:

$$\boxed{R_n(u_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

6)a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
comme $\exp$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$,
D'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à $\exp$
à l'ordre n entre 0 et x :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

d'où comme
en 5b):

$$= f_n(x) + R_n(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = f_n(x) + R_n(x)}$$

6)b) d'après 6)a), on a pour $x = u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n), \text{ d'où comme } \forall n \in \mathbb{N}, f_n(u_n) = a$$

$$R_n(u_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$e^{u_n} = a + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ (6)}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + a - \ln(a)}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a - \ln(a)}{e^x} \right)$ par algèbre des limites ⑥

$$= 0 + 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

$$= 0$$

d'où $x + a - \ln(a) = o(e^x)$, d'où en posant $x = u_n$

lorsque $x \rightarrow +\infty$,
 $n \rightarrow +\infty$

$$u_n + a - \ln(a) = o(e^{u_n}) \quad (7)$$

et d'après ⑥ et ⑦ :

$$u_n + a - \ln(a) = a + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ d'où :}$$

$$\boxed{u_n = \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

7)a) Soit $n \in \mathbb{N}$
 Comme $\exp$ est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}$, d'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à $\exp$ à l'ordre $n+1$ entre 0 et x : ($x \in \mathbb{R}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \exp^{(k)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

de même qu'en 5)b) et 6)a);

⑦

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

7)b) D'où pour $x = u_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, e^{u_n} &= f(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &= a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n) \quad (8) \end{aligned}$$

⚠ $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(u_n)$

On effectue alors le même raisonnement qu'à la question 5)b) mais en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ appliquée à $\exp$ entre 0 et u_n .

On trouve alors:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |R_{n+1}(u_n)| &\leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+2}}{(n+2)!} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, e^{u_n} \leq e^M \\ &\leq e^M \frac{|u_n|^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \left| \frac{R_{n+1}(u_n)}{u_n^{n+1}/(n+1)!} \right| \leq e^M \frac{u_n}{n+2}$$

car $0 < \inf a \leq u_n$
comme $a > 1$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n+2} \times e^M = \ln a \times a \times e^M \neq 0$ (4) :

par encadrement : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_{n+1}(u_n)}{u_n^{n+1}/(n+1)!} \right) = 0$

d'où par caractérisation de la négligeabilité :

$$R_{n+1}(u_n) = o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right) \quad (9)$$

Et donc, d'après (8) et (9) :

$$e^{u_n} = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

7) c) Soit $n \in \mathbb{N}^+$, on a: $\frac{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}} = \left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)}$

Or, d'après la 6) b): $u_n = \ln(a) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc: $n^2\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) = n^2 + o\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)$

Donc: $n^2\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Autrement dit: $n^2\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi: $n\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

De plus: $(n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \sim n \ln\left(1 + \left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right)\right)$

$\sim n\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) \quad \left(\text{car } \left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right)$

Donc $(n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $e^{(n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)} = \frac{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Donc: $\boxed{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}}$

Par croissances comparées: $\frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\boxed{\text{Donc: } \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$

7) d) Soit $n \in \mathbb{N}^+$,

On a: $u_n - \ln(a) = \ln(e^{u_n}) - \ln(a) = \ln\left(\frac{e^{u_n}}{a}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{e^{u_n}}{a} - 1\right)\right)$

Or $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ (d'après la 7) b) et 7) c)) donc $\frac{e^{u_n}}{a} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc: $u_n - \ln(a) = \ln\left(1 + \left(\frac{e^{u_n}}{a} - 1\right)\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n}}{a} - 1$

Or d'après la 7) b): $\frac{e^{u_n}}{a} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!}\right)$ donc $\frac{e^{u_n}}{a} - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!}$

Donc: $\frac{e^{u_n}}{a} - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a)^{n+1}}{a(n+1)!}$ (d'après la 7) c))

Donc: $\boxed{u_n - \ln(a) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a)^{n+1}}{a(n+1)!}}$

Exercice 2

comme $A = \text{Mat}_B(f)$, avec B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$
1) a) $\lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ est valeur propre de f ssi λ est valeur propre de A
ssi $\exists X \neq 0 (A - \lambda I)X = 0$

$$\text{Or } (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 1+4\lambda & -1-2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3$$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix} X = 0 \quad (1) \quad \textcircled{9} \quad (L_3 \leftarrow 9L_3 - (2-\lambda)L_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } p(\lambda) &= -(2-\lambda)(-\lambda^2-2\lambda-1) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

Donc λ est valeur propre de f ssi $\lambda \in \{-1, 2\}$

• Pour $\lambda = -1$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\textcircled{1} \text{ devient: } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 9y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, d'où comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_3).$$

Pour $\lambda = 2$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$\textcircled{1} \text{ d'écrit: } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 4z = 0 \\ 9y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 4z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ d'où $E_2(f) = \text{Vect}(e_2 + e_3)$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \text{Sp}(f) \subset \{-1, 2\} \text{ et } \begin{cases} E_{-1}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_3) \\ E_2(f) = \text{Vect}(e_2 + e_3) \end{cases}}$$

1)b) Comme f est diagonalisable, A est diagonalisable.

Donc il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice

$D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que: $A = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

et on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D)$
 $0 = 1 + \mu$ d'où $\mu = -1$

(10)

et comme A est diagonalisable: $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ avec $\begin{cases} \dim(E_1(A)) = 1 \\ \dim(E_2(A)) = 1 \end{cases}$
d'après 1a)

$$2 = 3$$

Contradiction

On en déduit donc que f n'est pas diagonalisable

2) Soit $x \in \ker(f+id)$

on a donc $(f+id)(x) = 0$ or, comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Alors $(f+id) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, d'où
en composant par $f+id$:

$$\begin{aligned} (f+id)^2(x) &= (f+id)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } x \in \ker(f+id)^2$$

$$\text{Donc } \boxed{\ker(f+id) \subset \ker(f+id)^2}$$

On veut mq $\ker(f+id)^2 \not\subset \ker(f+id)$



i.e. mq $\exists x_0 \in \ker(f+id)^2, x_0 \notin \ker(f+id)$

↳ Donc il faut trouver un contre exemple qui fonctionne.

Donc on cherche un $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $(A+I)^2 X_0 = 0$

(11)

mais $(A+I)X_0 \neq 0$

$$(A+I)^2 X_0 = 0 \Leftrightarrow X_0 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ après calculs}$$

$$\text{donc } x_0 = (x, 0, z), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$$

on peut donc proposer $x_0 = (1, 0, 0)$

et on a bien $(A+I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$$\text{Soit } x_0 = (1, 0, 0)$$

$$\text{d'où } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (A+I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\text{donc } (\mathcal{F} + \text{id})^2(1, 0, 0) = 0$$

$$\text{d'où } (1, 0, 0) \in \text{Ker } (\mathcal{F} + \text{id})^2$$

$$\text{donc } \exists x_0 \in \text{Ker } (\mathcal{F} + \text{id})^2$$

$$\text{De plus, } (A+I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donc $(\mathcal{F} + \text{id})(1, 0, 0) \neq 0$ donc $(1, 0, 0) \notin \text{Ker } (\mathcal{F} + \text{id})$.

Donc $\exists x_0 \in \text{Ker}(f+id)^2$, $x_0 \notin \text{Ker}(f+id)$

Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(f+id) \neq \text{Ker}(f+id)^2}$

3) On a d'après 2):

$$\dim(\text{Ker}(f-2id)) \leq \dim(\text{Ker}(f+id)^2)$$

$$\dim(\text{Ker}(f-2id)) \neq \dim(\text{Ker}(f+id)^2)$$

$$\text{donc } \dim(\text{Ker}(f-2id)) < \dim(\text{Ker}(f+id)^2)$$

et comme $(f+id)^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\text{Ker}(f+id)^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, d'où: $\text{Ker}(f+id)^2 \subset \mathbb{R}^3$

de même, comme $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ mais $(f+id)^2(1,1,1) \neq 0$

donc $(1,1,1) \notin \text{Ker}(f+id)^2$

Alors $\mathbb{R}^3 \neq \text{Ker}(f+id)^2$

$$\text{donc } \dim(\text{Ker}(f+id)^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\text{d'où } \dim(\text{Ker}(f-2id)) < \dim(\text{Ker}(f+id)^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$1 < \dim \text{Ker}(f+id)^2 < 3$$

Or comme $\dim(\text{Ker}(f-2id)) = 1$
d'après 1),

la dimension étant forcément un entier, on en déduit que: $\dim \text{Ker}(f+id)^2 = 2$

(12)

$$\text{donc } \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f-2\text{id})) + \dim(\ker(f+\text{id})^2)$$

$$\text{Soit } x \in \ker(f-2\text{id}) \cap \ker(f+\text{id})^2$$

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad (f+\text{id})^2(x) = 0$$

d'où en composant par f :

$$\begin{cases} f^2(x) + 2f(x) + x = 0 \\ f(x) = 2x \\ f^2(x) = f(2x) = 2f(x) = 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ f^2(x) = 4x \\ 4x + 2 \times 2x + x = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } 9x = 0$$

$$\text{donc } x = 0$$

$$x \in \{0\}$$

$$\text{d'où } \ker(f-2\text{id}) \cap \ker(f+\text{id})^2 \subset \{0\}$$

$$\text{et comme } (f-2\text{id}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \text{ et } (f+\text{id}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

donc $\ker(f-2\text{id})$ et $\ker(f+\text{id})^2$ sont 2 sous-espaces vectoriels

Donc $\ker(f-2\text{id}) \cap \ker(f+\text{id})^2$ est un sous-espace vectoriel

$$\text{Alors } \{0\} \subset \ker(f-2\text{id}) \cap \ker(f+\text{id})^2$$

$$\text{Donc } \ker(f-2\text{id}) \cap \ker(f+\text{id})^2 = \{0\}$$

$$\text{Ainsi, } R^3 = \ker(f-2\text{id}) \oplus \ker(f+\text{id})^2$$

4) Soit $x \in F$

$$f(x) - 2x = 0 \quad \text{d'où,}$$

$$\begin{aligned} (f-2\text{id})(f(x)) &= f^2(x) - 2f(x) \\ &= f(f(x) - 2x) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $f(x) \in F$

donc $\forall x \in F, f(x) \in F$

i.e. $f(F) \subset F$

F est stable par f .

Soit $x \in G$

$$\text{d'où } f^2(x) + 2f(x) + x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{or } (f+\text{id})^2(f(x)) &= f^3 + 2f^2(x) + f(x) \\ &= f(f^2(x) + 2f(x) + x) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, de même, G est stable par f .

(13)

5)a) On a

$$(A+I)^2(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} (A-2I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

donc $(X+1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de A , donc de f

d'où $P(f) = 0$ i.e.

$P(f)$ est l'endomorphisme nul

6) Comme π_1 et π_2 sont des polynômes d'endomorphismes, ils commutent.

7)a) On a

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \left(\frac{1}{9} (f+id)^2 \right) \circ \left(-\frac{1}{9} (f+4id) \circ (f-2id) \right)$$

$$= -\frac{1}{18} (f+id)^2 \circ (f+4id) \circ (f-2id)$$

$$= -\frac{1}{18} (f+id)^2 \circ (f-2id) \circ (f+4id)$$

$$= -\frac{1}{18} P(f) \circ f + 4id \quad \text{or } P(f) = 0 \text{ d'après 5)}$$

$$= 0$$

Donc $\boxed{\pi_2 \circ \pi_1 = 0}$

7)b) On a $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$ d'après 7/a)

(14)

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^3, \pi_1(x) \in \text{Im}(\pi_1)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^3, (\pi_2 \circ \pi_1)(x) = 0$, d'où

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \pi_2(\pi_1(x)) = 0$, donc

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \pi_1(x) \in \text{Ker}(\pi_2)$

Alors, $\text{Im}(\pi_1) \subset \text{Ker}(\pi_2)$

8)a) on a

$$\pi_1 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{id})$$

$$\pi_2 = -\frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{id})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \pi_1 + \pi_2 &= \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{id} - f^2 - 2f + 8\text{id}) \\ &= \frac{9}{9}\text{id} \\ &= \text{id} \end{aligned}$$

Donc $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}$

9) Soit $x \in \text{Ker}(\pi_2)$

On a $\pi_2(x) = 0$ et $\pi_1(x) + \pi_2(x) = x$, donc :

$$\pi_1(x) = x$$

Or comme $\pi_1(x) \in \text{Im}(\pi_1)$ 
alors $x \in \text{Im}(\pi_1)$

Donc $\text{Ker}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$

Ainsi, d'après 7)b), et comme π_1 et π_2 jouent des rôles symétriques :

$$\begin{array}{l} \text{Ker}(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2) \\ \text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1) \end{array}$$

10) d'après 7)a) : $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$

d'après 8)a) : $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}$, d'où en composant par π_1 puis
par π_2 :

$$\pi_1 \circ \pi_1 + \pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1 \quad \text{or d'après 7)a), } \pi_2 \circ \pi_1 = 0$$

$$\text{donc } \pi_1^2 = \pi_1$$

même raisonnement pour π_2 et comme $\begin{cases} \pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \end{cases}$:

Ainsi, π_1 et π_2 sont
des projecteurs

11)

(15)

D'après 3)

$$\mathbb{A}^3 = F \oplus G, \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{A}^3, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$

$$\text{D'où } \pi_2(x) = \pi_2(x_1) + \pi_2(x_2) \text{ d'où}$$

$$= -\frac{1}{9} (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id})(x_2) = \frac{1}{9} (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id})(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9} (f + \text{id}) \circ (f - 2\text{id})(x_2)$$

or $x_1 \in F$

$$= -\frac{1}{9} (f^2 + 2f - 8\text{id})(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9} (f^2 + 2f + \text{id} - 9\text{id})(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9} ((f^2 + \text{id})(x_2) - 9x_2) \text{ or } x_2 \in G$$

$$= x_2$$

Donc par définition, π_2 est le projecteur
sur G parallèlement à F
 π_1 est donc le projecteur sur F
parallèlement à G

12)

Comme $g = 2\pi_1 - \pi_2$

$$= \frac{2}{3}(f+id)^2 + \frac{1}{3}(f+id)(f-2id)$$

et comme $h = f - g$

$$= f - \frac{2}{3}(f+id)^2 - \frac{1}{3}(f+id)(f-2id)$$

On en déduit que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f

13) on a

$$g = \frac{2}{3}f^2 + \frac{4}{3}f + \frac{2}{3}id + \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{3}f - \frac{8}{3}id$$

$$= \frac{1}{3}(3f^2 + 6f - 6id)$$

Soit x_1 le vecteur propre de f associé à la valeur propre -1

$$g(x_1) = \frac{1}{3}(3f^2(x_1) + 6f(x_1) - 6x_1)$$

$$= \frac{1}{3}(+3x_1 - 6x_1 - 6x_1)$$

$$= -\frac{9}{3}x_1$$

$$= -x_1$$

De même, $g(x_2) = 2x_2$ avec x_2 vecteur propre de f associé à la valeur propre 2

Comme $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$

(16)

On en déduit que -1 et 2 sont valeurs propres de g .

↳ Pour chercher la 3^{ème} valeur propre, son vecteur propre ^{et son sous-espace propre}

Comme on sait qu'il s'agit de -1 car $\text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

Son vecteur propre x_1 se détermine et que $-1 + 2 + \mu = 0$
via l'équation $x_2 = (y_1, y_2, y_3)$ $\mu = -2$

$$g(x_1) = -x_1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(g^2(x_1) + 6g(x_1) - 6x_1) = -x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \left(A^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + 6A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dots E_1(g)$$

↳ on trouve un sous-espace propre de dimension 2

puis de même pour la valeur propre 2

$$g(x_2) = 2x_2 \Leftrightarrow \dots E_2(g)$$

↳ on trouve un sous-espace propre de dimension 1

D'où comme $\dim(E_1(g)) + \dim(E_2(g)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Alors g est diagonalisable

et donc il existe une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de g telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14) On a

$$\begin{aligned} (f-2id) \circ \pi_1 &= (f-2id) \circ \frac{1}{9}(f+id)^2 \\ &= \frac{1}{9} (f-2id) \circ (f^2+2f+id) \\ &= \frac{1}{9} (f^3+2f^2+f-2f^2-4f-2id) \\ \text{et} \quad &= \frac{1}{9} (f^3-3f-2id) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+id) \circ \pi_2 &= (f+id) \circ \left(-\frac{1}{9}(f+4id) \circ (f-2id)\right) \\ &= -\frac{1}{9} (f+id) \circ (f^2-2f+4f-8id) \\ &= -\frac{1}{9} (f+id) \circ (f^2+2f-8id) \\ &= -\frac{1}{9} (f^3+2f^2-8f+f^2+2f-8id) \\ &= -\frac{1}{9} (f^3+3f^2-6f-8id) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (f-2id) \circ \pi_1 + (f+id) \circ \pi_2 &= \frac{1}{9} (-3f^2+3f+6id) \\ &= \frac{1}{9} (-3f^2-6f+6id+9f) \\ &= f - \frac{1}{9} (3f^2+6f-6id) \quad \text{d'où d'après l'expression} \\ &= f - g \quad \text{de } g \text{ trouvée en 13):} \\ &= h \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } h = (f-2id) \circ \pi_1 + (f+id) \circ \pi_2}$$

(17)

Donc

$$K^2 = ((f - 2id) \circ \pi_1 + (f + id) \circ \pi_2) \circ ((f - 2id) \circ \pi_1 + (f + id) \circ \pi_2)$$

Comme les endomorphismes
en présence commutent:
(cf 6)

$$= (f - 2id)^2 \circ \pi_1^2 + (f + id)(f - 2id) \circ \pi_1 \circ \pi_2$$

$$+ (f - 2id)(f + id) \circ \pi_1 \circ \pi_2 + (f + id)^2 \circ \pi_2^2$$

or $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ (cf 7b)

et π_1 et π_2 sont

des projecteurs (cf 4);

$$= (f - 2id)^2 \circ \pi_1 + (f + id)^2 \circ \pi_2$$

et comme $q(f) = (f + id)^2 (f - 2id) = 0$
(cf 5);

$$= \frac{1}{9} q(f) \circ (f - 2id) - \frac{1}{9} p(f) \circ (f + id)$$

$$= 0$$

comme $K^2 = 0$, et $K \in \mathcal{L}(E)$

K est donc nilpotent.

$$\boxed{K^2 = 0}$$

15) comme on a $h = f - g$

$$\text{donc } f = g + h$$

et comme g est diagonalisable (cf 13))

et h est nilpotent (cf 14))

et enfin, comme g et h sont des polynômes de f (cf 12))
 g et h commutent.

Ainsi, f s'écrit bien sous la forme de la somme de deux endomorphismes qui commutent, dont l'un est diagonalisable, l'autre est nilpotent.

Problème

Partie I

1) a) La fonction $x \mapsto \frac{\mu - x}{a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

et comme $-exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors

$x \mapsto -e^{\frac{\mu-x}{a}}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 sur des intervalles adéquats, à valeur dans $\mathbb{R}$. Et comme exp est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ la fonction $F_{\mu,a} : x \mapsto e^{-e^{\frac{\mu-x}{a}}}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 sur des intervalles adéquats.

$F_{\mu/a}$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

(18)

Donc $F_{\mu/a}$ est dérivable, et on pose $F_{\mu/a}' = f_{\mu/a}$
derx fois

d'où:

$$F_{\mu/a}'' = f_{\mu/a}'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\mu/a}'(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}} \times e^{-e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu/a}(x) = \frac{1}{a} \times e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\mu/a}''(x) = \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}} \right) \times \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu/a}'(x) = \frac{1}{a^2} \left(e^{2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}} - e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}} \right)}$$

1)b) on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu/a}'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}} \leq e^{2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

d'où par
croissance de
 $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\Leftrightarrow \frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}} \leq 2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\mu-x}{a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\mu}{a} \leq \frac{x}{a}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{\mu}{a} \times a \Leftrightarrow x \leq \mu$$

Donc $f'_{\mu,a}(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \mu]$

comme $f''_{\mu,a} = f_{\mu,a}$, on en déduit que

$f_{\mu,a}$ est convexe sur $]-\infty, \mu]$
 $f_{\mu,a}$ est concave sur $[\mu, +\infty[$
 avec μ le point d'inflexion de $f_{\mu,a}$

Et par caractérisation des fonctions convexes et concaves sur un intervalle, on en déduit que

$f_{\mu,a} = f_{\mu,a}$ est croissante sur $]-\infty, \mu]$
 et décroissante sur $[\mu, +\infty[$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu - x}{a} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu - x}{a} = +\infty$ car $a > 0$ et $\begin{cases} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\mu,a}(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\mu,a}(x) = 0 \end{cases}$

on en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu,a}(x) \geq 0$

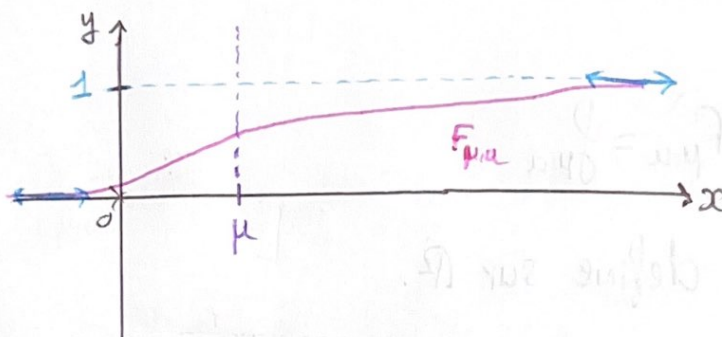
Donc $F_{\mu,a}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
(strictement)

(19)

et $\lim_{y \rightarrow 0} y = 1$

Allure de la courbe:

d'où $\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\mu,a} = 1$



1)c)

comme $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 , donc continue sur $\mathbb{R}$ (cf 1/a)

et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cf 1/b)

elle définit une bijection de

$\mathbb{R}$ vers $]0,1[= \mathcal{I}$

avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$

donc $\mathcal{I} =]0,1[$

on note alors $G = F_{0,1}^{-1}$

$\forall y \in]0,1[, y = F_{0,1}(x) \Leftrightarrow y = e^{-x}$, d'où en composant par $\ln$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = -e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -\ln(y) = e^{-x}, \text{ de même:}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(y)) = -x$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(-\ln(y))$$

Donc $G: x \mapsto -\ln(-\ln(x))$ est
la bijection réciproque de $F_{0,1}$

2)

On a $F_{\mu, \alpha}' = f_{\mu, \alpha}$...

• $f_{\mu, \alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• Comme $f_{\mu, \alpha}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $f_{\mu, \alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu, \alpha}(x) \geq 0$ (cf 1a))

• Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x f_{\mu, \alpha}(t) dt = [F_{\mu, \alpha}(t)]_0^x$$

$$= F_{\mu, \alpha}(x) - F_{\mu, \alpha}(0)$$

et d'après 1b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mu, \alpha}(x) = 1$

d'où par passage à la limite
($x \rightarrow +\infty$);

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_{\mu, \alpha}(t) dt = 1 - F_{\mu, \alpha}(0)$$

Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f_{\mu, \alpha}(t) dt$ admet une limite finie

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\mu, \alpha}(t) dt$ converge par définition
et vaut $1 - F_{\mu, \alpha}(0)$

De même

(20)

$$\forall x \in \mathbb{R}^-; \int_x^0 f_{\mu|a}(t) dt = F_{\mu|a}(0) - F_{\mu|a}(x)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mu|a}(x) = 0 \quad (\text{cf 1b})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f_{\mu|a}(t) dt = F_{\mu|a}(0)$$

donc, de même, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f_{\mu|a}(t) dt$ converge par définition et vaut $F_{\mu|a}(0)$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu|a}(t) dt$ converge, et d'après la relation de Charles:
et vaut $F_{\mu|a}(0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu|a}(t) dt = \int_0^{+\infty} f_{\mu|a}(t) dt + \int_{-\infty}^0 f_{\mu|a}(t) dt$$

$$= 1$$

et comme $F_{\mu|a}' = f_{\mu|a}$ (cf 1a))

Ainsi, $F_{\mu|a}$ est la fonction de répartition
et $f_{\mu|a}$ est sa densité de probabilité

3) on a $Z \sim \mathcal{G}(\mu, \alpha)$ avec $\mu > 0$ et $\alpha > 1$

donc $Z \sim \mathcal{G}(0, 1)$, d'où, en notant F_X la fonction de répartition de X

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(\alpha Z + \mu \leq x) \quad \text{or comme } \alpha > 0$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\alpha}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right) \quad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = e^{-e^x}$$

$$= e^{-e^{\frac{x - \mu}{\alpha}}}$$

$$= F_{\mu, \alpha}(x)$$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit alors:

$$\boxed{X \sim \mathcal{G}(\mu, \alpha)}$$

4)a) on a $U \sim \mathcal{U}(a, b)$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ x & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$$

d'où d'après 1)c) :

②1

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) \quad \text{💡}$$

$= P(G(U) \leq x)$ et comme $F_{\theta_{11}}$ est croissante (cf 11b)
et sa bijection réciproque G l'est
également, d'où, en
composant par $F_{\theta_{11}}$:

$$= P(F_{\theta_{11}}(G(U)) \leq F_{\theta_{11}}(x))$$

$$= P(U \leq F_{\theta_{11}}(x))$$

$$= F_{\theta_{11}}(x)$$

La fonction de répartition caractérisant la loi :

$$\boxed{Y \sim G_Y(\theta_{11})}$$

h.1

h.2

4) b)

fonction $g = \text{gumbel}(\mu, a)$

$u = \text{rand}()$

$y = -\log(-\log(u))$

$g = a * y + \mu \quad \leftarrow \text{d'après 3)}$

endfonction

5) a)

La fonction $t \mapsto e^t \ln(t)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

De plus, comme $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1$ (car $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$)

donc $e^{-t} \sim 1$, d'où

$e^{-t} \ln(t) \sim \ln(t)$

$-e^{-t} \ln(t) \sim -\ln(t)$

→ on montre rapidement que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge;

$$\forall y \in]0, 1[, \int_y^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_y^1 = -1 + y - y \ln(y)$$

et $\lim_{y \rightarrow 0} -1+y = -1$ et $\ln(y) \sim \frac{1}{y}$ (négligeabilité relative) (22)

donc $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y)y = 0$

donc par passage à la limite: $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \ln(t) dt = -1$

donc $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge

comme les fonctions $t \mapsto -e^t \ln(t)$ et $t \mapsto -\ln(t)$
sont continues et positives sur $]0,1]$

et comme l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge (cf. supra)

donc l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) dt$ également,

par les théorèmes de comparaison des intégrales
de fonctions positives:

l'intégrale $\int_0^1 e^t \ln(t) dt$ converge

donc l'intégrale $\int_0^1 e^t \ln(t) dt$ converge.

De plus comme $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et
 $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(t) \leq 0$

Alors $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

donc sa courbe représentative se situe en
dessous de toutes ses tangentes, en particulier

sa tangente au point y_0 :

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$$

$$= x-1$$



d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) \leq x-1 \leq x$, d'où exp étant
positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{-t} \ln(t) \leq e^{-t} t$$

or par négligabilité usuelle: $t^3 \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(e^t)$

$$\text{donc } e^{-t} \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^3}\right), \text{ d'où}$$

$$e^{-t} t \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{Donc, comme } \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{-t} \ln(t) \leq e^{-t} t \\ e^{-t} t \underset{t \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{cases}$$

comme les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, $t \mapsto t e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$

Sont continues et positives sur $[1, +\infty[$

(23)

et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge !

(intégrale de Riemann)

D'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t \bar{e}^t dt$ converge

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) \bar{e}^t dt$ converge

et comme on a montré que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) \bar{e}^t dt$ converge :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t) \bar{e}^t dt$ converge.

5)b) comme la fonction $u \mapsto \bar{e}^u$ est de classe C^1 et bijective sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, 1[$
à l'aide du changement de variable

$$\begin{aligned} z &= \bar{e}^u \\ dt &= -\bar{e}^u \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} u = -\ln(t) \\ du = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right), \text{ on a:}$$

les intégrales $\int_0^{+\infty} \ln(u) \bar{e}^u du$ et $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) \times \frac{t}{-t} dt = -\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$

sont de même nature, et comme il y a convergence (5a):

l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge.

(24)

5)d) d'après 3) $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_Y(\mu|a) \Leftrightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{U}_Y(0,1)$
et

$$\forall t \in \mathbb{R}, t f_{0,1}(t) = t e^{-t} \times e^{-e^{-t}}$$

comme la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et définit
 $f_{0,1}: t \mapsto e^{-t} e^{-e^{-t}}$

une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ (cf 1))

on effectue le changement de variable $\begin{cases} u = e^{-e^{-t}} \\ du = e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt \end{cases}$

les intégrales

$$\text{et } \begin{cases} t = -\ln(-\ln(u)) \\ dt = \frac{1}{u \ln(u)} du \end{cases}$$

$-\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt$ sont de même nature

et comme il y a convergence de l'intégrale définissant γ

(cf 5/b) :

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{0,1}(t) dt$$

Or, comme $\forall t \in \mathbb{R}^-, |t f_{g_{0,1}}(t)| = -t f_{g_{0,1}}(t)$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |t f_{g_{0,1}}(t)| = t f_{g_{0,1}}(t)$$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, |t f_{g_{0,1}}(t)| = t f_{g_{0,1}}(t)$$

et comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g_{0,1}}(t) dt$ converge,

alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_{g_{0,1}}(t)| dt$ converge,

donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g_{0,1}}(t) dt$ converge absolument

Donc Z admet une espérance, et :

$$E(Z) = \gamma.$$

5)d) comme $X = aZ + \mu$ et comme Z admet une espérance
alors X admet une espérance et par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = aE(Z) + \mu = a\gamma + \mu$$

6) a)

Comme $Z \mapsto \text{Cg}(0,1)$ et f_Z est une densité de Z

alors par transformation affine, $-Z$ est une variable à densité et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{-Z}(x) = \frac{1}{|-1|} f_Z\left(\frac{x-0}{-1}\right)$$

$$= f_Z(-x)$$

$$= e^x \times e^{-x}$$

$g = f_{-Z} : x \mapsto e^x \times e^{-x}$ est une densité de la variable aléatoire $-Z$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
6) b) on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \int_0^y u e^{-(e^x+1)u} du = \int_0^y u \times e^{-e^x+1} u du.$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{e^{-(e^x+1)u}}{-(e^x+1)}$ et $u \mapsto 1$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, sur $[0, y]$

on a, par une intégration par parties :

- on dérive $u \mapsto u$ en $u \mapsto 1$

- on intègre $u \mapsto e^{-(e^x+1)u}$ en $u \mapsto \frac{e^{-(e^x+1)u}}{-(e^x+1)}$

D'où:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \int_0^y u e^{-(e^x+1)u} du = \left[\frac{-e^{-(e^x+1)u}}{e^x+1} \right]_0^y + \frac{1}{e^x+1} \int_0^y e^{-(e^x+1)u} du$$

$$= \frac{e^{-(e^x+1)y}}{e^x+1} - 0 + \frac{1}{e^x+1} \left[\frac{-e^{-(e^x+1)u}}{e^x+1} \right]_0^y$$

$$= \frac{e^{-(e^x+1)y}}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} \left(-\frac{e^{-(e^x+1)y}}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} \right)$$

$$= \frac{e^{-(e^x+1)y}}{e^x+1} + \frac{1}{(e^x+1)^2} (1 - e^{-(e^x+1)y})$$

$$\text{or } \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^x + y)y = +\infty \text{ et } \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$$

$$\text{donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-(e^x+1)y} = 0$$

D'où par passage à la limite ($y \rightarrow +\infty$):

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y u e^{-(e^x+1)u} du = \frac{1}{(e^x+1)^2}$$

Donc l'intégrale converge et $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^x+1)u} du = \frac{1}{(e^x+1)^2}$
pour tout $x \in \mathbb{R}$

6)c) comme la fonction exp est de classe C^1 (26)
 et définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$,

à l'aide du changement de variable $\begin{cases} u = e^t \\ du = e^t dt \end{cases}$

on sait que les intégrales

$$\begin{cases} t = \ln(u) \\ dt = \frac{du}{u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-x} \times e^{-t-x} \times e^t \times e^{-e^t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t-x} \times e^{-e^t} \times e^{-e^t} dt \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^x} \times e^{-ux} \times e^{-x} \times \frac{du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^x} \times e^{-ux} \times e^{-x} \times e^{-u} du$$

sont de même nature.

$$= e^{-x} \int_0^{+\infty} u e^{-ux} \times e^{-u} du$$

$$= e^{-x} \int_0^{+\infty} u e^{-u(1+e^x)} du$$

or comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} u e^{-u(1+e^x)} du$ converge, alors:

D'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ converge.
 (et il y a égalité entre les intégrales)

6/d) Comme les variables Y et Z sont indépendantes, par le lemme des conditions Y et $-Z$ sont indépendantes.

de densité respectives $f_{0,1}$ et g

Or comme $\forall x \in \mathbb{R}, f_{0,1}(x) = e^{-x} \times e^{-e^{-x}}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f_{0,1}(x) \leq 1$

alors f_2 est bornée, :

donc la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ est définie

sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, donc par convolution, $Y-Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y-Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$$

d'où d'après 6/c): (27)
 $\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y-Z}(x) = \bar{e}^x \int_0^{+\infty} u e^{-u(e^x-1)} du$ et d'après 6/b)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{Y-Z}(x) = \frac{\bar{e}^x}{(1+\bar{e}^x)^2}$$

donc $Y-Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité $f_{Y-Z}: x \mapsto \frac{\bar{e}^x}{(1+\bar{e}^x)^2}$

Partie II → Erreur, l'énoncé a oublié de définir n dans cette partie (n n'est pas fixé), on prend l'initiative de le faire.

7/a) on a

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, \forall \varepsilon > 0 \\ & \begin{cases} |\alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |\beta W_n(\omega) - \beta W(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |\alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega)| + |\beta W_n(\omega) - \beta W(\omega)| < \varepsilon \end{aligned}$$

or par l'inégalité triangulaire:

$$\Rightarrow |\alpha V_n(\omega) + \beta W_n(\omega) - \alpha V(\omega) - \beta W(\omega)| < \varepsilon$$

d'où, par contraposition:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, |\alpha V_n(\omega) + \beta W_n(\omega) - \alpha V(\omega) - \beta W(\omega)| \geq \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ou} \\ \beta W_n(\omega) - \beta W(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

d'où:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \left[|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon \right] \subset \left[|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] \cup \left[|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

d'où en passant aux probabilités, et d'après la formule du crible:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mathbb{P}(|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2})$$

Or comme $V_n \xrightarrow{P} V$ et $t \mapsto t\alpha$ est continue, sur $\mathbb{R}$ par application du théorème de continuité,

$$\alpha V_n \xrightarrow{P} \alpha V$$

et de même pour $\beta W_n \xrightarrow{P} \beta W$

d'où par définition:

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0 \end{cases}$$

Donc, finalement, par encadrement:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$\boxed{\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{P} \alpha V + \beta W}$$

(28)

7)b) comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

et comme les $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendantes, de même loi et de même espérance $\mathbb{E}(X_1)$, d'après la loi faible des grands nombres;

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

De même, comme, d'après le lemme des combinaisons les $(X_k^2)_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendantes

on montre de la même façon que

$$C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2)$$

7)c) on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{C_n - M_n^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2}$$

Comme $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un n -échantillon de la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma)$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est une fonction des variables
 d'échantillons $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$, indépendante de a

Alors A_n est un estimateur de a .

Comme d'après 7)b), on a :

$$M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

$$C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2)$$

et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, par
 application du théorème de continuité :

$$M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} (\mathbb{E}(X_1))^2$$

et d'après 7)a) :

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = V(X_1) \text{ et comme } X_1 \sim \mathcal{G}(\mu, a)$$

$$= a^2 c, \text{ d'où}$$

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} a^2 c \text{ et comme la fonction}$$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
 avec $a^2 c \in \mathbb{R}^+$

par application du théorème de continuité:

(29)

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{a^2 c}, \text{ d'où:}$$

$$A_n \xrightarrow{P} a$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est un estimateur convergent de a

7)d) On montre, de la même manière qu'en 7)c), que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est un estimateur de μ .

$$\begin{aligned} \text{De plus, comme } M_n &\xrightarrow{P} E(X_1) \text{ (cf 7)b),} \\ &\xrightarrow{P} \gamma \text{ (cf 5)c),} \end{aligned}$$

$$\text{et } A_n \xrightarrow{P} a \text{ (cf 7)c)}$$

Alors par 7)a): $S_n \xrightarrow{P} \gamma - a\gamma$ or d'après 5)d):
 $E(X) = a\gamma + \mu$, d'où
 $\gamma = a\gamma + \mu$ i.e.:
 $\mu = \gamma - a\gamma$

$$\text{donc } S_n \xrightarrow{P} \mu$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est un estimateur convergent de μ .

8) a)

```
function A = estimateur(X)
    A = (1/sqrt(c)) * sqrt(sum(X.^2)/n - (sum(X)/n)^2)
endfunction
```

8) b)

D'après 7) c), on sait que A_n ($n \in \mathbb{N}$) est un estimateur convergent de $\alpha = 1$, ce qui s'observe très bien sur les réalisations de ce graphique, étant donné qu'elles tendent tous vers l'ordonnée 1.

En revanche, les valeurs semblent assez dispersées pour un n inférieur à 10^2 ce qui peut témoigner d'une variance assez grande.

On peut conjecturer que l'estimateur A_n ($n \in \mathbb{N}$) est juste mais pas précis (du à l'erreur aléatoire).