

Corrigé de l'exercice 3

Tiré du Sujet Edhec ECE 2012

1. Une question de cours pour commencer : par définition, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est *diagonalisable* si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice est *diagonale* :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c \text{ sont les valeurs propres de } f, \text{ pas forcément distinctes d'ailleurs.}$$

Mais alors, selon les propriétés de la représentation matricielle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Donc $f \circ f$ est, au sens de la définition, diagonalisable puisque sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est aussi diagonale !

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse, c'est-à-dire que $f \circ f$ peut être diagonalisable, sans que f le soit.

Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. a) Le calcul matriciel donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A^4 = \begin{pmatrix} 1-4+4 & -2+6-4 & 2-4+2 \\ 2-6+4 & -4+9-4 & 4-6+2 \\ 2-4+2 & -4+6-2 & 4-4+1 \end{pmatrix} = I.$$

$A^4 = I \iff A^4 - I = 0$, donc $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A , et par conséquent : les valeurs propres *possibles* de A sont les racines de P .

Or : $P(X) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$, donc les racines de P sont 1 et -1 :

$$\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}.$$

- b) Pour déterminer $\text{Ker}(g - \text{Id})$, on résout le système :

$$(A - I)X = 0 \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -2y + 2z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - z = z \\ y = z \end{cases}, \text{ donc } \text{Ker}(g - \text{Id}) = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

Ainsi 1 est bien valeur propre de g , et comme $u = (1, 1, 1)$ est non nul, il forme une base du sous-espace propre $\text{Ker}(g - \text{Id})$.

- c) De même, on détermine $\text{Ker}(g + \text{Id})$ en résolvant le système :

$$(A + I)X = 0 \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ -14y + 10z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \\ -2z = 0 \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - 7L_2 \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

Ainsi donc, $\text{Ker}(g + \text{Id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, c'est-à-dire que -1 n'est en fait pas valeur propre de g .

d) L'endomorphisme g admet finalement une seule valeur propre réelle, et le sous-espace propre est de dimension 1 : g n'est donc pas diagonalisable.

$$3. a) A^2X = -X \iff (A^2 + I)X = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y - z.$$

Ainsi : $\text{Ker}(g^2 + \text{Id}) = \{(y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

Les vecteurs $v = (1, 1, 0)$ et $w = (-1, 0, 1)$ sont non-colinéaires, donc forment une famille libre, et finalement une base de $\text{Ker}(g^2 + \text{Id})$.

b) La famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : pour montrer que c'est une base de l'espace, il suffit de vérifier que cette famille est libre.

c) Soient a, b, c trois réels tels que : $a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$\iff a = b = c = 0$, donc $\mathcal{B}$ est bien libre, et est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Comme v, w sont éléments de $\text{Ker}(g^2 + \text{Id})$: $g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$.

Comme u appartient à $\text{Ker}(g - \text{Id})$: $g(u) = u$, donc $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} g^2(u) & g^2(v) & g^2(w) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

On a bien obtenu une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g^2 est diagonale, ce qui signifie que g^2 est diagonalisable alors que g ne l'est pas : la réciproque de la propriété démontrée à la question 1. est donc fausse à cause de ce contre-exemple.