Corrigé de l'exercice 1
Partie A de l'exercice 1 du sujet Ecricome ECE 2016

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{ M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Il est assez facile de voir que, d'après les règles de calcul matriciel :

$$E = \{M(x,y) |\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ x.\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   Et donc que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme sous-espace engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont de façon remarquables, respectivement $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$ les deux matrices introduites par l'énoncé.

   Ainsi : $E = \text{Vect}(A, B)$, et comme les matrices A et B sont évidemment non proportionnelles, elles forment une famille libre qui engendre E, donc une base de E.

2. On pourrait chercher classiquement les valeurs propres de A en échelonnant la matrice générale $A-\lambda.I_3$, et déterminer ainsi les réels λ pour lesquels cette matrice n'est pas inversible.

   Mais l'énoncé donne les valeurs propres à tester ! On vérifie donc directement que :

   - $A - 1.I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ où on peut remarquer par exemple, que $L_1 + 2L_2 = L_3$, relation de dépendance linéaire qui assure que $A - I_3$ n'est pas inversible, et donc que $\lambda = 1$ est bien valeur propre de A. D'ailleurs, en résolvant le système d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A - I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x = y - z = -y \\ z = 2y \end{cases}$$

   Le fait qu'on trouve une infinité de solutions confirme que $\lambda = 1$ est valeur propre de A, et de plus :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

   Le sous-espace propre est engendré par un seul vecteur non nul, qui en constitue donc une base.

- $A-2.I_3=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&2&-2\\0&2&-3\end{pmatrix}$ est évidemment non inversible, puisque ses lignes L_1 et L_2 sont opposées.
  En résolvant d'ailleurs le système :
$$(A-2.I_3)X=0_{3,1}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&2y&+&2z&=&0\\-x&+&2y&-&2z&=&0\\&&4y&-&3z&=&0\end{array}\right.\iff\begin{cases}x=2y-2z=-\dfrac{1}{2}z\\y=\dfrac{3}{4}z\end{cases}$$
  On trouve une infinité de solutions : $\lambda=2$ est bien valeur propre de A, et
$$E_2(A)=\left\{\begin{pmatrix}-z/2\\3z/4\\z\end{pmatrix}\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}-1/2\\3/4\\1\end{pmatrix}\Big)=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\Big)$$
  Là encore, on obtient une famille génératrice d'une seul vecteur non nul : c'est une base du sous-espace propre $E_2(A)$.
- $A-3.I_3=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&1&-2\\0&4&-4\end{pmatrix}$ est enfin non-inversible puisque dans cette matrice, $L_3=-2L_1$. De plus :
$$(A-3.I_3)X=0_{3,1}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}&-&2y&+&2z&=&0\\-x&+&y&-&2z&=&0\\&&4y&-&4z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&-&2z&=&0\\&&y&-&z&=&0\ L_3\leftarrow L_3/4\end{array}\right.$$
$$\iff\begin{cases}x=y-2z=-z\\y=z\end{cases}$$
  Ainsi, $\lambda=3$ est bien valeur propre de A, de sous-espace propre associé :
$$E_3(A)=\left\{\begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Big)$$

Bilan : la matrice A, **carrée d'ordre 3**, possède déjà **trois valeurs propres distinctes**. D'après la *condition suffisante* du théorème spectral, on en conclut que :
- La matrice A n'admet pas d'autre valeur propre que $1,\ 2$ et 3.
- La matrice A est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède : la matrice A est semblable à la matrice $D_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ via une matrice de passage P qui contient en colonne un vecteur propre pour chacune des trois valeurs propres, selon l'ordre dans lequel ces valeurs propres sont écrites sur la diagonale de D_A. On peut choisir également, dans chacun des sous-espaces propres, un vecteur propre dont la première coordonnée correspond aux demandes de l'énoncé, ce qui donne la matrice $P=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix}$.
4. La méthode de Gauss donne : $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

5. On note $X_1,\ X_2$ et X_3 les trois vecteurs colonnes de la matrice P ; les calculs matriciels donnent :

$$BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad BX_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \ ; \quad BX_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces calculs signifient : $\quad BX_1 = 0.X_1,\ BX_2 = -1.X_2,\ BX_3 = -1.X_3$, donc que X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de B. Comme ils forment déjà une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que B est aussi diagonalisable via la même matrice de passage P que A, et que :

$$B = PD_BP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Comme on vient de le voir, les matrices A et B sont diagonalisables via la même matrice de passage P. Mais alors, pour tous réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(x,y) = x.A + y.B = x.PD_AP^{-1} + y.PD_BP^{-1} = P(x.D_A + y.D_B)P^{-1} = PD(x,y)P^{-1}$$

où $D(x,y) = x.D_A + y.D_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}$ est bien une matrice diagonale.

Cela signifie au passage que toutes les matrices $M(x,y)$ sont diagonalisables via la même matrice de passage P, et que les valeurs propres de $M(x,y)$ sont : $\quad x,\ 2x-y$ et $3x-y$.

7. On sait que $M(x,y)$ est inversible si et seulement si 0 n'est **pas** valeur propre de cette matrice. D'après ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x,y)$ soit inversible est donc :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et } 2x - y \neq 0 \\ \text{et } 3x - y \neq 0 \end{cases}$$

8. En exploitant la relation obtenue à la question 5 :

$B^2 = (PD_BP^{-1})^2 = PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_B^2P^{-1}$, où $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a la propriété remarquable d'être une matrice diagonale opposée à son carré ($0^2 = 0$ et $(-1)^2 = 1$), donc en fait :

$B^2 = PD_B^2P^{-1} = -PD_BP^{-1} = -B = M(0,-1)$, ce qui fait bien de B^2 une matrice élément de E !

Pour la matrice A : $\quad$ de la même façon, $A^2 = PD_A^2P^{-1}$, qui est égale à une certaine matrice $M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$ si et seulement si :

$$D_A^2 = D(x,y) \iff \begin{cases} 1^2 = x \\ 2^2 = 2x - y \\ 3^2 = 3x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes du système sont incompatibles, donc le problème n'a pas de solution : la matrice A^2 n'appartient pas à E.