BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 338

Conception : HEC Paris

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

Vendredi 11 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

OPTIONS :

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets :

- MATHÉMATIQUES

- SCIENCES SOCIALES *

** Conception en collaboration avec AUDENCIA*

Tournez la page S.V.P.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Vendredi 11 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Sous réserve d'existence, on note $E(G)$ *et* $V(G)$ *respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire* G.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit n variables aléatoires $X_1, X_2 \ldots, X_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i $(0 < p_i < 1)$. $\boxed{\text{On suppose que } \sum_{i=1}^{n} X_i = 1.}$

1.a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, rappeler les valeurs respectives de $E(X_i)$ et $V(X_i)$.

b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

c) Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on considère la variable aléatoire $X_i X_j$.
Quelle est la loi de $X_i X_j$? En déduire que $E(X_i X_j) = 0$.

2. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ la covariance des deux variables aléatoires X_i et X_j.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \; a_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\,.$$

a) Établir les relations suivantes : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} -p_i p_j & \text{si } i \neq j \\ p_i(1-p_i) & \text{si } i = j \end{cases}$.

b) Soit U la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer AU.

c) La matrice A est-elle inversible ?

3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de réels tels que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas tous nuls.

Soit Q le polynôme défini par : $\forall t \in \mathbf{R},\ Q(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2$.

a) En considérant le signe du polynôme Q, établir l'inégalité $(*)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \qquad (*)$$

b) Dans quel cas l'inégalité $(*)$ est-elle une égalité ?

4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels non tous nuls. On pose : $\forall n \geqslant 2,\ Z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$.

a) Quelle relation doivent satisfaire les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pour que $E(Z_n) = 1$?

b) *On rappelle la formule* : $V(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, V(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.

On suppose que $E(Z_n) = 1$. Établir la relation : $V(Z_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, p_i\right) - 1$ et justifier que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, p_i \geqslant 1$.

c) En reprenant les notations de la question 3, on pose pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $x_i = \sqrt{p_i}$ et $y_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$.
Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que l'on déterminera, qui vérifie les deux conditions suivantes : $E(Z_n) = 1$ et $V(Z_n)$ minimale.

5. Soit n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 1$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les variables aléatoires X_i et Y_i sont de même loi ;
- pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont indépendantes.

Soit T_n la variable aléatoire définie par : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - Y_i)^2}{p_i(1-p_i)}$.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Calculer $E(T_n)$.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
On identifie tout endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et si $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\operatorname{Ker}(S)$ et $\operatorname{Im}(S)$ respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à S.
De même, on identifie les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ aux éléments de $\mathbf{R}^n$.

On rappelle qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Partie 1

Soit A une matrice fixée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \Phi_A(M) = AM\,.$$

1.a) Rappeler sans démonstration la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A.

b) Vérifier que λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de Φ_A et déterminer les sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2.

c) Justifier que l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable.

d) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, montrer que le rang de $\Phi_A(M)$ est égal au rang de M.

3. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2 et A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.
Montrer que la matrice $X\,{}^tX$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un vecteur propre de Φ_A associé à λ.

b) Réciproquement, montrer que si λ est valeur propre de Φ_A, alors λ est valeur propre de A.

c) Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}\big(\Phi_A(M)\big)$.

d) Que peut-on en déduire concernant les rangs respectifs de M et $\Phi_A(M)$?

Partie 2

Soit $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On appelle *trace de C*, notée $\mathrm{Tr}(C)$, le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}\ (\text{somme des coefficients diagonaux de } C\,).$$

4. Soit h l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ h(M) = \mathrm{Tr}(M)$.

a) Montrer que h est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$.

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(h)$ est égale à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$.

5. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \Psi(M) = -M + \mathrm{Tr}(M)\,I_n$.

a) Montrer que -1 est valeur propre de Ψ et donner la dimension du sous-espace propre associé.

b) Calculer $\Psi(I_n)$.

c) Déduire des questions 5.a) et 5.b) que l'endomorphisme Ψ est diagonalisable.

d) On suppose dans cette question que $n = 2$.
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Montrer que le rang de $\Psi(M)$ est égal au rang de M.

e) On suppose que $n \geqslant 3$ et que le rang de M est égal à n.
Montrer que le rang de $\Psi(M)$ est égal à n si et seulement si $\mathrm{Tr}(M)$ n'est pas valeur propre de M.

EXERCICE 3

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans tout l'exercice, on note θ un paramètre réel strictement positif supposé inconnu.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ et $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.

1.a) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $Y_n = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que Y_n est un estimateur sans biais du paramètre θ.

b) Calculer la variance de Y_n et établir la relation : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([\,|Y_n - \theta| > \varepsilon]\big) = 0$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que la fonction de répartition F_{T_n} de la variable aléatoire T_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.$$

b) Vérifier que T_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_{T_n} de T_n.

c) Calculer l'espérance de T_n et en déduire un estimateur sans biais W_n du paramètre θ.

d) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([\,|W_n - \theta| > \varepsilon]\big) = 0$.

4. Soit U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes. On note f_U une densité de U et F_V la fonction de répartition de V. Établir pour tout réel z, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)F_V(z+t)\,\mathrm{d}t$.

On pose alors : $\forall z \in \mathbf{R},\ J(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)F_V(z+t)\,\mathrm{d}t$.

On admet dans toute la suite que J est la fonction de répartition de la variable aléatoire $V - U$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $T_{n-1} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ et $Z_n = T_{n-1} - X_n$.

a) Montrer que $Z_n(\Omega) = [-\theta, +\theta]$.

b) Justifier que les variables aléatoires T_{n-1} et X_n sont indépendantes.

c) On note $F_{T_{n-1}}$ la fonction de répartition de T_{n-1}. À l'aide du résultat admis, montrer que la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n est donnée par : $\forall z \in \mathbf{R},\ F_{Z_n}(z) = \displaystyle\int_{z}^{\theta+z} \frac{1}{\theta} F_{T_{n-1}}(u)\,\mathrm{d}u$.

d) En déduire le résultat suivant : $$\forall z \in \mathbf{R},\ F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -\theta \\ \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{z}{\theta}\right)^n & \text{si } -\theta \leqslant z \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n}\left(1 - \left(\dfrac{z}{\theta}\right)^n\right) + \dfrac{z}{\theta} & \text{si } 0 < z \leqslant \theta \\ 1 & \text{si } z > \theta \end{cases}.$$

6.a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, comparer les deux événements $[T_n = X_n]$ et $[X_n > T_{n-1}]$.

b) En déduire la valeur de $P\big([T_n = X_n]\big)$.

FIN

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris – Audencia Business School

SCIENCES SOCIALES

Programme ENS B/L

Vendredi 11 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

Telle mère, telle fille ?

N.B. :
Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.
Aucun document n'est autorisé.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout autre matériel électronique est interdite.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1183 – D'après documents fournis