MATHÉMATIQUES - Edhec S 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

   a) Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, on a $a_k \leqslant a_n$. Le passage à la somme dans cette inégalité donne :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n \cdot a_n \iff \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = b_n \leqslant a_n.$$

   Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n\Big) = \frac{n \cdot b_n + a_n}{n+1} \leqslant \frac{nb_n + b_n}{n+1} = \frac{(n+1)b_n}{n+1},$$

   c'est-à-dire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} \leqslant b_n$, et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   b) Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell$, et d'après a), on a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \leqslant a_n \leqslant \ell \Longrightarrow b_n \leqslant \ell$.

   La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante, majorée par ℓ : d'après le théorème de limite monotone, cette suite converge vers une limite ℓ' telle que $\ell' \leqslant \ell$.

   c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on fait apparaître la somme qui définit b_n dans celle qui constitue b_{2n} :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\Big) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} + \frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

   Or, toujours par croissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall k \in [\![n; 2n-1]\!],\ a_k \geqslant a_n \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant n \cdot a_n$ puisque la somme contient $(2n-1) - n + 1 = n$ termes.

   On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2n}\cdot n \cdot a_n \iff b_{2n} \geqslant \dfrac{b_n + a_n}{2}$.

   d) Le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, possible car les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, donne :

   $$\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2} \iff 2\ell' \geqslant \ell' + \ell \iff \ell' \geqslant \ell.$$

   Comme on a aussi $\ell' \leqslant \ell$ d'après b), on en déduit que $\ell' = \ell \iff \displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + u_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) On montre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ L'énoncé définit $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

   On a supposé (H.R.) que u_n est bien défini et que $u_n \geqslant 1$, donc ${u_n}^2 + u_n \geqslant 2$: ainsi $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + u_n}$ est bien défini, et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2} > 1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de récurrence.

   b) Il est clair que puisque pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {u_n}^2 + u_n > {u_n}^2 \Longrightarrow \sqrt{{u_n}^2 + u_n} > \sqrt{{u_n}^2}, \text{ soit : } u_{n+1} > u_n,$$

   par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

   Supposons qu'elle soit aussi majorée, donc convergente : on note alors ℓ sa limite qui vérifie : $\ell \geqslant 1$ et $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}$ par unicité de la limite (et par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$).

$$\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell} \iff \ell^2 = \ell^2 + \ell \iff 0 = \ell,$$

   ce qui est une limite impossible pour une suite croissante qui débute à $u_0 = 1$! Donc la suite (u_n) diverge, et comme elle est croissante, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

   c) Le script `Scilab` qui suit est cohérent avec ce résultat de divergence : puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, il en est de même pour la série de terme général u_n, c'est-à-dire pour la suite (S_n) : ses termes finiront par dépasser n'importe quel seuil positif (ici 1000) à partir d'un certain rang que calcule l'algorithme.

```
n = 1
u = 1
S = 1 // S1 = u0 = 1
while S <= 1000
    u = sqrt(u^2+u)
    S = S+u
    n = n+1
end
disp(n)
```

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   a) L'utilisation d'une quantité conjuguée permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{{u_n}^2 + u_n} - u_n = \frac{{u_n}^2 + u_n - {u_n}^2}{\sqrt{{u_n}^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{u_n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, par opérations sur les limites, on obtient bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n).$$

b) La fonction $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2+x}-x$ est bien définie et dérivable sur $[1\,;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont, avec :

$$\begin{aligned}\forall x \in [1\,;+\infty[,\quad f'(x) &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}\\ &= \frac{(2x+1)^2-4(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}\cdot(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}\cdot(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}\end{aligned}$$

Il est donc clair que : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ f'(x) > 0$ et donc que la fonction f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et en remarquant que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}-u_n$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1} \geqslant u_{n+1}-u_n,$$

ce qui démontre bien que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) En donnant à $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le rôle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la question préliminaire, étant ici croissante et convergente de limite $\frac{1}{2}$: on sait qu'alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante est aussi croissante et converge vers $\frac{1}{2}$, ce qui s'écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(u_n-u_0) = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}u_n - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}}_{=0} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n/2} = 1,$$

ce qui exprime bien, par définition de l'équivalence, que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

4. a) En remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ {u_{n+1}}^2 = {u_n}^2 + u_n \iff u_n = {u_{n+1}}^2 - {u_n}^2$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}({u_{k+1}}^2 - {u_k}^2) = {u_n}^2 - {u_0}^2 = {u_n}^2 - 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on sait que 1 est négligeable devant ${u_n}^2$, et donc :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} {u_n}^2 \Longrightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4},$$

par transitivité de l'équivalence, qui est aussi conservée lorsqu'on élève les deux membres à la même puissance.

b) La relation $S_n = {u_n}^2 - 1$ permet de se contenter de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on déduirait directement ceux de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; on reformule ainsi la condition de poursuite de la boucle while : $S_n \leqslant 1000 \iff {u_n}^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$:

```
n = 0
u = 1 // u0 = 1
while u <= sqrt(1001)
    u = sqrt(u^2+u)
    n = n+1
end
disp(n)
```

Exercice 2

1. On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et on pose $Y = e^Z$, l'énoncé admettant qu'il s'agit d'une variable à densité.

   a) Avec les notations de l'énoncé : il est clair que $Y = e^Z$ est une variable aléatoire à valeurs strictement positives, donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;0]$.
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:
   $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(e^Z \leqslant x) = \mathbb{P}\big(Z \leqslant \ln(x)\big) \quad \text{ln est strictement croissante et continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \Phi\big(\ln(x)\big) \end{aligned}$$

   b) L'énoncé admet que Y est une variable à densité, ce qui dispense de démontrer (ce qui est plus long que difficile) que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
   On obtient une densité de F_Y par dérivation de f_Y, sauf en 0 où on choisit la valeur arbitraire $f_Y(0) = 0$, de sorte que :
   $$\forall x \leqslant 0,\ f_Y(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ f_Y(x) = \frac{1}{x}\cdot\Phi'\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\Big(-\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\Big)$$
   puisque $\Phi' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité explicitement connue de la loi normale centrée, réduite.

2. a) Toujours avec les notations introduites par l'énoncé : les variables X_n sont finies et ont pour espérance commune :
   $$E(X_n) = 1\cdot\mathbb{P}(X_n = 1) + (-1)\cdot\mathbb{P}(X_n = -1) = p - (1-p) = 2p - 1.$$

   b) La variable aléatoire T_n est le produit de n variables aléatoires qui ne prennent que les valeurs 1 ou -1 : il est donc clair que $T_n(\Omega) = \{-1\,;1\}$ également.
   La mutuelle indépendance des variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet aussi d'écrire :
   $$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = (2p-1)^n.$$
   Or on a aussi, par définition directe de T_n : $\quad\mathbb{E}(T_n) = (-1)\cdot\mathbb{P}(T_n = -1) + 1\cdot\mathbb{P}(T_n = 1)$, d'où la relation :
   $$\mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1) = (2p-1)^n.$$

   c) On a aussi, bien sûr : $\mathbb{P}(T_n = 1) + \mathbb{P}(T_n = -1) = 1$. En additionnant membre à membre les deux égalités qu'on vient d'écrire, on obtient :
   $$2\mathbb{P}(T_n = 1) = 1 + (2p-1)^n \iff \mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2},$$
   et ainsi : $\quad\mathbb{P}(T_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1 - (2p-1)^n}{2}$. La loi de T_n est ainsi donnée par ces deux probabilités.

   d) On sait que $0 < p < 1$, donc $0 < 2p < 2$ et $-1 < 2p - 1 < 1$, de sorte que :
   $$\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0 \text{ et par conséquent, } \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n = 1).$$
   Ce résultat signifie donc que la suite $(T_n)_{n\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1\,;1\}$:
   $$\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(T = -1).$$

3. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

 a) L'inégalité triangulaire donne :

$$|T_{n+1} - T_n| = |T_{n+1} - T' + T' - T_n| \leqslant |T_{n+1} - T'| + |T' - T_n| = |T_{n+1} - T'| + |T_n - T'|,$$

 donc : $\big(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}$ et $|T_n - T'| < \frac{1}{2}\big) \Longrightarrow |T_{n+1} - T'| + |T_n - T'| < 1 \Longrightarrow |T_{n+1} - T_n| < 1$ par transitivité de l'inégalité.
 L'implication obtenue traduit bien l'inclusion entre événements :

$$\big(|T_{n+1} - T'| < \tfrac{1}{2}\big) \cap \big(|T_n - T'| < \tfrac{1}{2}\big) \subset \big(|T_{n+1} - T_n| < 1\big).$$

 b) Le passage au complémentaire dans cette relation, et la loi de de Morgan donnent :

$$\overline{\big(|T_{n+1} - T_n| < 1\big)} \subset \overline{\big(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\big) \cap \big(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\big)}$$

$$\Longleftrightarrow \big(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\big) \subset \big(|T_{n+1} - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big) \cup \big(|T_n - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big).$$

 Ainsi, par croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}\big(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\big(|T_{n+1} - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big) \cup \big(|T_n - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big)\Big) \leqslant \mathbb{P}\big(|T_{n+1} - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big) + \mathbb{P}\big(|T_n - T'| \geqslant \tfrac{1}{2}\big),$$

 puisque d'après la formule du crible, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, vu que $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$.

 c) La relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} X_k = T_n \times X_{n+1}$ où $X_{n+1}(\Omega) = \{-1\,;1\}$, prouve que T_{n+1} et T_n sont soit égales, soit opposées et dans ce cas à une distance l'une de l'autre égale à 2. En clair : $(T_{n+1} - T_n)(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$.
 On en déduit que : $\mathbb{P}\big(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\big) = 1 - \mathbb{P}(T_{n+1} - T_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 1 - p$.

 d) Si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait en probabilité, alors par définition il existerait une variable aléatoire T' telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|T_n - T| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

 Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\big) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\big)$ et on pourrait alors passer à la limite dans l'inégalité de la question b), ce qui donnerait :

$$1 - p \leqslant 0,$$

 inégalité évidemment impossible puisque $0 < p < 1$.
 On en déduit par l'absurde, que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.

4. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

 a) Avec les notations de l'énoncé : par définition, $\overline{X}_n{}^* = \dfrac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)}$, où :

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0 \text{ par linéarité de l'espérance, et puisque pour } p = \tfrac{1}{2},\ (2p-1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \quad \text{par mutuelle indépendance des } X_n \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}({X_k}^2) \quad \text{puisque } \mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}({X_k}^2) - \big(\mathbb{E}(X_k)\big)^2 \text{ et } \mathbb{E}(X_k) = 0 \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \big(1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot (1-p)\big) = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

 Ainsi : $\sigma(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et $\overline{X}_n{}^* = \dfrac{\overline{X}_n - 0}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \overline{X}_n$.

b) Comme les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une même espérance (ici nulle) et une même variance non nulle : d'après le théorème central limite, la suite $(\overline{X}_n{}^*)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge en loi vers une variable aléatoire Z' qui suit la loi normale centrée réduite.

En remarquant que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ${U_n}^{1/\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n\overline{X}_n} = e^{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n} = e^{\overline{X}_n{}^*}$: puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, le théorème du cours correspondant assure que la suite $(e^{\overline{X}_n{}^*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $e^{Z'}$ qui suit la même loi que $e^Z = Y$.

On a bien démontré que la suite $({U_n}^{1/\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3

On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ et d'une norme associée $||\cdot||$.
On considère aussi un endomorphisme f de E, qui n'est pas l'endomorphisme nul, et qui est *antisymétrique*, vérifiant :

$$\forall(x,y)\in E^2,\quad \langle f(x)\,,y\rangle = -\langle x\,,f(y)\rangle.$$

1. En écrivant la définition ci-dessus avec $y=x$, on a alors, pour tout x de E :

$$\langle f(x)\,,x\rangle = -\langle x\,,f(x)\rangle \iff \langle f(x)\,,x\rangle = -\langle f(x)\,,x\rangle,$$

par symétrie du produit scalaire. Le seul réel égal à son opposé est 0, donc :

$$\forall x\in E,\quad \langle f(x)\,,x\rangle = 0.$$

2. L'espace euclidien E est par définition de dimension finie, donc le théorème du rang assure déjà que $\dim\mathrm{Ker}(f)+\dim\mathrm{Im}(f)=\dim E$: pour prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$.

Soit donc $x\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$: par définition du noyau, on a donc $f(x)=0_E$ et par définition de l'image, il existe $y\in E$ tel que $x=f(y)$. On a alors :

$$||x||^2 = \langle x\,,x\rangle = \langle f(y)\,,x\rangle = -\langle y\,,f(x)\rangle = -\langle y\,,0_E\rangle = 0,\quad \text{donc } x=0_E.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)\subset\{0_E\}$, et comme l'inclusion réciproque est aussi vraie puisque $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors : $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$, ce qui achève de démontrer que

$$\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=E.$$

3. On pose $s=f\circ f$: c'est bien un endomorphisme de E comme composée de deux endomorphismes de E ; de plus, grâce à la définition de f, on peut écrire :

$$\forall(x,y)\in E^2,\quad \langle s(x)\,,y\rangle = \langle f\big(f(x)\big)\,,y\rangle = -\langle f(x)\,,f(y)\rangle \quad \text{puisque } f \text{ est antisymétrique}$$
$$= -\big(-\langle x\,,f\big(f(y)\big)\rangle\big) = \langle x\,,s(y)\rangle$$

La propriété : $\forall(x,y)\in E^2$, $\langle s(x)\,,y\rangle = \langle x\,,s(y)\rangle$ signifie bien que s est un endomorphisme symétrique de E.

Soit maintenant λ une valeur propre de s, et x un vecteur propre associé (donc non nul), on peut écrire :

$$\langle s(x)\,,x\rangle = \langle\lambda\cdot x\,,x\rangle = \lambda\cdot||x||^2 \quad\text{mais aussi :}\quad \langle s(x)\,,x\rangle = \langle f\big(f(x)\big)\,,x\rangle = -\langle f(x)\,,f(x)\rangle,$$

soit : $\lambda = -\dfrac{||f(x)||^2}{||x||^2}$, ce qui démontre bien que toute valeur propre de s est négative.

4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\text{Im}(f)$, associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

   a) Il est clair que g, comme f, est une application linéaire de $\text{Im}(f)$ dans E,
   et comme $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$ pour tout x de $\text{Im}(f)$, c'est bien un endomorphisme de $\text{Im}(f)$.
   De plus, puisque $\text{Im}(f)$ est inclus dans E :

   $$\forall (x, y) \in \big(\text{Im}(f)\big)^2, \quad \langle g(x)\,, y\rangle = \langle f(x)\,, y\rangle = -\langle x\,, f(y)\rangle = -\langle x\,, g(y)\rangle,$$

   donc g est bien antisymétrique.

   b) Une preuve en tous points semblable à celle qui a été faite à la question 3, avec $\text{Im}(f)$ qui est bien un espace euclidien puisque sous-espace vectoriel de E, prouve alors que $t = g \circ g$ a des valeurs propres toutes négatives.

   Il reste seulement à prouver que 0 n'est pas valeur propre de t : si c'était le cas, il existerait $x \in \text{Im}(f) \setminus \{0_E\}$ tel que :

   $$t(x) = 0_E \iff g\big(g(x)\big) = 0_E \iff f\big(f(x)\big) = 0_E \iff f(x) \in \text{Ker}(f).$$

   Le vecteur $f(x)$ appartient donc à $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, donc $f(x) = 0_E$; à nouveau, x appartient donc à $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, donc $x = 0_E$, ce qui est absurde vu que x est vecteur propre.
   On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de t, et donc que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

5. Soit λ une valeur propre de t et $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé.
   On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

   a) Il est tout d'abord clair que $g(e_1) \neq 0_E$: si c'était le cas, alors $t(e_1) = g \circ \big(g(e_1)\big) = g(0_E) = 0_E$ (par linéarité de g), or $t(e_1) = \lambda \cdot e_1$ avec $\lambda < 0$ et $e_1 \neq 0_E$: il y a une contradiction !

   En reprendant le résulte de la question 1, on montre facilement que la famille $\big(e_1, g(e_1)\big)$ est orthogonale : $\langle e_1\,, g(e_1)\rangle = \langle e_1\,, f(e_1)\rangle = 0$ d'après cette première question.

   La famille $\big(e_1, g(e_1)\big)$ est donc constituée de deux vecteurs non nuls et orthogonaux : c'est donc aussi une famille libre.

   b) Considérons comme indiqué, l'orthogonal F_2 de $\text{Vect}\big(e_1, g(e_1)\big)$ dans $E_\lambda(t)$:
   alors $\dim F_2 = \dim E_\lambda(t) - 2$ et si cette dimension est non nulle, alors il existe un vecteur non nul e_2 dans F_2 ; vérifions que $g(e_2)$ appartient encore à F_2 :

   $$\langle e_1\,, g(e_2)\rangle = -\langle g(e_1)\,, e_2\rangle = 0 \text{ puisque } e_2 \text{ est orthogonal à } g(e_1)$$

   $\langle g(e_1), g(e_2)\rangle = -\langle e_1, g\big(g(e_2)\big)\rangle = -\langle e_1\,, t(e_2)\rangle = -\lambda \cdot \langle e_1\,, e_2\rangle = 0$ puisque e_2 est orthogonal à e_1.

   Par le même raisonnement qu'en a), on sait qu'alors la famille $\big(e_2, g(e_2)\big)$ est orthogonale et libre.
   La famille $\big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\big)$ est alors orthogonale et libre, puisque e_2 et $g(e_2)$ sont orthogonaux entre eux et avec e_1 et $g(e_1)$.

   En réitérant ce processus (avec F_3 l'orthogonal de $\text{Vect}\big(e_1, g(e_1, e_2, g(e_2)\big)$ pour l'étape suivante, si elle a lieu), on construit de proche en proche des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ de $E_\lambda(t)$ tels que la famille $\big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_p, g(e_p)\big)$ soit orthogonale et libre, et où p est un entier de valeur maximale :
   d'après ce principe, il n'est pas possible que l'orthogonal F_{p+1} de $\text{Vect}\big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_p, g(e_p)\big)$ soit de dimension 1, sinon on pourrait trouver un vecteur non nul e_{p+1} dans F_{p+1} tel que $g(e_{p+1})$ serait encore dans F_{p+1}, non nul et orthogonal à e_{p+1} : impossible dans un espace de dimension 1 !
   On en déduit que l'entier maximal p issu de de procédé vérifie : $2p = \dim E_\lambda(t)$, et que la famille orthogonale $\big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_p, g(e_p)\big)$ est en fait une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6. Soit k un entier de $[\![1, p]\!]$.

a) L'antisymétrie de g permet d'écrire :

$$||g(e_k)||^2 = \langle g(e_k)\,, g(e_k)\rangle = -\langle e_k\,, g\big(g(e_k)\big)\rangle = -\langle e_k\,, t(e_k)\rangle = -\langle e_k\,, \lambda\cdot e_k\rangle = -\lambda\cdot\langle e_k\,, e_k\rangle = -\lambda\cdot||e_k||^2.$$

On a utilisé à l'envi la bilinéarité du produit scalaire et le fait que e_k est un vecteur propre de t pour la valeur propre λ.

b) On considère les vecteurs ${e_k}' = \dfrac{1}{||e_k||}\cdot e_k$ et ${e_k}'' = \dfrac{1}{||g(e_k)||}\cdot g(e_k)$.

D'après ce qui précède, en utilisant notamment par linéarité de g, et le fait que $\lambda < 0$:

$$g({e_k}') = \frac{1}{||e_k||}\cdot g(e_k) = \frac{||g(e_k)||}{||e_k||}\cdot\frac{1}{||g(e_k)||}\cdot g(e_k) = \sqrt{\frac{||g(e_k)||^2}{||e_k||^2}}\cdot {e_k}'' = \sqrt{-\lambda}\cdot {e_k}''$$

$$\text{et } g({e_k}'') = \frac{1}{||g(e_k)||}\cdot g\big(g(e_k)\big) = \frac{1}{||g(e_k)||}\cdot t(e_k) = \frac{\lambda}{||g(e_k)||}\cdot e_k = \lambda\cdot\frac{||e_k||}{||g(e_k)||}\cdot\frac{1}{||e_k||}\cdot e_k$$

$$= \lambda\cdot\sqrt{\frac{1}{-\lambda}}\cdot {e_k}' = -\sqrt{\frac{(-\lambda)^2}{-\lambda}}\cdot {e_k}' = -\sqrt{-\lambda}\cdot {e_k}'$$

En effet : $\lambda < 0 \Longrightarrow \lambda = -\sqrt{\lambda^2} = -\sqrt{(-\lambda)^2}$.

7. a) Puisque t est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im}(f)$, alors il est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux et ont pour somme directe $\mathrm{Im}(f)$, et $\dim\mathrm{Im}(f) = \displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(t)}\dim E_\lambda(t)$. Or on vient de voir que tous les sous-espaces propres de t sont de dimensions paires : on en déduit que $\dim\mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f)$ est pair.

b) On pose $r = \frac{1}{2}\mathrm{rg}(f)$: en choisissant pour chaque sous-espace propre de t une base telle qu'elle est construite en 5, et en normalisant les vecteurs comme on le fait en 6, on obtient pour chaque sous-espace propre $E_\lambda(t)$ une base orthonormale $({e_1}', {e_1}'', \dots, {e_p}', {e_p}'')$ telle que la restriction de g (et donc de f) à $E_\lambda(t)$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & & & \\ a & 0 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 0 & -a \\ & & & a & 0 \end{pmatrix}$$

où on a noté $a = \sqrt{-\lambda} > 0$.

Au vu de la remarque faite au début de la question précédente, en réunissant de telles bases de chacun des sous-espaces propres de t, on obtient une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$.

Par ailleurs, le supplémentaire $\mathrm{Ker}(f)$ de $\mathrm{Im}(f)$ dans E est en fait un supplémentaire orthogonal : pour tout x de $\mathrm{Ker}(f)$, et tout y de $\mathrm{Im}(f)$ dont on note z un antécédent par f dans E : $\langle x\,, y\rangle = \langle x\,, f(z)\rangle = -\langle f(x)\,, z\rangle = -\langle 0_E\,, z\rangle = 0$.

En réunissant une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$ (on peut toujours en trouver une, éventuellement par construction avec le procédé de Gram-Schmidt) avec cette base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$, on obtient bien une pase orthonormale $\mathscr{B}$ de E et r réels $a_1, \dots, a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathscr{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix}
0 & -a_1 & & & & & & & & \\
a_1 & 0 & & & & & & & & \\
& & 0 & -a_2 & & & (0) & & & \\
& & a_2 & 0 & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & 0 & -a_r & & & \\
& & & & & a_r & 0 & & & \\
& & (0) & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & 0
\end{pmatrix} \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix}
0 & -a_1 & & & & & \\
a_1 & 0 & & & & (0) & \\
& & 0 & -a_2 & & & \\
& & a_2 & 0 & & & \\
& & & & \ddots & & \\
& (0) & & & & 0 & -a_r \\
& & & & & a_r & 0
\end{pmatrix}$$

La deuxième forme de la matrice est celle qu'on obtient dans le cas où $\mathrm{Ker}(f)$ s'avère en fait réduit à $\{0_E\}$, ce qui n'est pas exclu.

Problème

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $\quad I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x.$

1. Pour tout entier naturel p : $\quad I(p,0) = \displaystyle\int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$, et pour tout entier naturel q : $\quad I(0,q) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^q \mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 = -0 + \frac{1}{q+1} = \frac{1}{q+1}$.

2. Pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on réalise une intégration par parties dans $I(p,q)$, en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= (1-x)^q & \longrightarrow \quad & u'(x) = -q(1-x)^{q-1} \\ v'(x) &= x^p & \longrightarrow \quad & v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont polynômiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$ et :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \left[\frac{(1-x)^q \cdot x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{(1-1)^q \cdot 1^{p+1} - (1-0)^q \cdot 0^{p+1}}{p+1}}_{=0-0=0} + \frac{q}{p+1} \cdot I(p+1, q-1), \end{aligned}$$

ce qui est bien la relation demandée.

3. Pour tout q de $\mathbb{N}$, on considère la propriété H_q : "$\forall p \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} \cdot I(p+q, 0)$".

Montrons par récurrence, que H_q est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $q = 0$: $\forall p \in \mathbb{N},\ \dfrac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = \dfrac{p!}{p!} \cdot I(p,0) = I(p,0)$ donc H_0 est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons H_q vraie pour un certain $q \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors H_{q+1} est encore vraie, soit : $\forall p \in \mathbb{N},\ I(p, q+1) = \dfrac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$.

D'après la relation obtenue à la question 2, et puisque $q+1 \in \mathbb{N}^*$: pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} \cdot I(p+1, q) \overset{H.R.}{=} \frac{q+1}{p+1} \cdot \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} \cdot I(p+1+q, 0) \quad \text{puisque } H_q \text{ est vraie pour } p+1$$

$$= \frac{(q+1)\cdot(p+1)\cdot p!q!}{(p+1)\cdot(p+q+1)!} \cdot I(p+q+1, 0) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} \cdot I(p+q+1, 0).$$

Ainsi, H_{q+1} est vraie si H_q l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de récurrence.

4. De tout ce qui précède, on déduit pour tout couple (p, q) de $\mathbb{N}^2$:

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \cdot I(p+q, 0) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \cdot \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

En particulier : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I(n, n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad b_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot x^n(1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

5. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, donc la fonction b_n est positive sur $[0\,;1]$, et plus largement sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle est nulle ailleurs).
La fonction b_n est continue car constante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$, continue sur $]0\,;1[$ comme fonction polynôme. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1 (on vérifie facilement qu'elle est bien continue en ces deux points, mais ce n'est pas indispensable ici).
Enfin, puisque b_n est nulle en-dehors de $[0\,;1]$, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 b_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \underbrace{\int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x}_{=I(n,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = 1,$$

donc la fonction b_n peut bien être considérée comme une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6. Lorsque $n = 0$, la densité b_0 est définie par : $\quad b_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1!}{(0!)^2} \cdot x^0(1-x)^0 = 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$
On reconnaît une densité de la loi uniforme sur $[0\,;1]$: c'est la loi suivie par X_0.

7. a) La variable aléatoire X_n est à support borné, donc admet une espérance donnée par l'intégrale :

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot b_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot I(n+1, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

b) De la même façon, la variable aléatoire X_n admet un moment d'ordre 2 donné par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}({X_n}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot b_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \int_0^1 x^{n+2}(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot I(n+2,n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.$$

On en déduit que X_n admet une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}({X_n}^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}.$$

c) Puisque l'espérance de X_n est constante égale à $\frac{1}{2}$ et puisque $\mathbb{V}(X_n)$ tend clairement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on est incité à prouver que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\mathbb{P}\big(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} \iff \mathbb{P}\big(|X_n - \tfrac{1}{2}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2}$$

Puisqu'une probabilité est positive, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4(2n+3)\varepsilon^2} = 0$, alors par encadrement :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - \tfrac{1}{2}| \geqslant \varepsilon\big) = 0,$$

ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

Partie 3 : Simulation informatique de X_n.

8. La fonction de répartition F_U de la loi uniforme sur $[0\,;1]$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \cdot$$

9. La variable aléatoire V_{2n+1} représente l'instant d'arrivée de la $(2n+1)$-ième personne, donc la dernière : il est donc clair que

$$V_{2n+1} = \max(U_1, U_2, \ldots, U_{2n+1}).$$

10. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(x) &= \mathbb{P}(V_{2n+1} \leqslant x) = \mathbb{P}\big(\max(U_1, U_2, \ldots, U_{2n+1}) \leqslant x\big) \\ &= \mathbb{P}\big([U_1 \leqslant x] \cap [U_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [U_{2n+1} \leqslant x]\big) \\ &= \prod_{k=1}^{2n+1} \mathbb{P}(U_k \leqslant x) \qquad \text{par indépendance mutuelle des } U_k \\ &= \big(F_U(x)\big)^{2n+1} \qquad \text{car les } U_k \text{ suivent toutes la même loi} \end{aligned}$$

$$G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{2n+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \cdot$$

11. a) La variable aléatoire V_1 représente l'instant d'arrivée de la première personne, donc :

$$V_1 = \min(U_1, U_2, \ldots, U_{2n+1}).$$

b) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 > x) &= \mathbb{P}\big(\min(U_1, U_2, \ldots, U_{2n+1}) > x\big) = \mathbb{P}\big([U_1 > x] \cap [U_2 > x] \cap \ldots \cap [U_{2n+1} > x]\big) \\
&= \prod_{k=1}^{2n+1} \mathbb{P}(U_k > x) \qquad \text{par indépendance mutuelle des } U_k \\
&= \big(\mathbb{P}(U_1 > x)\big)^{2n+1} \qquad \text{car les } U_k \text{ suivent toutes la même loi} \\
&= \big(1 - F_U(x)\big)^n,
\end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = \mathbb{P}(V_1 \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(V_1 > x) = 1 - \big(1 - F_U(x)\big)^{2n+1} = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - 0 = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

12. Il suffit ici de simuler $2n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[0\,;1]$, et d'en cacluler le minimum et le maximum pour simuler respectivement V_1 et V_{2n+1} :

```
n = input('Donner la valeur de n : ')
U = rand(1,2*n+1)
Vmin = min(U) // simulation de V1
Vmax = max(U) // simulation de V_(2n+1)
```

13. a) Pour tout x de $[0\,;1]$, $G_{n+1}(x) = \mathbb{P}(V_{n+1} \leqslant x)$ est la probabilité que la $(n+1)$-ième personne du groupe, c'est-à-dire celle qui correspond au temps *médian* dans le groupe, arrive au lieu de rendez-vous au plus tard à l'instant x.

Pour mieux se représenter la situation, on peut considérer la variable aléatoire S_{2n+1} qui compte le nombre de personnes arrivées au plus tard à l'instant x : il s'agit d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès (la personne considérée est arrivée au plus tard à l'instant x), lesquels sont chacun de probabilité $F_U(x) = x$, lorsqu'on considère $2n+1$ personnes qui arrivent selons les mêmes conditions et de façon mutuellement indépendante les unes des autres.

On en déduit que S_{2n+1} suit la loi binomiale de paramètres $(2n+1, x)$. L'événement $[V_{n+1} \leqslant x]$ et alors égal à l'événement $[S_{2n+1} \geqslant n+1]$, puisque la $(n+1)$-ième personne arrive au plus tard à l'instant x, si et seulement si à cet instant x, au moins $n+1$ personnes sont déjà présentes.

Ainsi, pour tout x de $[0\,;1]$:

$$G_{n+1}(x) = \mathbb{P}(V_{n+1} \leqslant x) = \mathbb{P}(S_{2n+1} \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \mathbb{P}(S_{2n+1} = k) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.$$

b) L'énoncé admet que V_{n+1} est une variable à densité : on a aussi $G_{n+1}(x) = 0$ pour tout $x < 0$ et $G_{n+1}(x) = 1$ pour tout $x > 1$, et on obtient une densité g_{n+1} de V_{n+1} par dérivation de G_{n+1}, sauf en 0 et en 1 où on choisit arbitrairement $g_{n+1}(0) = g_{n+1}(1) = 0$: $g_{n+1}(x) = 0$ pour tout $x \leqslant 0$ et tout $x \geqslant 1$, et pour tout x de $]0\,;1[$:

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(k \cdot x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} + x^k \cdot (-1) \cdot (2n+1-k) \cdot (1-x)^{2n-k}\right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \cdot kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}$$

$$- \sum_{k=n+1}^{\cancel{2n+1}\ 2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \cdot (2n+1-k)x^{k}(1-x)^{2n-k}$$

dans la deuxième somme, pour $k = 2n+1$, le facteur $(2n+1-k)$ est nul

$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n-k+1)!} \cdot x^{k-1}(1-x)^{2n-k+1} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} \cdot x^{k}(1-x)^{2n-k}$$

$$= \sum_{j=n}^{2n} \frac{(2n+1)!}{j!(2n-j)!} \cdot x^{j}(1-x)^{2n-j} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} \cdot x^{k}(1-x)^{2n-k}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot x^n(1-x)^n = b_n(x)$$

On constate donc que les variables aléatoires V_{n+1} et X_n ont partout la même densité (sauf peut-être en 0 et en 1) : elles suivent donc la même loi.

c) Le script proposé va renvoyer la valeur 8 : si on classe par ordre croissant les éléments du vecteur `U`, on obtient $[1, 2, 5, 8, 9, 13, 23]$ et dans ce vecteur de taille impaire, 8 est l'élément médian.

d) On s'inspire de ce script pour simuler V_{n+1} comme élément médian d'un vecteur de $2n+1$ simulations identiques et indépendantes de la loi uniforme sur $[0\,;1]$: on aura ainsi simulé X_n aussi, qui suit la même loi.

```
n = input('donner la valeur de n : ')
U = rand(1,2*n+1)
V = median(U)
disp(V,'X_n = ')
```

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★