Corrigé de l'exercice 3

Cet exercice est principalement basé sur le début de la partie 3 du sujet de Maths I ESSEC E 2014, mais les principes exposés ont largement été repris dans d'autres sujets parisiens depuis.

1. Un premier résultat fondamental.

a) La stricte positivité de f sur I implique la stricte croissance de H sur I, sur lequel cette restriction de la fonction de répartition F est aussi continue.

Il reste à dire que puisque f est supposée nulle en-dehors de $I =]a; b[$, alors nécessairement :

$$\lim_{x\to a^+} F_X(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} H(x), \quad \text{tandis que} \quad \lim_{x\to b^-} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to b^-} H(x).$$

On peut ainsi invoquer le théorème éponyme qui garantit que H réalise une bijection de I sur $]0, 1[$.

En notant H^{-1} la bijection réciproque, le tableau de variations de H^{-1} est le suivant :

x	0		1
H^{-1}	a	$\nearrow$	b

b) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose $Z = H^{-1}(U)$, et on note G la fonction de Z.

Pour tout réel x de I :

$$G(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}\big(H^{-1}(U) \leqslant x\big) = \mathbb{P}\big(U \leqslant H(x)\big) \quad \text{par stricte croissance et bijectivité de } H$$

$$= H(x) = F_X(x) \quad \text{puisque :} \quad \forall x \in I,\ H(x) \in]0, 1[\,!$$

En effet U suit la loi uniforme sur $]0; 1[$, donc a pour fonction de répartition $F_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$,

et on utilise bien la deuxième expression puisque pour tout x de I, $H(x) \in]0; 1[$.

Il reste ici à dire que : $Z = H^{-1}(U)$ est à valeurs dans $]a; b[$ d'après le tableau précédent, ce qui garantit que (pour autant que cela ait un sens, suivant que a et/ou b sont infinis) :

$$\forall x < a, \quad G(x) = 0 = F_X(x) \quad \text{et} \quad \forall x > b,\ G(x) = 1 = F_X(x)$$

et ainsi on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ FX(x) = G(x)$. Les deux variables aléatoires X et Z ayant la même fonction de répartition, suivent par conséquent la même loi.

2. Exemple 1 : LE grand classique de la loi exponentielle.

On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) D'après le cours sur cette loi usuelle, en prenant un intervalle ouvert pour I :

$$I =]0, +\infty[, \quad f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda.e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On obtient l'expression de la bijection réciproque H^{-1} en résolvant, pour tout y de $]0, 1[$, l'équation :

$$H(x) = y \iff 1 - e^{-\lambda x} = y \iff 1 - y = e^{-\lambda x} \iff \ln(1-y) = -\lambda x \iff x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y) = H^{-1}(y)$$

Par conéquent, et d'après le résultat général démontré précédemment, si U suit la loi uniforme sur $]0; 1[$, alors $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Évidemment, `Scilab` dispose déjà d'une fonction de simulation de la loi exponentielle (à savoir `grand(1,1,'exp',1/lambda)`), ce qui n'empêche pas d'écrire celle-ci, qui simule cette loi uniquement à partir de la loi uniforme sur $]0;1[$:

```
function x = expo(lambda)
    y = rand()
    x = -log(1-y)/lambda
endfunction
```

3. Exemple 2 : Loi de Gumbel (HEC 2010).

a) La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_G(x) = e^{-e^{-(x+a)}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = e^{-(x+a)} \times e^{-e^{-(x+a)}} > 0,$$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-(x+a)} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-e^{-(x+a)}} = e^{-0} = 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-(x+a)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-e^{-(x+a)}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

La fonction F vérifie bien toutes les conditions pour être la fonction de répartition d'une variable à densité X.

b) Les résultats de la question précédente prouvent qu'on peut ici prendre $I =]-\infty;+\infty[$, et que H est exactement la même fonction que F_X (on ne réalise pas de restriction vu que I est égal à $\mathbb{R}$ tout entier).

Là encore, on calcule explicitement la bijection réciproque de H en résolvant, pour tout $y \in]0;1[$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x) = y \iff e^{-e^{-(x+a)}} = y \iff -e^{-(x+a)} = \ln(y) \iff e^{-x-a} = -\ln(y)$$
$$\iff -x - a = \ln\big(-\ln(y)\big) \iff x = -\ln\big(-\ln(y)\big) - a.$$

Remarquons ici que puisque $y \in]0;1[$, alors $\ln(y) < 0$ donc $-\ln(y) > 0$ et on peut donc bien reprendre le logarithme de cette expression.

De tout ceci on déduit que si U suit la loi uniforme sur $]0;1[$, alors $Z = -\ln\big(-\ln(U)\big) - a$ suit la loi de Gumbel de paramètre a ; le code `Scilab` s'en déduit :

```
function Z = Gumbel(a)
    U = rand()
    Z = -log(-log(U))-a
endfunction
```

4. Exemple 3 (HEC 2012).

a) Vérifions trois points nécessaires pour affirmer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité :

- La fonction puissance $x \mapsto x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln(x)}$ étant positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $f_{(\lambda,\alpha)}$ est bien positive sur $]0, +\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$ car elle est nulle sur $]-\infty, 0]$, et
- $f_{(\lambda,\alpha)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constant nulle, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
- Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \alpha.x^{\alpha-1}$ est la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$, donc $f_{(\lambda,\alpha)}$ admet pour primitive la fonction : $x \mapsto -\exp(-\lambda.x^\alpha)$, et :

  Pour tous réels A, B tels que $0 < A < B$,
  $\displaystyle\int_A^B f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x = [-\exp(-\lambda.x^\alpha)]_A^B = -\exp(-\lambda.B^\alpha) + \exp(-\lambda.A^\alpha)$, où :
  $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} A^\alpha = 0$ selon le prolongement par continuité classique de cette fonction de référence (sachant que $A^\alpha = \exp(\alpha.\ln(A))$ où $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \alpha.\ln(A) = -\infty$ car $\alpha > 0$), donc : $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} -\lambda.A^\alpha = 0$ et $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \exp(-\lambda.A^\alpha) = e^0 = 1$.
  D'autre part : $\displaystyle\lim_{B\to +\infty} -\lambda.B^\alpha = -\infty$ car $\lambda > 0$, donc $\displaystyle\lim_{B\to +\infty} \exp(-\lambda.B^\alpha) = 0$.

  Tout ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x$ est convergente, et vaut 1.

  Comme par ailleurs, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x = 0$ car $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle sur l'intervalle considéré :
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x$ est bien convergente et vaut 1.

Finalement, la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit alors W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ (*Loi de Weibull*).

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Au vu des calculs précédents, il est clair que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \int_{-\infty}^x f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \int_0^x f_{(\lambda,\alpha)}(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to 0^+} -\exp(-\lambda.x^\alpha) + \exp(-\lambda.A^\alpha) = 1 - \exp(-\lambda.x^\alpha).$$

La formulation de l'énoncé nous incite ici à reproduire dans ce cas particulier, le raisonnement général mené plus haut : la fonction $F_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, +\infty[$, intervalle sur lequel elle est également strictement croissante (car sa dérivée $f_{(\lambda,\alpha)}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$), avec $F_{(\lambda,\alpha)}(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F_{(\lambda,\alpha)}(x) = 1$ puisque c'est une fonction de répartition ; $F_{(\lambda,\alpha)}$ réalise donc une *bijection* de $[0; +\infty[$ dans $[0; 1[$.
La bijection réciproque $F_{(\lambda,\alpha)}^{-1}$ est alors continue, strictement croissante de $[0; 1[$ dans $[0; +\infty[$. Comme $W(\Omega) =]0; +\infty[$, la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ est bien définie et à valeurs dans $[0; 1[$.
On peut donc déjà conclure que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, & \mathbb{P}(F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x) = 0 \text{ (l'événement est impossible)} \\ \forall x \in [1, +\infty[, & \mathbb{P}(F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x) = 1 \text{ (l'événement est certain)} \end{cases}$.
Enfin, pour tout réel x de $[0, 1[$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x) &= \mathbb{P}(W \leqslant F_{(\lambda,\alpha)}^{-1}(x)) \text{ par stricte croissance de } F_{(\lambda,\alpha)}^{-1} \text{ sur } [0; 1[\\ &= F_{(\lambda,\alpha)}(F_{(\lambda,\alpha)}^{-1}(x)) \text{ car } W \text{ a pour f.d.r. } F_{(\lambda,\alpha)} \\ \mathbb{P}(F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x) &= x \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de répartition G de $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ vérifie : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$,

ce qui prouve bien que $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0;1[$.

c) On conclut en disant que, d'après ce qu'on a vu tout au long de l'exercice, $W = F_{(\lambda,\alpha)}^{-1}(U)$ suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$ si U suit la loi uniforme à densité sur $]0;1[$.

Il reste donc à expliciter la bijection réciproque, en résolvant pour tout $y \in]0;1[$, l'équation : $F_{(\lambda,\alpha)}(x) = y$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

$F_{(\lambda,\alpha)}(x) = y \iff 1 - \exp(-\lambda.x^\alpha) = y \iff \exp(-\lambda.x^\alpha) = 1 - y \iff -\lambda.x^\alpha = \ln(1-y)$

$\iff x^\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}.\ln(1-y) \iff x = \left[-\dfrac{1}{\lambda}.\ln(1-y)\right]^{1/\alpha}$

(Remarque : $y \in]0;1[$ donc $\ln(1-y) < 0$ et $-\dfrac{1}{\lambda}.\ln(1-y) > 0$, donc la puissance $1/\alpha$ est bien définie).

$$\text{Ainsi : si } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[), \text{ alors } W = \left[-\frac{1}{\lambda}.\ln(1-U)\right]^{1/\alpha} \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda,\alpha).$$

Le script `Scilab` s'en déduit :

```
function r=W(lambda,alpha)
    u=rand()
    r = (-log(1-u)/lambda)^(1/alpha)
endfunction
```