MATHÉMATIQUES - HEC B/L 2012

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad x_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Partie 1

1. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et : $\quad \forall x \in [0,1],\ f'(x) = 1 - 2x$.

   $\forall x \in [0;1]$: $\quad f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 2x \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2} \geqslant x$.

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

2. a) On étudie directement les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 - x_n = -x_n^2 \leqslant 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Elle est donc convergente si et seulement si elle est minorée.
   Au vu de l'étude de la fonction f, on conjecture que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{x_n \in [0,1]}_{\mathcal{P}(n)}$, propriété qu'on démontre par récurrence sur n :

   $\boxed{\text{I.}}$ Comme $x_0 \in]0,1[$ d'après l'énoncé, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi :

   On sait (H.R.) que : $x_n \in [0,1]$, donc d'après les variations de f obtenues précédemment : $0 \leqslant f(x_n) \leqslant \dfrac{1}{4} < 1$ soit : $0 \leqslant x_{n+1} < 1$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence. La suite (x_n) est donc décroissante, minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone.

   b) En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, par passage à la limite dans la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n - x_n^2$, on obtient : $\quad \ell = \ell - \ell^2 \iff -\ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

3. a) On démontre par récurrence à nouveau que : $\quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{0 < x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}_{\mathcal{P}(n)}$.

$\boxed{\text{I.}}$ D'après les variations de f sur $]0,1[$, $u_1 = f(u_0)$ vérifie : $0 < u_1 \leqslant \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{1+1}$,
donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, soit : $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$.

On admet $(H.R.)$ que : $\quad 0 < x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, et comme $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc 0, x_n et $\dfrac{1}{n+1}$ appartiennent tous trois à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ sur lequel la fonction f est strictement croissante.

On en déduit : $\quad f(0) < f(x_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$, où : $\quad f(x_n) = x_{n+1}$,

et $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)^2} = \dfrac{n}{n^2+2n+1} = \dfrac{1}{n+2+\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{n+2}$.

Par transititivé de l'inégalité, on a bien : $0 < x_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement permet de redémontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n.x_n$.

   a) On calcule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}-v_n = (n+1)x_{n+1}-nx_n = (n+1)(x_n-x_n^2)-nx_n = x_n-(n+1)x_n^2 = x_n\big(1-(n+1)x_n\big).$$

   Or : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$ donc $0 < (n+1)x_n < 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n\big(1-(n+1)x_n\big) > 0$ comme produit de deux réels positifs.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

   b) À nouveau : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$ donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n.x_n \leqslant \dfrac{n}{n+1} < 1$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente comme suite croissante et majorée par 1, d'après le théorème de limite monotone.

   c) La limite $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ vérifie bien : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ puisqu'on a vu que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n < 1$.

   On peut même affirmer que $0 < \ell$ vu que (v_n) est positive et strictement croissante.

5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n(v_{n+1}-v_n)$.

   a) On remarque ici que, par définition de la suite (w_n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ w_k = k(v_{k+1}-v_k) \iff \frac{w_k}{k} = v_{k+1}-v_k, \text{ et donc : } \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{k} = \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k) = v_{n+1}-v_1.$$

   Ainsi : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{k} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_1 = \ell - v_1$, ce qui est une limite finie qui prouve bien que la série de terme général $\dfrac{w_n}{n}$ est convergente.

   b) On peut reprendre ici le calcul réalisé à la question 4.a) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n.(v_{n+1}-v_n) = n.x_n(1-(n+1).x_n) = v_n.(1-n.x_n-x_n) = v_n.(1-v_n-x_n)$$

   c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors par opérations sur les limites, on a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n(1-v_n-x_n) = \ell(1-\ell)$$

d) Au vu du résultat de la question 4.c), on peut déjà affirmer que : $0 \leqslant \ell(1-\ell) \leqslant 1$, comme produit de deux réels compris entre 0 et 1.

Mieux : $\ell(1-\ell) = \ell - \ell^2 = f(\ell)$ est compris entre 0 et $\dfrac{1}{4}$, d'après le tableau de variations de la fonction f.

On peut aussi remarquer que cette limite de la suite (w_n), ne peut pas être égale à un réel a tel que $0 < a \leqslant \dfrac{1}{4}$:

sinon, $\dfrac{w_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$; or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{n}$ est divergente puisque c'est, à un facteur constant $a > 0$ près, la série harmonique.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs impliquerait alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{w_n}{n}$ est de même nature, donc divergente, ce qui contredit formellement le résultat obtenu à la question 5.a).

Bilan : $\ell(1-\ell)$ ne peut pas être strictement positif. On en déduit que ce nombre est nul, ce qui implique que $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

On a vu en 4.c) que la première possibilité est exclue, donc :

$$\ell = 1 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

e) Le résultat précédent s'écrit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$, ce qui donne l'équivalent :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Partie 2

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n soit divergente, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente.

On pose : $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{S_n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k . y_k \right) - L \right| &= \left| \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} (u_k . y_k - S_n . L) \right| \\
&= \frac{1}{S_n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k . y_k - \sum_{k=1}^{n} u_k . L \right| \quad \text{car } S_n > 0 \\
&= \frac{1}{S_n} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k . (y_k - L) \right| \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&\leqslant \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} |u_k . (y_k - L)| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n} u_k . |y_k - L| \quad \text{car } u_k \geqslant 0 \\
&\leqslant \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k . |y_k - L| + \frac{1}{S_n} \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k . |y_k - L| \quad \text{d'après la relation de Chasles}
\end{aligned}$$

b) On exploite ici toutes les hypothèses faites, en lien avec la définition de la convergence d'une suite réelle :

- La suite (y_n) étant convergente, de limite L : par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall k \geqslant n_0,\ |y_k - L| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Puisque la série de terme général $u_n \geqslant 0$ est divergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Pour tout n_0, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L|$ est un réel fixé, on peut donc conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{S_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L| = 0.$: on peut donc dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe en entier n_1 qu'on peut choisir supérieur à n_0, tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ \dfrac{1}{S_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Mais alors, pour tout $n \geqslant n_1$, on a aussi :

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k|y_k - L| \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k.\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

étant donné que $u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $0 < \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k < \sum_{k=1}^{n} u_k \iff \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k < 1.$

On peut donc dire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_1,\quad \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k|y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k|y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Et ainsi, par transitivité de l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_1,\quad \left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k.y_k\right) - L\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui correspond à la définition de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k.y_k = L.$

7. Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et γ un réel tels que :
   - la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{z_{n+1} - z_n} = \gamma$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad a_n = z_n - z_{n-1}$ et $b_n = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}$.

a) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = z_n - z_{n-1} > 0.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} z_k - z_{k-1} = z_n - z_0$ qui tend vers $+\infty$, donc la série de terme général a_n est divergente.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc bien les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question 6.

b) La suite (b_n) convergeant quant à elle vers une limite γ, le résultat de la question 6 s'applique, qui donne en posant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k = \gamma \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{z_n - z_0}\sum_{k=1}^{n} \cancel{(z_k - z_{k-1})} \times \frac{t_k - t_{k-1}}{\cancel{z_k - z_{k-1}}} = \gamma \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{t_n - t_0}{z_n - z_0} = \gamma$$

Comme z_n tend vers $+\infty$, on a bien sûr $z_n - z_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$ et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n - t_0}{z_n} = \gamma \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{z_n} = \gamma \text{ puisque } \lim_{n\to+\infty} \frac{t_0}{z_n} = 0.$$

8. a) Pour n suffisamment grand :

$$\frac{\dfrac{1}{x_n} - n}{\ln(n)} = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1 - nx_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1 - nx_n}{\ln(n)} \text{ puisque } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \iff \frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

b) Pour n suffisamment grand :

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1 = \frac{1}{x_n(1-x_n)} - \frac{1}{x_n} - 1 = \frac{1 - (1-x_n) - x_n(1-x_n)}{x_n(1-x_n)} = \frac{1 - 1 + x_n - x_n + x_n^2}{x_n(1-x_n)} = \frac{x_n}{1-x_n}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1 - x_n = 1 - 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, alors : $\frac{x_n}{1-x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

De même, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Ainsi : $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sont tous deux équivalents à $\frac{1}{n}$, donc équivalents entre eux,

et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = 1.$

c) En posant pour tout entier $n \geqslant 2$, $t_n = \frac{1}{x_n} - n$ et $z_n = \ln(n)$:

La suite (z_n) est bien strictemnt croissante et diverge vers $+\infty$. De plus :

$$\forall n \geqslant 2,\ \frac{t_{n+1} - t_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{\dfrac{1}{x_{n+1}} - (n+1) - \dfrac{1}{x_n} + n}{\ln(n+1) - \ln(n)} = \frac{\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)} = \frac{\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} - 1}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}$$

qui tend vers $\gamma = 1$ d'après 8.b).

Le résultat de 7.b) s'applique donc, qui donne : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x_n} - n}{\ln(n)} = \gamma = 1$, et ainsi :

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n(1-x_n)}{\ln(n)} = 1$ également, d'après l'équivalent obtenu en 8.a).

La suite (ε_n) définie par : $\forall n \geqslant 2,\ \varepsilon_n = 1 - \dfrac{n(1-nx_n)}{\ln(n)}$ converge bien vers 0.

d) La relation précédente donne successivement :

$$n(1 - nx_n) = \ln(n)\big(1 - \varepsilon_n\big) \iff n - n^2x_n = \ln(n) - \ln(n)\varepsilon_n$$

$$\iff n - \ln(n) + \ln(n)\varepsilon_n = n^2x_n \iff x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}\varepsilon_n$$

qui fournit un développement asymptotique de la suite (x_n).

Exercice 2

Dans tout l'exercice, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.
On définit les trois endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f_A, g_B et $h_{A,B}$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_A(M) = AM, \quad g_B(M) = MB \quad \text{et} \quad h_{A,B} = f_A - g_B$$

1. a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$, vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Pour des raison de format, la matrice $X\,{}^{\mathrm{t}}X$ appartient bien à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Plus concrètement, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $X\,{}^{\mathrm{t}}X = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & & x_2x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$; c'est ainsi qu'on réalise que puisque X est non nulle, l'un des x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) est non nul : son carré x_i^2 est alors non nul, et se trouve sur la diagonale de $X\,{}^{\mathrm{t}}X$ qui est donc non nulle : condition nécessaire indispensable pour avoir un vecteur propre !

Ensuite, d'après l'associativité du produit matriciel :

$$f_A(X\,{}^{\mathrm{t}}X) = A(X\,{}^{\mathrm{t}}X) = (AX)\,{}^{\mathrm{t}}X = \lambda.X\,{}^{\mathrm{t}}X$$

ce qui suffit pour prouver que $X\,{}^{\mathrm{t}}X$ est vecteur propre de l'endomorphisme f_A pour la valeur propre λ.

b) Soit θ une valeur propre de f_A : il existe donc une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$f_A(M) = \theta.M \iff AM = \theta.M \iff (A - \theta.I_n)M = 0_n$$

Si $A - \theta.I_n$ était inversible, la multiplication à gauche des deux membres de l'égalité précédente par son inverse $(A-\theta.I_n)^{-1}$ donnerait : $M = (A-\theta.I_n)^{-1}0_n \iff M = 0_n$, ce qui est absurde puisque M est un vecteur propre de f_A !

On en déduit que $A - \theta.I_n$ est non-inversible.

c) On a démontré à la question précédente les implications suivantes :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(f_A)$$

Ce qui prouve l'inclusion : $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(f_A)$. On a aussi prouvé :

$$\theta \in \mathrm{Sp}(f_A) \Longrightarrow A - \theta.I_n \text{ est non-inversible } \Longrightarrow \theta \in \mathrm{Sp}(A)$$

donc, réciproquement : $\mathrm{Sp}(f_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

La double inclusion donne bien l'égalité d'ensembles : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

d) Les équivalences suivantes rappellent pourquoi une matrice B et sa transposée ont les mêmes valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff B - \lambda.I_n \text{ est non-inversible } &\iff {}^{\mathrm{t}}(B - \lambda.I_n) \text{ est non-inversible} \\ &\iff {}^{\mathrm{t}}B - \lambda.I_n \text{ est non-inversible} \\ &\iff \lambda \in \mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}B) \end{aligned}$$

On peut alors reprendre la structure des trois questions précédentes pour prouver
que $\mathrm{Sp}(g_B) = \mathrm{Sp}(B)$:

- Soit λ une valeur propre de B : c'est donc aussi une valeur propre de ${}^{t}B$, soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé (à ${}^{t}B$), on pose $M = X\,{}^{t}X$; comme précédemment M est non nulle et, d'après les règles de calcul avec la transposée :

$$g_B(M) = MB = X\,{}^{t}XB = X\,{}^{t}({}^{t}BX) = X\,{}^{t}(\lambda.X) = \lambda.X\,{}^{t}X = \lambda.M$$

ce qui prouve que λ est aussi valeur propre de g_B.
- Soit θ une valeur propre de g_B : il existe donc une matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $g_B(M) = \theta.M \iff MB = \theta.M \iff M(B - \theta.I_n) = 0_n$.
Une preuve par l'absurde analogue à celle qui a été faite en 1.b) montre qu'alors $B - \theta.I_n$ est non inversible, et donc que θ est valeur propre de B.

Par double inclusion, on obtient bien : $\mathrm{Sp}(g_B) = \mathrm{Sp}(B)$.

2. a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, μ une valeur propre de ${}^{t}B$ et Y un vecteur propre associé.
On a donc : $AX = \lambda.X$ et ${}^{t}BY = \mu.Y$.
Les vecteurs X et Y sont alors non nuls, et la matrice carrée $M = X\,{}^{t}Y$ est alors non nulle elle-même (l'une des coordonnées x_i de X est non nulle, l'une des coordonnées y_j de Y est non nulle : le coefficient d'indices (i,j) de $X\,{}^{t}Y$ est alors $x_i.y_j$ qui est non nul !), et :

$$\begin{aligned} h_{A,B}(M) &= f_A(M) - g_B(M) = AX\,{}^{t}Y - X\,{}^{t}YB = \lambda.X\,{}^{t}Y - X\,{}^{t}({}^{t}BY) = \lambda.M - X\,{}^{t}(\mu.Y) \\ &= \lambda.M - \mu.X\,{}^{t}Y = (\lambda - \mu).M \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda - \mu$ est valeur propre de $h_{A,B}$, avec $M = X\,{}^{t}Y$ un vecteur propre associé.

b) Soit β une valeur propre de $h_{A,B}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
L'énoncé indique d'utiliser ici le fait que B est diagonalisable : si on revient à la définitio initiale de cette notion, cela signifie qu'il existe une base $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs tous propres pour B.
Comme M est un vecteur propre, M est non nulle : l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé est donc non nul, ce qui implique que l'une au moins des images par celui-ci des vecteurs de la base $(V_1, V_2, \dots, V_n)$, est non nulle. Matriciellement, cela signifie que l'un des vecteurs V_i de la base de vecteurs propres pour B, vérifie : $MV_i \neq 0_{n,1}$. On appelle ce vecteur simplement V dans la suite, et μ sa valeur propre pour B associée.
Alors :

$$h_{A,B}(M) = \beta.M \iff AM - MB = \beta.M \Longrightarrow AMV = MBV + \beta.MV \Longrightarrow A(MV) = (\mu + \beta).MV$$

et $MV \neq 0_{n,1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\mu + \beta$: il existe bien $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que : $\lambda = \mu + \beta \iff \beta = \lambda - \mu$.

c) La question 2.a) a fait apparaître que : si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, alors $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(h_{A,B})$.
La question 2.b) prouve, elle que : $\beta \in \mathrm{Sp}(h_{A,B}) \Longrightarrow \exists\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\beta = \lambda - \mu$.
On a bien montré, à nouveau par double implication, l'égalité d'ensembles :

$$\mathrm{Sp}(h_{A,B}) = \big\{\lambda - \mu \big|\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mu \in \mathrm{Sp}(B)\big\}$$

d) Grâce au résultat de la question précédente, on peut écrire :

$$h_{A,B} \text{ est injective } \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(h_{A,B}) \iff \forall(\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(A)\times\mathrm{Sp}(B),\ \lambda - \mu \neq 0 \iff \mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B) = \varnothing$$

Et comme on travaille en dimension finie, l'injectivité de l'endomorphisme $h_{A,B}$ suffit à garantir sa bijectivité.

3. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et V un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On note pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $X_j = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ p_{2,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$. On pose : $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Par définition du produit matriciel, et pour des raisons de formats : $L = {}^{t}VP$ est une matrice-ligne à n colonnes dont les éléments $l_1, l_2, \dots, l_n$ vérifient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad l_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} v_i$$

b) Les conditions conjointes : ${}^{t}V_i X_i = 1$ et $\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, ${}^{t}V_i X_j = 0$ sont ensemble équivalentes à la condition : ${}^{t}V_i P = E_i$, où E_i est la matrice-ligne dont la i-ème coordonnée vaut 1, les autres étant nulles.

Or les colonnes de la matrice P sont les vecteurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ qui forment une base de $\mathbb{R}^n$: à ce titre, P est inversible (c'est en fait la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$) et on peut écrire :

$${}^{t}V_i P = E_i \iff {}^{t}V_i = E_i \times P^{-1} \iff V_i = {}^{t}P^{-1} \times {}^{t}E_i$$

ce qui garantit bien l'existence et l'unicité du vecteur V_i cherché, pour chaque i de $[\![1, n]\!]$.

c) On considère une base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, et une base $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ constituée de vecteurs propres de ${}^{t}B$.

On pose pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $M_{i,j} = X_i\, {}^{t}Y_j$.

La famille $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est alors une famille de n^2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel de dimension n^2 : il suffit donc de prouver que la famille est libre, pour que ce soit une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient donc $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de n^2 scalaire réels tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}.M_{i,j} = 0_n$ (matrice carrée nulle), soit : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}.X_i\, {}^{t}Y_j = 0_n$.

En multipliant à gauche les deux membres de cette égalité par chacun des vecteurs ${}^{t}V_k$ construits précédemment, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, {}^{t}V_k X_i\, {}^{t}Y_j = 0_{1,n} \iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j}\, {}^{t}Y_j = 0_{1,n} \iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j} Y_j = 0_{n,1}$$

En effet, dans la somme sur i, tous les termes ${}^{t}V_k X_i$ où $k \neq i$ sont nuls !

Puisque $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, donc une famille libre, l'égalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j} Y_j = 0_{n,1}$ implique : $\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2} = \dots = \lambda_{k,n} = 0$.

Et comme ce raisonnement s'applique pour chaque entier k de $[\![1, n]\!]$, on a bien démontré que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}.M_{i,j} = 0_n \Longrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ \lambda_{i,j} = 0$$

Et donc que la famille $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille libre, et une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le résultat obtenu à la quesiton 2.a) nous assure alors que pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $M_{i,j} = X_i\, {}^{t}Y_j$ est un vecteur propre de $h_{A,B}$: il existe donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour $h_{A,B}$, qui est donc un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1-p$.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $\quad Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$, et on admet que $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Question préliminaire : soit r un entier naturel ; démontrons par récurrence sur s que la propriété $\mathcal{P}(s)$: " $\displaystyle\sum_{j=r}^{s} \binom{r}{j} = \binom{s+1}{r+1}$", est vraie pour tout $s \geqslant r$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $s = r$: $\quad \displaystyle\sum_{j=r}^{r} \binom{j}{r} = \binom{r}{r} = 1$, et par ailleurs, $\displaystyle\binom{r+1}{r+1} = 1$, donc $\mathcal{P}(r)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété $\mathcal{P}(s)$ vraie pour un certain $s \geqslant r$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(s+1)$ est encore vraie, soit : $\quad \displaystyle\sum_{j=r}^{s+1} \binom{r}{j} = \binom{s+2}{r+1}$.

$$\sum_{j=r}^{s+1} \binom{j}{r} = \sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} + \binom{s+1}{r} \overset{H.R.}{=} \binom{s+1}{r+1} + \binom{s+1}{r}$$
$$= \binom{s+2}{r+1} \qquad \text{d'après la formule de Pascal}$$

donc $\mathcal{P}(s+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(s)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $s \geqslant r$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\quad \forall r \in \mathbb{N},\ \forall s \geqslant r, \quad \displaystyle\sum_{j=r}^{s} \binom{r}{j} = \binom{s+1}{r+1} \qquad (1).$

1. $S_2 = X_1 + X_2$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $S_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$, et :

$$\forall k \geqslant 2, \quad [S_2 = k] = [X_1 + X_2 = k] = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left([X_1 = j] \cap [X_2 = k-j]\right)$$

Par union disjointe, et par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\forall k \geqslant 2, \quad P(S_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(X_1 = j) \times P(X_2 = k-j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} p.q^{j-1} \times p.q^{k-j-1} = p^2 \sum_{j=1}^{k-1} q^{k-2}$$

$\forall k \geqslant 2, \quad P(S_2 = k) = (k-1).p^2.q^{k-2} \qquad$ puisque le terme général de la somme ne dépend pas de j

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[S_2 = n]$ est donnée par la donnée de $P_{[S_2=n]}(X_1 = k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Il est clair que cette probabilité est nulle pour $k \geqslant n$; pour $k \in [\![1; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}P_{[S_2=n]}(X_1 = k) &= \frac{P([X_1 = k] \cap [S_2 = n])}{P(S_2 = n)} = \frac{P([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k])}{P(S_2 = n)} \\ &= \frac{P(X_1 = k) \times P(X_2 = n-k)}{P(S_2 = n)} = \frac{p.q^{k-1} \times p.q^{n-k-1}}{(n-1)p^2.q^{n-2}} \\ &= \frac{p^2.q^{n-2}}{(k-1)p^2.q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

Ces résultats prouvent que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_2 = n]$ est la **loi uniforme** sur $[\![1; n-1]\!]$.

3. a) La variable aléatoire S_n est la somme de n variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc : $S_n(\Omega) = [\![n; +\infty[\![$.

b) Démontrons par récurrence sur n que la propriété

$$\mathcal{Q}(n) : \text{"pour tout } k \in S_n(\Omega),\ P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}\text{", est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: $S_1 = X_1$ suit la loi géométrique de paramètre p, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{k-1}{0} p^1 q^{k-1} = p.q^{k-1} = P(S_1 = k)$, donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est encore vraie, soit : $\forall k \geqslant n+1,\ P(S_{n+1} = k) = \binom{k-1}{n} p^{n+1} q^{k-n-1}$.

Pour tout $k \geqslant n+1$: $[S_{n+1} = k] = [S_n + X_{n+1} = k] = \bigcup_{j=n}^{k-1} \big([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k-j]\big)$,

Comme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ est, d'après le lemme des coalitions, indépendante de X_{n+1}, donc, toujours pour tout $k \geqslant n+1$, par union disjointe :

$$\begin{aligned}P(S_{n+1} = k) &= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j) \times P(X_{n+1} = k-j) \overset{H.R.}{=} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n} \times p.q^{k-j-1} \\ &= p^{n+1}.q^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} = p^{n+1}.q^{k-n-1} \sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} \\ &= p^{n+1}.q^{k-(n+1)}.\binom{k-1}{n} \qquad \text{d'après} \quad (1)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

4. a) Par définition de la loi de la variable aléatoire S_{n-1} qui a pour univers-image $[\![n-1; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n-1}^{+\infty} P(S_{n-1} = k) = 1 \iff \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k-1}{n-2} p^{n-1} q^{k-n+1} = 1 \\ &\iff p^{n-1} \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-2}{n-2} q^{j-n} = 1 \qquad [j = k+1] \\ &\iff \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-2}{n-2} q^{j-n} = \frac{1}{p^{n-1}}\end{aligned}$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, et pour tout entier $k \geqslant n$:

$$\frac{n-1}{k-1}\binom{k-1}{n-1} = \frac{n-1}{k-1} \times \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{(k-2)!}{(n-2)!(k-n)!} = \binom{k-2}{n-2}.$$

puisque $(n-2)+(k-n) = (k-2)$, le dernier quotient de factorielles est bien le coefficient binomial voulu. On a en fait, redémontré ici une expression possible dela *formule sans nom.*

c) Soit R_n la variable aléatoire définie par : $\quad R_n = \dfrac{n-1}{S_n-1}$.

Signalons d'abord que $n \geqslant 2$, S_n est à valeurs supérieures ou égales à 2, donc la variable aléatoire $R_n = \dfrac{n-1}{S_n-1}$ est bien définie.

D'après le théorème de transfert, cette dernière admet une espérance sous réserve de convergence absolue de la série de terme général :

$\dfrac{n-1}{k-1}P(S_n = k) = \dfrac{n-1}{k-1}\dbinom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n} = p^n \times \dbinom{k-2}{n-2}q^{k-n}$, et ce pour tout $k \geqslant n$.

Il s'agit d'une série à termes positifs, donc la convergence simple suffit, et celle-ci est garantie, d'après les calculs précédents, par la formule obtenue en a) ; l'espérance voulue est donc bien définie et vaut :

$$E(R_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1}P(S_n = k) = p^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = p^n \times \frac{1}{p^{n-1}} = p.$$

5. a) La variable aléatoire Y est en fait une somme d'un nombre aléatoire des premières variables X_i : c'est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Réciproquement : lorsque N prend la valeur 1, Y est alors égale à X_1 qui peut prendre toute valeur entière et non nulle $k \in \mathbb{N}^*$, donc l'inclusion réciproque est vraie, et :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

b) Pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: l'événement $[Y = k] \cap [N = n]$ est réalisé si et seulement si $N = n$ est le nombre de termes de la somme définissant Y, ce qui signifie que Y prend dans ce cas la même valeur que S_n, ici k.

On écrit ainsi : pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$[Y = k] \cap [N = n] = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right] \cap [N = n] = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right] \cap [N = n] = [S_n = k] \cap [N = n]$$

Le passage aux probabilités, et l'indépendance des X_i avec N (donc de S_n vis-à-vis de N, alors que Y et N ne sont *pas* indépendantes), donnent :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P\big([Y = k] \cap [N = n]\big) = P(S_n = k) \times P(N = n)$$

c) Pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $k < n$; dans ce cas, Y est sensé être la somme de n termes tous supérieurs ou égaux à 1 : Y prend une valeur supérieure ou égale à n, ce qui l'empêche de prendre la valeur k, donc :

$$\text{Si } k < n, \quad \text{alors} \quad P\big([Y = k] \cap [N = n]\big) = 0$$

d) Il s'agit ici d'un calcul de loi marginale : d'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$: pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P([Y = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = k] \cap [N = n]) = \sum_{n=1}^{k} P([Y = k] \cap [N = n]) \quad \text{(les termes pour } n > k \text{ sont nuls)}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} P([S_n = k]) \times P([N = n]) \quad \text{d'après 5.b)}$$

6. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P([N=n]) = p.q^{n-1}$, où $q = 1-p$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y=k]) = \sum_{n=1}^{k} P([S_n = k]) \times q^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}q^{n-1} \quad \text{d'après la loi de } S_n$$

$$\overset{[j=n-1]}{=} pq^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1} = p^2(1-p)^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^j$$

$$= p^2(1-p)^{k-1} \times (1+p)^{k-1} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton !}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y=k]) = p^2(1-p^2)^{k-1}.$$

ce qui prouve bien que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2 dans ce cas.

7. On suppose réciproquement que Y suit la loi géométrique de paramètre p^2.
   a) La relation obtenue en 5.d) s'écrit, pour $k=1$:

$$P([Y=1]) = \sum_{n=1}^{1} P([S_n=1]) \times P([N=n]) \iff P([Y=1]) = P([S_1=1]) \times P([N=1])$$

$$\iff p^2 = \binom{1-1}{1-1}p^1q^{1-1}P([N=1]) \iff p^2 = pP([N=1]) \iff P([N=1]) = p.$$

   b) La relation de 5.d), écrit avec $n=2$, donne :

$$P([Y=2]) = \sum_{n=1}^{2} P([S_n=2]) \times P([N=n])$$

$$\iff P([Y=2]) = P([S_1=2]) \times P([N=1]) + P([S_2=2]) \times P([N=2])$$

$$\iff (1-p^2).p^2 = \binom{2-1}{1-1}.p^1.q^{2-1}.p + \binom{2-1}{2-1}p2q^{2-2} \times P([N=2])$$

$$\iff 1-p^2 = q + P([N=2]) \iff P([N=2]) = (1-p)(1+p)-(1-p) = (1-p)(1+p-1) = pq.$$

   c) À partir des deux cas particuliers précédents, on comprend que la relation obtenue en 5.d) va ici s'utiliser de façon indirecte pour permettre d'extraire, d'isoler chaque nouvelle probabilité de la loi de N ; montrons par récurrence sur k, que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$P([N=k]) = q^{k-1}p$", est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   $\boxed{\text{I.}}$ $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question 7.a) (et $\mathcal{P}(2)$ aussi d'après 7.b)).
   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie, soit : $P([N=k+1]) = q^k.p$.

La première écriture de la relation 5.d) qui fasse apparaître $P([N=k+1])$, est :

$$P([Y=k+1]) = \sum_{n=1}^{k+1} P([S_n=k+1]) \times P([N=n])$$

$$\iff P([Y=k+1]) = \sum_{n=1}^{k} P([S_n=k+1]) \times P([N=n]) + P([S_{k+1}=k+1]) \times P([N=k+1])$$

$$\iff (1-p^2)^k.p^2 = \sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n-1}p^n.q^k.p + \binom{k}{k}p^{k+1}.q^0.P([N=k+1])$$

$$\iff \big((1-p)(1+p)\big)^k.p^2 = q^k p^2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} p^i + p^{k+1} P([Y=k+1])$$

$$\iff \cancel{(1-p)^k.(1+p)^k.p^2} = q^k p^2 \Big(\cancel{(1+p)^k} - p^k\Big) + p^{k+1} P([N=k+1])$$ formule du binôme, un terme manquant

$$\iff q^k.p^{k+2} = p^{k+1} P([Y=k+1]) \iff P([Y=k+1]) = q^k.p$$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y=k]) = q^{k-1}.p$, et Y suit bien la loi géométrique de paramètre p.

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★