MATHÉMATIQUES - HEC B/L 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Problème 1

Partie I. Quelques propriétés de Φ

1. a) Pour tous polynômes P et Q de E_n, et pour tout réel λ :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\cdot P+Q)&=(X^2-1)(\lambda\cdot P+Q)''+2X(\lambda\cdot P+Q)'\\&=(X^2-1)(\lambda\cdot P''+Q'')+2X(\lambda\cdot P'+Q')\quad\text{par linéarité de la dérivation}\\&=\lambda\cdot\big((X^2-1)P''+2XP'\big)+\big((X^2-1)Q''+2XQ'\big)=\lambda\cdot\Phi(P)+\Phi(Q),\end{aligned}$$

donc Φ est une application linéaire sur E_n. De plus, pour tout $P\in E_n$, d'après les règles sur les degrés :
deg $P\leqslant n$ donc deg $P'\leqslant n-1$ et $\deg(2XP')=1+\deg(P)\leqslant n$, puis deg $P''\leqslant n-2$,
et $\deg(X^2-1)P''=2+\deg P''\leqslant n$, donc $\deg(X^2-1)P''+2XP'\leqslant n$ et $\Phi(P)\in E_n$.
Ainsi, Φ est un endomorphisme de E_n.

b) Pour tout entier k compris entre 2 et n :

$$\Phi(X^k)=(X^2-1)\cdot k(k-1)X^{k-2}+2X\cdot kX^{k-1}=k(k-1)X^k-k(k-1)X^{k-2}+2kX^k=k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}.$$

Également : $\Phi(X^0)=0_{E_n}$ et $\Phi(X)=(X^2-1)\cdot 0_{E_n}+2X=2X$. On en déduit la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_n$:

$$A=\begin{array}{cc}\begin{matrix}\Phi(X^0)&\Phi(X^1)&\Phi(X^2)&\Phi(X^3)&\cdots&\cdots&\cdots&\Phi(X^{n-1})&\Phi(X^n)\end{matrix}&\\ \begin{pmatrix}0&0&-2&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&0\\ \vdots&2&0&-6&&&&&\vdots\\ \vdots&0&6&0&\ddots&&&&\vdots\\ \vdots&\vdots&0&12&\ddots&\ddots&&&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\ddots&0&-n(n-1)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&&\ddots&(n-1)n&0\\ 0&0&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&n(n+1)\end{pmatrix}&\begin{matrix}X^0\\X^1\\X^2\\X^3\\\vdots\\\vdots\\X^{n-2}\\X^{n-1}\\X^n\end{matrix}\end{array}$$

2. a) La question précédente a illustré le fait que la matrice A de Φ est triangulaire supérieure : les valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, et ce sont aussi celles de Φ. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(\Phi)=\big\{k(k+1)|\ k\in[\![0\,;n]\!]\big\}.$$

b) L'application $k \mapsto k(k+1)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{N}$, l'endomorphisme Φ admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes ; comme $\dim E_n = n+1$, le critère suffisant s'applique et Φ est diagonalisable.

c) Toujours d'après les conclusions du critère suffisant, les $n+1$ sous-espaces propres de Φ sont tous de dimension 1 chacun.

d) Le noyau de Φ correspond au sous-espace propre de Φ pour la valeur propre 0. Comme on vient de le voir, $\text{Ker}(\Phi)$ est donc de dimension 1. Comme X^0 (le polynôme constant égal à 1) appartient à $\text{Ker}(\Phi)$ et est non nul, on en déduit que : $\text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}(X^0)$, c'est-à-dire que le noyau de Φ est l'ensemble des polynômes constants.

Partie II. Une base de vecteurs propres de Φ.

Dans cette partie, on note i un entier de $[\![1\,;n]\!]$ et on considère les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, A_i et ℓ_i tels que : $A_i = (X^2-1)^i$ et $\ell_i = A_i^{(i)}$.

3. a) D'après la formule de Leibniz (la formule [1]), donnée dans l'énoncé :

$$(XA_i)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^{(k)} A_i^{(i-k)} = \binom{i}{0} X A_i^{(i)} + \binom{i}{1} X^{(1)} A_i^{(i-1)} \quad \text{car } X^{(k)} = 0_{E_n} \text{ pour tout } k \geqslant 2$$
$$= X\ell_i + iA_i^{(i-1)}.$$

b) En écrivant $A_{i+1} = (X^2-1)^{i+1} = (X^2-1)\times(X^2-1)^i = (X^2-1)A_i$, la formule [1] donne :

$$\begin{aligned} A_{i+1}^{(i+1)} &= \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} (X^2-1)^{(k)} A_i^{(i+1-k)} \\ &= \binom{i+1}{0}(X^2-1)A_i^{(i+1)} + \binom{i+1}{1}\cdot 2XA_i^{(i)} + \binom{i+1}{2}\cdot 2A_i^{(i-1)} \\ &= (X^2-1)A_i^{(i+1)} + 2(i+1)XA_i^{(i)} + i(i+1)A_i^{(i-1)} \end{aligned}$$

c) D'après 3.a), $X\ell_i = (XA_i)^{(i)} - iA_i^{(i-1)}$ et $A_i^{(i+1)} = \left(A_i^{(i)}\right)' = \ell_i'$, donc la relation précédente se réécrit :

$$\ell_{i+1} = (X^2-1)\ell_i' + 2(i+1)X\ell_i + i(i+1)A_i^{(i-1)} \iff (X^2-1)\ell_i' = \ell_{i+1} - 2(i+1)(XA_i)^{(i)} + i(i+1)A_i^{(i-1)}.$$

4. a) En dérivant une fois $A_{i+1} = (X^2-1)^{i+1}$: $A_{i+1}' = 2(i+1)X(X^2-1)^i = 2(i+1)XA_i$.

b) En dérivant i fois la relation précédente, on obtient :

$$\left(A_{i+1}'\right)^{(i)} = A_{i+1}^{(i+1)} = \left(2(i+1)XA_i\right)^{(i)} = 2(i+1)\cdot(XA_i)^{(i)},$$

donc la relation obtenue en 3.c) se réécrit :

$$(X^2-1)\ell_i' = \ell_{i+1} - \underbrace{A_{i+1}^{(i+1)}}_{=\ell_{i+1}} + i(i+1)A_i^{(i-1)} = i(i+1)A_i^{(i-1)}.$$

c) D'après tout ce qui précède, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\Phi(\ell_i) = (X^2-1)\ell_i'' - 2X\ell_i' = \left((X^2-1)\ell_i'\right)' = \left(i(i+1)A_i^{(i-1)}\right)' = i(i+1)A_i^{(i)} \iff \Phi(\ell_i) = i(i+1)\ell_i.$$

D'autre part, $\Phi(\ell_0) = \Phi(X^0) = 0$, donc pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $\Phi(\ell_i) = i(i+1)\ell_i$, ce qui prouve que ℓ_i est vecteur propre de Φ pour la valeur propre $i(i+1)$.
Comme il s'agit de $(n+1)$ vecteurs non nuls, chacun associé à une valeur propre distincte de toutes les autres : la famille $(\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de E_n qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de E_n formée de vecteurs propres pour Φ.

5. a) L'identité remarquable $X^2-1=(X-1)(X+1)$ permet effectivement d'écrire $A_i=(X^2-1)^i=(X+1)^i(X-1)^i$, et la formule [1] donne alors :

$$\begin{aligned}\ell_i = A_i^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\big((X+1)^i\big)^{(k)}\big((X-1)^i\big)^{(i-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} i(i-1)\cdots(i-k+1)(X+1)^{i-k}\cdot i(i-1)\cdots(k+1)(X-1)^k\end{aligned}$$

En évaluant cette relation au point 1, on annule tous les termes qui contiennent un facteur $(X-1)^k$ d'exposant strictement positif, c'est-à-dire tous les termes de la somme, sauf celui pour $k=0$, qui vaut $\binom{i}{0}\big((X+1)^i\big)^{(0)}\big((X-1)^i\big)^{(i)}=i!(X+1)^i$, de sorte que :

$$\ell_i(1)=i!2^i.$$

b) Le polynôme ℓ_i est obtenu en dérivant i fois $(X^2-1)^i$ qui est de degré $2i$, donc $\deg \ell_i = i$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$.
Le terme de plus haut degré de ℓ_i est, par linéarité de la dérivation, obtenu en dérivant i fois le terme de plus haut degré de $(X^2-1)^i$, qui est X^{2i} : c'est donc $2i(2i-1)\cdots(i+1)X^i=\dfrac{(2i)!}{i!}X^i$.

Partie III. Décomposition d'un polynôme $P\in E_n$ sur une base $\mathcal{B}'_n$.

6. a) Soit $j\in\mathbb{N}^*$. En reprenant le même principe qu'à la question 5.a), pour tout $k\in[\![0\,;j-1]\!]$:

$$A_j^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\big((X+1)^j\big)^{(i)}\big((X-1)^j\big)^{(k-i)},$$

où : $0\leqslant i\leqslant k<j$, donc -1 est racine de chaque facteur $\big((X+1)^j\big)^{(i)}$, et $0\leqslant k-i\leqslant k<j$, donc 1 est racine de chaque facteur $\big((X-1)^j\big)^{(k-i)}$.
Ainsi, $A_j^{(k)}$ est la somme de $k+1$ termes qui admettent chacun -1 et 1 pour racine : ce sont donc des racines de ce polynôme (tous les termes s'annuleront lors de l'évaluation de $A_j^{(k)}$ en -1 et en 1).

b) Pour tout couple d'entiers (i,j) vérifiant $0\leqslant i<j$, d'après la formule [2] (intégration par parties généralisée) :

$$\begin{aligned}J_{i,j}&=\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\ell_j(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}A_i^{(i)}(t)A_j^{(j)}(t)\mathrm{d}t \quad \text{on prend } u=A_j,\ m=j \text{ et } v=A_i^{(i)} \text{ dans la formule [2]}\\ &=\Big[\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^kA_j^{(j-1-k)}(t)A_i^{(i+k)}(t)\Big]_{-1}^{1}+(-1)^j\int_{-1}^{1}A_j(t)A_i^{(j+i)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or pour tout $k\in[\![0\,;j-1]\!]$, $0\leqslant j-1-k\leqslant j-1$ donc d'après ce qui précède, $A_j^{(j-1-k)}(t)$ s'annule en $t=1$ et en $t=-1$, donc tous les termes de la somme ci-dessus s'annulent. Quant à l'intégrale restante : comme $j>i$, $j+i>2i$ donc $A_i^{(j+i)}$ est le polynôme nul, puisqu'on dérive A_i qui est de degré $2i$, un nombre de fois strictement supérieur à son degré !

Bref : pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $i<j$, l'intégrale $J_{i,j}$ est nulle. Remarquons qu'en échangeant les rôles de i et j, on obtient de même que $J_{i,j}=0$ si $i>j$, et donc $J_{i,j}=0$ dès que $i\neq j$.

7. Pour tout entier naturel i, on note I_i l'intégrale définie par : $\quad I_i=\displaystyle\int_{-1}^{1}\ell_i^2(t)\mathrm{d}t.$

a) En reprenant la formule [2] comme à la question précédente, mais cette fois avec $i=j$, on obtient :

$$I_i = \left[\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k A_i^{(i-1-k)}(t)A_i^{(i+k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^i\int_{-1}^{1} A_i(t)A_i^{(2i)}(t)\mathrm{d}t.$$

Là encore, pour tout $k\in[\![0\,;i-1]\!]$, $0\leqslant i-1-k\leqslant i-1<i$ donc $A_i^{(i-1-k)}(t)$ s'annule en $t=1$ et en $t=-1$, donc la somme est nulle.
Dans l'intégrale restante : $A_i^{(2i)}$ est le polynôme A_i dérivé autant de fois que son degré, donc ce polynôme est égal au terme dominant de A_i lui-même dérivé $2i$ fois, ce qui est égal au polynôme constant : $\dfrac{(2i)!}{i!}\times i! = (2i)!$, de sorte que :

$$I_i = (-1)^i\int_{-1}^{1} A_i(t)\cdot(2i)!\mathrm{d}t = (-1)^i(2i)!\int_{-1}^{1}(t^2-1)^i\mathrm{d}t.$$

b) On pose $K_i=\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)^i\mathrm{d}t$. On réalise ici une seule intégration par parties, en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t)=(t^2-1)^i & \longrightarrow & u'(t)=2it(t^2-1)^{i-1} \\ v'(t)=1 & \longrightarrow & v(t)=t \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1\,;1]$, donc :

$$K_i = \underbrace{\Big[t(t^2-1)^i\Big]_{-1}^{1}}_{=0} -2i\int_{-1}^{1} t^2(t^2-1)^{i-1}\mathrm{d}t = -2i\int_{-1}^{1}(t^2-1+1)(t^2-1)^{i-1}\mathrm{d}t$$

$$= -2i\int_{-1}^{1}\big((t^2-1)^i+(t^2-1)^{i-1}\big)\mathrm{d}t = -2i(K_i+K_{i-1}),$$

soit en effet : $\quad (2i+1)K_i = -2iK_{i-1}$.

c) On peut ici raisonner par récurrence sur i ; soit $\mathcal{P}(i)$: "$I_i=\dfrac{(i!)^2}{2i+1}2^{2i+1}$" pour tout $i\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $i=0$: $I_0=(-1)^0\cdot 0!\cdot\displaystyle\int_{-1}^{1}(t^2-1)^0\mathrm{d}t = 1\cdot\big(1-(-1)\big)=2=\dfrac{(0!)^2}{2\times 0+1}2^{2\times 0+1}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(i)$ vraie pour un certain $i\in\mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(i+1)$ est encore vraie, soit : $I_{i+1}=\dfrac{\big((i+1)!\big)^2}{2(i+1)+1}2^{2(i+1)+1}=\dfrac{\big((i+1)!\big)^2}{2i+3}2^{2i+3}$.

D'après les résultats des questions 7.a) et 7/b) :

$$I_{i+1} = (-1)^{i+1}\big(2(i+1)\big)!K_{i+1} = (-1)^{i+1}(2i+2)!\times\frac{-2(i+1)}{2(i+1)+1}K_i$$

$$= (-1)^i\frac{(2i+2)^2(2i+1)(2i)!}{2i+3}K_i = \frac{4(i+1)^2(2i+1)}{2i+3}I_i$$

$$\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{4(i+1)^2(2i+1)}{2i+3}\times\frac{(i!)^2}{2i+1}2^{2i+1} = \frac{\big((i+1)!\big)^2}{2i+3}2^{2i+3},$$

donc $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(i)$ l'est.

$\boxed{\text{H.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $i\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

8. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad L_i = \dfrac{1}{2^i i!}\ell_i$.

a) On pose : $\quad \mathcal{B}'_n = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$. Puisque d'après 5.b), $\deg \ell_i = i$, il s'agit d'une famille de $n+1$ vecteurs de E_n, lequel est un espace vectoriel de dimension $n+1$. La famille $\mathcal{B}'_n$ est aussi libre puisque ses éléments sont des polynômes de degrés deux à deux distincts. Tous ces arguments assurent alors que $\mathcal{B}'_n$ est une base de E_n.

b) Puisque la famille $\mathcal{B}'_n$ est une base de E_n, on sait que pour tout polynôme $P \in E_n$, il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uniques tels que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i.$$

Muni de cette décomposition théorique de P, on peut alors calculer, pour tout entier $j \in [\![0\,;n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)L_j(t)\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n} a_i \int_{-1}^{1} L_i(t)L_j(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{2^i i!}\cdot\frac{1}{2^j j!}\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\ell_j(t)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{a_i}{(2^i i!)^2}\int_{-1}^{1}\ell_i^2(t)\mathrm{d}t \quad \text{puisque } \int_{-1}^{1}\ell_i(t)\ell_j(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ dès que } i \neq j\\
&= \frac{a_i}{(2^i i!)^2} I_i = \frac{a_i}{(2^i i!)^2}\cdot\frac{(i!)^2}{2i+1}2^{2i+1} = \frac{2a_i}{2i+1}
\end{aligned}$$

On en déduit donc : $\quad \forall i \in [\![0\,;n]\!],\ a_i = \dfrac{2i+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)L_i(t)\mathrm{d}t$, de sorte que la décomposition de P dans la base $\mathcal{B}'_n$ s'écrit en effet :

$$P = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)L_i(t)\mathrm{d}t\right)\cdot L_i.$$

Problème 2

Partie I. Exemples et premières propriétés.

1. a) Pour tout $t \in \mathcal{D}_X$: $\quad M_X(t) = E(e^{tX})$ est l'espérance d'une variable aléatoire positive (à cause de l'exponentielle), donc par positivité de l'espérance, $M_X(t) \geqslant 0$.

b) L'énoncé rappelle que 0 appartient toujours à $\mathcal{D}_X$, donc d'après le résultat admis *(ii)* :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = E(X^k e^{0\cdot X}) = E(X^k).$$

2. a) Pour tous réels a et b :

$$t \in \mathcal{D}_{aX+b} \iff E(e^{t(aX+b)}) \text{ existe } \iff E(e^{bt}\cdot e^{atX}) \text{ existe } \overset{(\star)}{\iff} E(e^{atX}) \text{ existe } \iff at \in \mathcal{D}_X.$$

On a utilisé à l'étape $(\star)$ la linéarité de l'espérance, puisque e^{bt} est un facteur constant.

b) En reprenant en partie ce qui précède : par linéarité de l'espérance,

$$\forall t \in \mathcal{D}_{aX+b},\ M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{bt}\cdot e^{atX}) = e^{bt}\cdot E(e^{atX}) = e^{bt}\cdot M_X(at).$$

3. a) On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres (n, p). D'après le théorème de transfert : puisque X est ici une variable aléatoire finie, alors $E(e^{tX})$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$ et pour tout réel t :

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p \cdot e^t)^k (1-p)^{n-k} \boxed{= (p \cdot e^t + 1 - p)^n}, \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

b) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Cette fois le théorème de transfert demande la convergence absolue de la série $\sum_{k \geqslant 0} e^{tk} \mathbb{P}(X = k)$ pour pouvoir définir $M_X(t) = E(e^{tX})$.

Comme $e^{tk} > 0$ et $P(X = k) > 0$, il s'agit d'une série à termes positifs, donc la convergence simple suffit.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad e^{tk} P(X = k) = \dfrac{e^{tk} \cdot e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{(\lambda e^t)^k}{k!}$ est le terme général d'une série exponentielle toujours convergente : on en déduit que $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda + \lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

c) On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
S'agissant cette fois d'une variable à densité : le théorème de transfert stipule que $E(e^{tX}) = M_X(t)$ est bien défini si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$, est absolument convergente.
Comme f_X est nulle sur $]-\infty\,; 0[$ et positive sur $[0\,; +\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} \mathrm{d}x.$$

On sait que ces intégrales exponentielles convergent si et seulement si $t - \lambda < 0 \iff t < \lambda$, donc $\mathcal{D}_X =]-\infty\,; \lambda[$, et pour tout $t \in \mathcal{D}_X$:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \lambda \cdot \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{(t-\lambda)x} \mathrm{d}x = \lambda \cdot \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t - \lambda} \right]_0^A = \frac{\lambda}{t - \lambda} \cdot \Big(\underbrace{\lim_{A \to +\infty} e^{(t-\lambda)A}}_{=0 \text{ car } t - \lambda < 0} - 1 \Big) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

4. On suppose que X suit la loi normale centrée réduite de densité continue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé : la fonction $t \mapsto e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}}}{e^{-\frac{u^2}{4}}} = e^{tu - \frac{u^2}{4}}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, puisque $\lim\limits_{u \to \pm +\infty} tu - \frac{u^2}{4} = -\infty$ (le terme de degré 2 impose sa limite).
Ainsi, $e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}} = o_{\pm\infty}(e^{-\frac{u^2}{4}})$, or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} \mathrm{d}u$ converge, puisqu'à un facteur constant près, cette intégrale correspond à celle de la densité d'une loi normale centrée, de variance $\frac{1}{2}$.
Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$ est elle-même convergente.

b) D'après ce qui précède et le théorème de transfert pour les variables à densité, $M_X(t) = E(e^{tX})$ est bien défini pour tout réel t, donc $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$.

De plus, on a en effet : $\quad -\dfrac{1}{2}(u-t)^2 + \dfrac{t^2}{2} = -\dfrac{1}{2}u^2 + ut - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{t^2}{2} = tu - \dfrac{u^2}{2}$, donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2+\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v \quad \text{changement de variable affine : } v = u - t \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot 1,
\end{aligned}$$

puisqu'on a intégré sur $\mathbb{R}$ une densité de la loi normale, centrée réduite. On a bien montré que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

c) Sachant que X suit la loi normale centrée, réduite, le théorème de stabilité de la loi normale assure que pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ des constantes données, $Y = \sigma X + m$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2).

d) D'après la question 2), comme $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{D}_Y = \mathbb{R}$ également, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = M_{\sigma X+m}(t) = e^{mt} M_X(\sigma t) = e^{mt} \cdot e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{mt+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

On pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Soit $t \in \mathcal{D}_{X_1}$: on cherche à savoir si $E(e^{tS_n})$ existe, or :

$$e^{tS_n} = e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)} = e^{tX_1+tX_2+\cdots+tX_n} = e^{tX_1} \times e^{tX_2} \times \cdots \times e^{tX_n},$$

donc par le lemme des coalitions, e^{tS_n} est le produit de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, qui admettent chacune une espérance puisque $t \in \mathcal{D}_{X_1} = \mathcal{D}_{X_i}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$: par conséquent, $E(e^{tS_n})$ existe aussi et $t \in \mathcal{D}_{S_n}$.

b) En poursuivant le raisonnement précédent, on a par propriété de l'espérance, et mutuelle indépendance de $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots, e^{tX_n}$:

$$\forall t \in \mathcal{D}_{X_1}, \quad M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1}) \times E(e^{tX_2}) \times \cdots \times E(e^{tX_n}) = \big(E(e^{tX_1})\big)^n = \big(M_{X_1}(t)\big)^n,$$

puisque les $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ suivent toutes la même loi.

Partie II. Fonction génératrice des moments et théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X admettant une espérance $m \in \mathbb{R}$ et une variance $\sigma^2 > 0$.

On pose : $Y = X - m\,;\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ Y_k = X_k - m$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$.

6. La variable aléatoire Z_n est la variable centrée, réduite associée à S_n qui est elle-même la somme de n variables indépendantes et de même loi, admettant une espérance une variance, cette dernière non nulle : le théorème de la limite centrée assure alors que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

7. L'énoncé proposait ici de démontrer ce théorème, largement admis dans le cours.

a) D'après 5.a) : si $t \in \mathcal{D}_X$, alors $t \in \mathcal{D}_{S_n}$. Or $S_n = \sigma\sqrt{n} \cdot Z_n + nm$ est de la forme $aZ_n + b$, donc d'après 2.a) : si $t \in \mathcal{D}_{S_n}$, alors $\sigma\sqrt{n}t \in \mathcal{D}_{Z_n}$. Donc si $t \in \mathcal{D}_X$, alors $\sigma\sqrt{n}t \in \mathcal{D}_{Z_n}$.

b) Pour tout réel t tel que $\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}} \in \mathcal{D}_X$: alors $\sigma\sqrt{n} \cdot \dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}} = t \in \mathcal{D}_{Z_n}$ d'après ce qui précède.

En utilisant 2.b), toujours via la relation $S_n = \sigma\sqrt{n}Z_n + nm$, ainsi que 5.b), on obtient :

$$M_{S_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{nm}M_{Z_n}(t) \iff M_{Z_n}(t) = e^{-nm}\left(M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(e^{-m}M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

En effet, pour tout $z \in \mathcal{D}_X$, $e^{-m}M_X(z) = M_{X-m}(z) = M_Y(z)$, toujours d'après 2.b).

c) Soit $R > 0$ tel que $\mathcal{D}_Y$ contient l'intervalle ouvert $]-R\,;R[$.

Comme pour $\sigma > 0$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma\sqrt{n} = +\infty$, alors il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma\sqrt{n} > 1$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

On a alors, pour tout $t \in]-R\,;R[$ et tout $n \geqslant n_0$:

$$-R < t < R \Longrightarrow -R < -\frac{R}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{R}{\sigma\sqrt{n}} < R \Longrightarrow \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \subset]-R\,;R[\subset \mathcal{D}_Y.$$

d) D'après les résultats admis au début de l'énoncé : la fonction M_Y est de classe C^∞ sur $\mathcal{D}_Y$ qui contient $]-R\,;R[$, donc elle admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, donné par la formule de Taylor-Young :

$$M_Y(x) = M_Y(0) + x \cdot M_Y'(0) + \frac{x^2}{2}M_Y''(0) + o(x^2),$$

où d'après le résultat admis en début d'énoncé quand aux dérivées successives des fonctions génératrices :

- $M_Y(0) = E(e^{0\cdot Y}) = E(1) = 1$
- $M_Y'(0) = E(Ye^{0\cdot Y}) = E(Y) = E(X) - m = m - m = 0$
- $M''(Y)(0) = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = V(X) + 0 = \sigma^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens et les propriétés de la variance.

On a ainsi bien démontré qu'au voisinage de 0 : $M_Y(x) = 1 + \dfrac{\sigma^2x^2}{2} + o(x^2)$, donc avec $x = \dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et ce pour tout $t \in]-R\,;R[$:

$$M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{\sigma^2t^2}{2\sigma^2(\sqrt{n})^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

e) En reprenant le résultat de 7.b) et en l'écrivant sous forme exponentielle : pour tout $t \in]-R\,;R[$,

$$M_{Z_n}(t) = \exp\left(n\ln\left(M_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n\times\frac{t^2}{2n}+o(1)\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}+o(1)\right),$$

en utilisant aussi le développement limité à l'ordre 1 du logarithme : $\ln(1+u) = u + o(u)$ au voisinage de 0.

La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\forall t \in]-R\,;R[, \quad \lim_{t\to+\infty} M_{Z_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

où Z suit la loi normale centrée, réduite : on a en effet reconnu ici le résultat de 4.b).

f) On est donc ici dans le cas d'application du point (iv) admis par l'énoncé : il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in]-R\,;R[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$; on conclut que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit la loi normale centrée, réduite : c'était la conclusion du théorème de la limite centrée, qu'on a donc démontré ici (partiellement tout de même, au vu du nombre de résultats qu'il a fallu admettre pour cela !).