

ECRICOME 2018 S

Éléments de correction

Premier exercice

Première partie

1. On vérifie immédiatement que $A^2 = A$ et $B^2 = B$, ce qui donne $u^2 = u$ et $v^2 = v$, d'où l'on déduit que les endomorphismes u et v sont des projecteurs de \mathbb{R}^2 .
2. **a.** Les colonnes de A engendrent la droite dirigée par ${}^t(1 \ a)$, celles de B la droite dirigée par ${}^t(1 \ 1)$ et celles de

$$AB = \frac{1+a}{2(1+a^2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$$

la droite dirigée par ${}^t(1 \ a)$ lorsque $a \neq -1$. Les matrices A et B sont donc de rang 1, ainsi que AB lorsque $a \neq -1$, alors qu'elle est de rang 0 pour $a = -1$. Il en va de même des endomorphismes u , v et $u \circ v$ qui leur sont canoniquement associés.

- b.** Le calcul donne immédiatement

$$AB \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

si bien que $u \circ v(x_0) = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}x_0$: le vecteur $x_0 \neq 0$ est donc propre pour $u \circ v$, associé à la valeur propre $\lambda_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}$.

- c.** Puisque $\text{rg } u \circ v < n = 2$ vu **a.**, le réel 0 est valeur propre de $u \circ v$. Par ailleurs, λ_a en est une autre d'après **b.** lorsque $a \neq -1$. L'endomorphisme $u \circ v$ admettant au plus $n = 2$ valeurs propres, il en admet dans ce cas exactement deux : 0 et λ_a . Pour $a = -1$, la matrice AB est nulle si bien que $u \circ v = 0$ admet 0 pour unique valeur propre. Dans tous les cas,

$$\text{Sp } u \circ v = \left\{ 0, \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \right\}.$$

3. **a.** En développant $(1-a)^2 \geq 0$, on met en évidence que $2a \leq 1+a^2$, d'où il ressort que

$$0 \leq \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2a}{1+a^2} \right) \leq 1.$$

Ainsi les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à $[0, 1]$ d'après **2.c.**

- b.** Pour que $u \circ v$ soit un projecteur, il est nécessaire que son spectre soit inclus dans $\{0, 1\}$, c'est-à-dire que λ_a soit nul ou égal à 1. Le premier cas correspond bien sûr à $a = -1$. Pour le second, on s'aperçoit en remontant le raisonnement mené en **a.** que

$$\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1 \iff \frac{2a}{1+a^2} = 1 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1.$$

Réciproquement, AB est nulle pour $a = -1$ et égale à B pour $a = 1$; l'endomorphisme $u \circ v$ est donc un projecteur dans les deux cas.

En conclusion, $u \circ v$ est un projecteur si, et seulement si, $a = -1$ ou $a = 1$.

Deuxième partie

4. Par hypothèse, l'endomorphisme v est un projecteur symétrique, ce qui signifie que sa matrice B en base canonique, orthonormale, est symétrique telle que $B^2 = B$. Par conséquent, pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient :

$$\|BX\|^2 = {}^t(BX)(BX) = {}^tX{}^tBBX = {}^tXBX = {}^t(BX)X = \langle BX, X \rangle.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\|BX\|^2 \leq \|BX\| \|X\|$ et par suite que $\|BX\| \leq \|X\|$ (dans le cas où $\|BX\| > 0$ par simplification, comme dans celui où $\|BX\| = 0$).

5. Tout comme B , la matrice A est symétrique. Dans ces conditions, C est symétrique réelle : ${}^tC = {}^tB{}^tA{}^tB = BAB = C$ donc diagonalisable.

6. a. On obtient aisément, en utilisant les propriétés ${}^tA = A$, ${}^tB = B$ et $A^2 = A$:

$$\|ABX\|^2 = {}^t(ABX)(ABX) = {}^tX{}^tB{}^tAABX = {}^tX(CX) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

b. En remarquant que $\|X\|^2 > 0$ puisque X est non nul en tant que vecteur propre, on déduit de la question précédente que $\lambda = \frac{\|ABX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$. Les valeurs propres de C sont donc positives ou nulles.

7. a. De l’hypothèse $ABX = \mu X$, on déduit que $C(BX) = BAB^2X = B(ABX) = \mu BX$. Sachant que $\mu \neq 0$ et $X \neq 0$, on a par ailleurs $ABX = \mu X \neq 0$ si bien que $BX \neq 0$. Tout cela met en évidence que BX est vecteur propre de C pour la valeur propre μ .

Puisque les valeurs propres de C sont positives ou nulles d’après 6.b. et que $\mu \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\mu > 0$.

b. On a $ABX = A(ABX) = \mu AX$ d’où l’on déduit, par comparaison à $ABX = \mu X$ et sachant $\mu \neq 0$, que $AX = X$.

c. Il vient d’après b. :

$$\langle X, BX \rangle = \langle AX, BX \rangle = {}^tX(ABX) = \mu{}^tXX = \mu\|X\|^2.$$

8. Si μ désigne une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé, on a vu en 7.a. que $\mu > 0$ et l’on remarque, en utilisant 4. et 7.c., que :

$$\mu\|X\|^2 = \langle X, BX \rangle \leq \|X\| \|BX\| \leq \|X\|^2,$$

d’où il ressort que $\mu \leq 1$. Ainsi le spectre de AB est-il inclus dans $[0, 1]$.



Deuxième exercice

1. On établit pour commencer une relation qui sera utile à plusieurs reprises dans cet exercice :

$$\varphi^2 = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi,$$

si bien que φ est une solution de l’équation $x^2 - x - 1 = 0$. Par suite,

$$\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right) - 1 = \frac{1 + \varphi - \varphi^2}{\varphi^2} = 0,$$

et $-\frac{1}{\varphi}$ est donc l’autre solution de cette équation polynomiale du second degré.

2. a. La fonction f est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 6(x^2 - y, -x + y - 1).$$

b. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

d’où l’on déduit d’après 1. que f admet deux points critiques :

$$A = (\varphi, \varphi^2) = (\varphi, \varphi + 1) \quad \text{et} \quad B = \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}\right) = \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi + 1}\right).$$

c. En un point critique (x, y) , on s’intéresse aux valeurs propres de la hessienne

$$\nabla^2 f(x, y) = 6 \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s’agit des réels de la forme 6λ pour lesquels la matrice

$$\nabla^2 f(x, y) - 6\lambda I_2 = 6 \begin{pmatrix} 2x - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

n’est pas inversible, c’est-à-dire qui annulent l’expression

$$(2x - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - (2x + 1)\lambda + 2x - 1.$$

www.rblld.fr

Sachant que (x, y) est point critique, on a $x^2 - x - 1 = 0$ d'après **1.**, si bien que le trinôme en λ ci-dessus a pour discriminant $(2x + 1)^2 - 4(2x - 1) = 4(x^2 - x) + 5 = 9$ et pour racines $\lambda_1 = x - 1$ et $\lambda_2 = x + 2$.

Au point critique A, les valeurs propres $6\lambda_1$ et $6\lambda_2$ de la hessienne sont donc strictement positives : la fonction f y présente donc un minimum local.

Au point critique B, la hessienne admet deux valeurs propres $6\lambda_1 < 0$ et $6\lambda_2 > 0$, si bien que f y présente un point col.

3. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: on calcule $u_2 = 1$ pour vérifier que la formule est vérifiée au rang $n = 0$ et, si elle est satisfaite pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) - u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) \\ &= u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. a. Le code ci-dessous convient (par exemple) :

Listing 1 : calcul de u_n

```

fonction u=suite(n)
    // v est destiné à contenir u(k-1) et w u(k)
    // pour k variant de 1 à n
    v=0; // initialisation aux deux premiers rangs
    w=1; // correspondant à k=1
    for k=2:n
        t=v; // on retient la valeur de v
        v=w; // avant de l'écraser
        w=t+v;
    end
    u=w;
endfonction

```

- b. Par définition, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes φ et $-\frac{1}{\varphi}$ d'après **1.** Dans ces conditions, il existe par théorème un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

Les réels λ et μ sont alors déterminés par les deux premiers termes de la suite : en écrivant la formule précédente pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 = 0 \\ \lambda \varphi - \frac{\mu}{\varphi} = u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}}. \end{cases}$$

On peut enfin remarquer que :

$$\lambda = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} = \frac{\varphi}{2 + \varphi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

pour conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$

- c. Puisque $\left|-\frac{1}{\varphi}\right| < 1 < \varphi$ d'après **1.**, on a $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = o(\varphi^n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, si bien que $u_n \sim \lambda \varphi^n$ lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après **b.** Dès lors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\lambda \varphi^{n+1}}{\lambda \varphi^n} = \varphi \rightarrow \varphi, \quad n \rightarrow \infty.$$

5. a. En utilisant l'équivalent établi en 4.c., il vient :

$$\frac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{1}{\lambda^2 \varphi} \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n \geq 0, \quad n \rightarrow \infty$$

d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum \frac{1}{u_n u_{n+1}}$ par comparaison à la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$, convergente puisque $0 \leq \frac{1}{\varphi^2} < 1$.

b. D'après la question a., la série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$ converge absolument. Elle est donc convergente, ce qui signifie que la suite (S_n) de ses sommes partielles est elle-même convergente.

c. D'après 3.,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

d. En utilisant des télescopes à partir de la relation établie en c., il vient :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{u_k}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}} \right) = -\frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

En passant aux limites (qui existent d'après 4.c. et b.), on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi} = -2 \frac{1 - \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi,$$

d'où le résultat :

$$\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

Problème

Première partie

1. a. On justifie la formule par une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ (à détailler sur la copie !).

b. À partir de la formule établie en a., il vient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N = 0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = \mathbb{P}(N = 0) e^b.$$

Sachant que cette somme vaut 1 puisque N est à valeurs dans \mathbb{N} par hypothèse, on en déduit que $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-b}$, et la formule de la question a. devient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!},$$

si bien que N suit la loi de Poisson de paramètre b . Elle admet à ce titre espérance et variance données par $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = b$.

Remarque. Il n'est pas utile de supposer $b > 0$ (et on n'a pas utilisé cette hypothèse avant d'identifier une loi de Poisson) : c'est une conséquence de la formule $e^{-b} = \mathbb{P}(N = 0)$ et de l'hypothèse $\mathbb{P}(N = 0) < 1$.

2. a. La relation de Panjer donne $\mathbb{P}(N = 2) = 0$, ce qui constitue l'initialisation d'une récurrence immédiate conduisant à la conclusion que $\mathbb{P}(N = k) = 0$ pour tout $k \geq 2$.

b. Par hypothèse, $\mathbb{P}(N = 1) = -a \mathbb{P}(N = 0)$ d'où l'on déduit, sachant par ailleurs que $\mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) = 1$ d'après a., que $\mathbb{P}(N = 1) = \frac{a}{a-1}$. Prenant presque sûrement ses valeurs dans $\{0, 1\}$, la variable N suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a-1}$.

3. a. C'est évident (détailler l'expression de $\mathbb{P}(Z = k - 1)$) à partir de la définition :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

b. La relation de la question **a.** s'écrit encore :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \left(-1 + \frac{n+1}{k} \right) \mathbb{P}(Z = k-1).$$

Elle est encore valable pour $k > n$ (et en particulier pour $k = n+1$) puisque Z est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. La variable Z vérifie donc la relation de Panjer avec $a = -\frac{p}{1-p} < 0$ et $b = (n+1)\frac{p}{1-p}$.

4. a. En utilisant la relation de Panjer, il vient $\mathbb{P}(N = 1) = (a + b) \mathbb{P}(N = 0)$, où $\mathbb{P}(N = 0)$ est nécessairement non nul, sans quoi on aurait $\mathbb{P}(N = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate, en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle N est à valeurs dans \mathbb{N} . Par suite, $a + b = \frac{\mathbb{P}(N=1)}{\mathbb{P}(N=0)} \geq 0$. L'inégalité est même stricte, sans quoi on aurait comme ci-dessus $\mathbb{P}(N = 0) = 1$, ce qui est exclu.

b. Pour $m \geq 1$, on a d'après la relation de Panjer :

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^m (ak + b) \mathbb{P}(N = k-1) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(N = k)$$

par décalage d'indice dans la somme centrale.

c. En appliquant¹ le résultat obtenu en **b.** à l'entier $m + 1$ et en retranchant $a \sum_{k=0}^m k \mathbb{P}(N = k) + (m + 1) \mathbb{P}(N = m + 1)$ aux deux membres, il vient :

$$\forall m \geq 0, \quad (1 - a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) = (a + b) \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(N = k) - (m + 1) \mathbb{P}(N = m + 1). \quad (1)$$

Sachant $a + b \geq 0$ d'après **a.**, il en ressort en particulier que :

$$\forall m \geq 0, \quad (1 - a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(N = k) \leq (a + b) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) = a + b.$$

Puisque $1 - a > 0$ par hypothèse, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_k k \mathbb{P}(N = k)$ sont donc majorées, ce qui assure la convergence (absolue) de cette série : la variable N admet une espérance.

Par suite, le terme général de la série $\sum_k k \mathbb{P}(N = k)$ converge vers 0, et l'on peut donc passer à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$ dans la relation (1) pour obtenir :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(N = k) = \frac{a + b}{1 - a} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) = \frac{a + b}{1 - a}.$$

d. On adapte la méthode proposée en **c.** À partir de la formule :

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 \mathbb{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(N = k),$$

on établit la relation :

$$\forall m \geq 0, \quad (1 - a) \sum_{k=1}^m k^2 \mathbb{P}(N = k) = (2a + b) \sum_{k=0}^m k \mathbb{P}(N = k) + (a + b) \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(N = k) - (m + 1)^2 \mathbb{P}(N = m + 1), \quad (2)$$

d'où l'on déduit d'abord que les sommes partielles de la série $\sum_k k^2 \mathbb{P}(N = k)$ sont majorées sachant que N admet une espérance, ce qui assure l'existence d'un moment d'ordre 2 pour la variable N et la convergence du terme général de la série précédente vers 0, ce qui permet enfin de passer à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$ dans (2) pour obtenir :

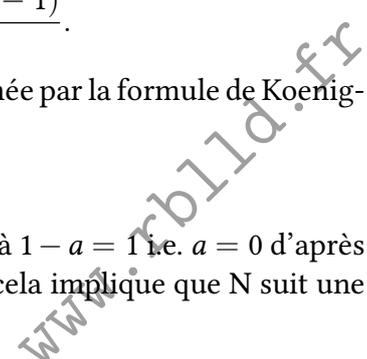
$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{2a + b}{1 - a} \mathbb{E}(N) + \frac{a + b}{1 - a} = \frac{(a + b)(a + b - 1)}{(1 - a)^2}.$$

e. Sachant que N admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2 = \frac{a + b}{(1 - a)^2}.$$

f. Ayant déjà justifié en **a.** que $a + b > 0$, l'égalité $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ équivaut à $1 - a = 1$ i.e. $a = 0$ d'après **c.** et **e.** D'après la question **1.** (et notamment la remarque du corrigé), cela implique que N suit une loi de Poisson. La réciproque est immédiate.

1. L'absence d'information sur le signe de a conduit à quelques contorsions...



Deuxième partie

5. Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq p_k x^k \leq p_k$ pour tout $k \geq 0$, d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum_k p_k x^k$ par comparaison à la série convergente $\sum_k p_k$.

Remarque. L'hypothèse $\frac{b}{a} > 0$ (qui équivaut plus simplement à $b > 0$ ou $\alpha < -1$) est superflue dans les questions qui suivent.

6. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ car $a < 1$. On établit alors la formule par récurrence² sur $k \geq 0$: elle est évidente pour $k = 0$ et, si elle est acquise pour un entier $k \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad f^{(k+1)}(x) &= -k! a(\alpha - k) p_k (1 - ax)^{\alpha-k-1} = k!(a + b + ka) p_k (1 - ax)^{\alpha-k-1} \\ &= (k + 1)! \left(a + \frac{b}{k + 1} \right) p_k (1 - ax)^{\alpha-k-1} = (k + 1)! p_{k+1} (1 - ax)^{\alpha-(k+1)}. \end{aligned}$$

7. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, c'est une application directe de la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0, x]$ à la fonction f , de classe \mathcal{C}^{n+1} : d'après la question 6.,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n + 1) p_{n+1} \int_0^x (1 - at)^{\alpha-n-1} (x - t)^n dt. \end{aligned}$$

b. Pour $t \in [0, x]$,

$$1 - \frac{x-t}{1-at} = \frac{1-x+(1-a)t}{1-at} \geq 0$$

car $a < 1$, si bien (tous les facteurs sont positifs sous l'intégrale) que :

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt = \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1-at} \right)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt.$$

c. La question b. met en évidence que la suite de terme général $\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt$, $n \in \mathbb{N}$, est bornée. Sachant que celle de terme général $(n + 1) p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0 comme on l'a vu en 4.c., on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt = 0,$$

si bien que

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p_k x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - (n + 1) p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \right) = p_0 (1 - ax)^\alpha$$

d'après la question a..

En particulier pour $x = 1$:

$$p_0 = \frac{G(1)}{(1-a)^\alpha} = \frac{1}{(1-a)^\alpha} \sum_{k=0}^\infty p_k = \frac{1}{(1-a)^\alpha},$$

ce qui conduit enfin à :

$$G'(1) = f'(1) = -a\alpha p_0 (1-a)^{\alpha-1} = \frac{a+b}{1-a}$$

c'est-à-dire, par comparaison à la formule obtenue en 4.c., $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Remarque. La formule $G'(1) = \mathbb{E}(N)$ est en fait valable pour toute variable à valeurs dans \mathbb{N} admettant une espérance.

8. Pas de question 8. ?

Troisième partie

9. En utilisant le système complet associé à la variable N et sachant les variables X_i positives, il vient :

$$P(S = 0) = \sum_{k \in \mathbb{N}(\Omega)} P(N = k) P_{[N=k]}(S = 0) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}(\Omega) \setminus \{0\}} p_k P_{[N=k]} \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k} [X_i = 0] \right)$$

2. Le prédicat au rang k énonce la formule pour tout $x \in [0, 1]$, sans quoi on ne peut pas la dériver pour établir l'hérédité !

c'est-à-dire, par indépendance des variables N, X_1, \dots, X_k et d'après le lemme des coalitions :

$$\mathbb{P}(S = 0) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}(\Omega) \setminus \{0\}} p_k \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq k} [X_i = 0]\right) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}(\Omega) \setminus \{0\}} p_k \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i = 0)$$

ou encore, vu que X_1, \dots, X_k sont identiquement distribuées, en notant $x = \mathbb{P}(X_1 = 0) \in [0, 1]$ et en utilisant le résultat établi en 7.c., sachant que $a \in]0, 1[$ (cf. remarque précédant la question 6.),

$$\mathbb{P}(S = 0) = p_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}(\Omega) \setminus \{0\}} p_k \mathbb{P}(X_1 = 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = G(x) = \left(\frac{1-ax}{1-a}\right)^\alpha.$$

10. a. En reprenant les premières étapes du calcul précédent, qui demeurent valables, il vient :

$$\mathbb{P}(S = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda(1-x)}.$$

b. L'instruction `rand() < 1/2` simule la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ (en identifiant respectivement les booléens T et F aux entiers 1 et 0). La fonction proposée simule donc n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$ puis renvoie le nombre de succès. Elle simule donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Remarque. Une programmation matricielle serait plus efficace.

c. Le script ci-dessous convient :

Listing 2 : simulation de S

```
function s=simulS(lambda,n)
    N=grand(1,1,'poi',lambda);
    s=0;
    for k=1:N // ne sera exécuté que si N>=1
        s=s+simulX(n);
    end
endfunction
```

Remarque. La boucle ne sera pas exécutée si $N=0$ car `1:0` renvoie la liste vide. Bien que ce soit possible, il n'est donc pas nécessaire d'inclure une alternative selon que $N=0$ ou pas.

11. a. On suppose³ que $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$ sans quoi la question n'a pas de sens. Conditionnellement à l'événement $[S_{n+1} = k]$, les variables X_1, \dots, X_{n+1} prennent leurs valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$: elles sont donc finies et admettent à ce titre une espérance. Par linéarité de l'espérance (conditionnelle), on a alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_i | S_{n+1} = k) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \mid S_{n+1} = k\right) = \mathbb{E}(S_{n+1} | S_{n+1} = k) = \mathbb{E}(k | S_{n+1} = k) = k,$$

mais par ailleurs les $n+1$ réels $\mathbb{E}(X_i | S_{n+1} = k)$, $1 \leq i \leq n+1$, sont tous égaux car X_1, \dots, X_{n+1} sont indépendantes (de sorte que leurs lois déterminent celle de S_{n+1}), identiquement distribuées et jouent des rôles symétriques dans la définition de S_{n+1} .

Il en ressort que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \mathbb{E}(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

b. Toujours sous l'hypothèse selon laquelle $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$, on a pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) &= \mathbb{P}([X_{n+1} = j] \cap [S_{n+1} = k]) = \mathbb{P}([X_{n+1} = j] \cap [S_n + j = k]) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(S_n = k - j) = q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) \end{aligned}$$

par indépendance de S_n et X_{n+1} , qui découle de celle de X_1, \dots, X_{n+1} et du lemme des coalitions.

Remarque. Si $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, l'argument développé ci-dessus (sans la partie faisant intervenir le conditionnement) montre que $q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

3. Ce n'est pas nécessairement le cas : penser à une variable X_1 ne prenant que des valeurs paires...

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$. Conditionnellement à $[S_{n+1} = k]$, la variable X_{n+1} prend ses valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, si bien que d’après le théorème de transfert et la question a.,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) &= \mathbb{E}\left(a + \frac{bX_{n+1}}{k} \mid S_{n+1} = k\right) \\ &= a + \frac{b}{k} \mathbb{E}(X_{n+1} \mid S_{n+1} = k) = a + \frac{b}{n+1}. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant la question b.,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) &= \left(\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) \\ &= \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k). \end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, la formule est également valable d’après la remarque suivant la question b..

12. a. Pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable N donne (avec la convention $S_0 = 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k - j) &= \sum_{n \in \mathbb{N}(\Omega)} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(S_n = k - j) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}(\Omega)} p_n \mathbb{P}(S_n = k - j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k - j) \end{aligned}$$

par indépendance de N et S_n , qui découle de celle de N, X_1, \dots, X_n et du lemme des coalitions.

b. À partir de 11.c. et a., il vient (une somme finie de séries convergentes est convergente, de somme la somme des sommes) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S_n = k - j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k) \end{aligned}$$

d’après la relation de Panjer.

c. Puisque $k > 0$, on a $\mathbb{P}(S_0 = k) = 0$ si bien que la formule de la question a. pour $j = 0$ s’écrit :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

d. D’après les questions b. et c.,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j) = a q_0 \mathbb{P}(S = k) + \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j)$$

d’où finalement puisque $a < 1$:

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}(S = k - j).$$

