MATHÉMATIQUES - Edhec E 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynômiale des deux variables x et y.
2. a) Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$$

b) Les points critiques de la fonction f sont les couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) & = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y & = 0 \\ 3y^2 - 3x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

D'après la règle du produit nul : $\quad x(x^3 - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$

Puisque $y = x^2$ dans le système, la fonction f admet donc deux points critiques : $\quad (0,0)$ et $(1,1)$.

3. a) La fonction f de classe C^2 admet des dérivées partielles définies pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6y, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -3$$

b) On étudie la nature des deux points critiques via la Hessienne de f :

- Au point critique $(0,0)$, la Hessienne de f est :

$$H_0 = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(0,0) & \partial^2_{1,2}(f)(0,0) \\ \partial^2_{1,2}(f)(0,0) & \partial^2_{2,2}(f)(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les réels λ tels que $H_0 - \lambda.I_2$ est non-inversible ; comme il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser le critère sur le déterminant, et :

$$\lambda \in \text{Sp}(M_0) \iff \det(M_0 - \lambda.I_2) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ -3 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 9 = 0$$

Les valeurs propres de M_0 sont donc -3 et 3. Comme elles sont de signes opposés, on en conclut que f n'admet pas d'extrémum en ce point, qui est plutôt un point-col.

- Au point critique $(1,1)$, la Hessienne de f est $H_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, et ses valeurs propres sont les réels λ tels que :

$$\det(H_1 - \lambda . I_2) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \iff (6-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\iff (6-\lambda-3)(6-\lambda+3) = 0 \iff (3-\lambda)(9-\lambda) = 0$$

Donc, d'après la règle du produit nul : $\quad \mathrm{Sp}(M_1) = \{3, 9\}$.

Les deux valeurs propres sont de même signe, donc f admet un extrémum global au point critique $(1,1)$, et comme elles sont toutes deux strictement positives, il s'agit d'un minimum global.

4. On veut savoir si $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1$ est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque que lorsque $y = 0$: $\quad f(x,0) = x^3$ prend des valeurs largement inférieures à -1.
Par exemple : $\quad f(-2,0) = (-2)^3 = -8 < -1$, donc l'extrémum local atteint en $(1,1)$ n'est certainement pas global.

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$$

5. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$$

On en déduit le tableau de signe de la dérivée, d'après les règles de signe d'un trinôme dont les racines sont évidemment 1 et -1 :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

En écrivant $g(x) = x(x^2-3)+1$, il est évident que, par opérations sur les limites :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 3 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x(x^2-3)+1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x(x^2-3)+1 = +\infty$$

Sur $]-\infty, 1]$, d'après le tableau ci-dessus, la fonction g admet un maximum égal à 3, donc pour tout entier $n \geqslant 4$, l'équation $g(x) = n$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, la fonction g est continue comme polynôme, strictement croissante, et tout entier $n \geqslant 4$ appartient à l'intervalle-image $[-1; +\infty[$: d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, que l'on note u_n.

En définitive, l'équation $g(x) = n$ admet, pour tout entier $n \geqslant 4$, une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$, qui appartient plus précisément à $[1; +\infty[$

6. On note h la restriction de g à $[1;+\infty[$.

a) Le tableau précédent permet d'en déduire directement le tableau de la bijection réciproque h^{-1} : on ne considère pour cela que le tableau de g sur $[1;+\infty[$.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
h^{-1}	$1 \nearrow +\infty$

b) Pour tout $n \geqslant 4$, par définition de u_n : $\quad g(u_n) = n \iff h(u_n) = n$ puisque $u_n \in [1;+\infty[$, donc par bijectivité de h :

$$\forall n \geqslant 4, \quad h(u_n) = n \iff u_n = h^{-1}(n)$$

Et d'après le tableau de variations de h^{-1} :

$$\lim_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

c) En revenant à nouveau à la définition de u_n :
pour tout entier $n \geqslant 4$, $g(u_n) = n \iff u_n^3 - 3u_n + 1 = n$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors :

$$u_n^3 - 3u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^3 \iff n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^3 \iff \boxed{n^{1/3} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

par compatibilité de l'équivalence avec l'élévation à une puissance réelle.

Exercice 2

1. a) Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

- La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ comme fonction constante, et est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

- Pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{x^3} > 0$ et $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) > 0$ comme exponentielle, donc $f(x) > 0$.
La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

- Sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.
Il n'aura pas échappé au candidat attentif que cette intégrale est doublement impropre, en 0 et en $+\infty$.
On étudie donc, pour $a \in]0;1[$: $\displaystyle\int_a^1 \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]_a^1 = e^{-1} - \exp\left(-\frac{1}{a^2}\right)$
puisque $\dfrac{2}{x^3}$ est la dérivée de $-\dfrac{1}{x^2}$.

Or : $\lim\limits_{a\to 0^+} -\dfrac{1}{a^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{a\to 0^+} \exp\Big(-\dfrac{1}{a^2}\Big) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_a^1 \dfrac{2}{x^3}\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x = e^{-1}$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut e^{-1}.

Pour $A>0$, on a de la même façon :
$\displaystyle\int_1^A \dfrac{2}{x^3}\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x = \Big[\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)\Big]_1^A = \exp\Big(-\dfrac{1}{A^2}\Big) - e^{-1}$, où :
$\lim\limits_{A\to +\infty} -\dfrac{1}{A^2} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} = e^0 = 1$, donc $\lim\limits_{A\to +\infty} \exp\Big(-\dfrac{1}{A^2}\Big) = 1$ donc $\lim\limits_{A\to +\infty} \displaystyle\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = 1-e^{-1}$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $1-e^{-1}$.
Finalement, par somme de deux intégrales convergentes :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $e^{-1}+1-e^{-1}=1$, ce qui achève de prouver que f peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y ; par définition : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x \leqslant 0$: f est nulle sur $]-\infty;x]$ qui est inclus dans $]-\infty;0]$, donc :
$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x 0\ \mathrm{d}t = 0$
- Pour tout $x>0$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^0 0\ \mathrm{d}t + \int_0^x \dfrac{2}{t^3}\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0}\Big[\exp\Big(-\dfrac{1}{t^2}\Big)\Big]_a^x = \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$
d'après les calculs faits à la question précédente.

Bilan : $\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0 \\ \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) & \text{si } x>0 \end{cases}$.

2. a) Quand on aime, on ne compte pas... on recommence le même travail qu'à la question précédente avec la fonction $g:\ x\mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x\geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x<1 \end{cases}$.

- La fonction g est continue sur $]-\infty;1[$ comme fonction constante, et continue sur $]1;+\infty[$ comme inverse à un facteur constant près, d'une fonction polynôme.
La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.
- Pour tout $x\geqslant 1$, $g(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$ comme quotient de deux réels strictement positifs, et pour tout $x<1$, $g(x) = 0 \geqslant 0$, donc g est positive sur $\mathbb{R}$.
- Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\Big[-\frac{1}{x^2}\Big]_1^A = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{A^2}+1 = 1$$

La fonction g peut bien être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^x 0\ \mathrm{d}t = 0 & \text{si } x\leqslant 1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{t^2}\Big]_1^x = 1-\frac{1}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, par définition du maximum :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]\big)\\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \times \mathbb{P}(X_2 \leqslant x) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \qquad \text{par mutuelle indépendance des } X_i\\
&= \big(\mathbb{P}(X \leqslant x)\big)^n = \big(G(x)\big)^n \qquad \text{puisque les } X_i \text{ suivent toutes la loi de } X
\end{aligned}$$

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$ et F_n sa fonction de répartition. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F_n(Y_n)(x) &= \mathbb{P}\Big(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\Big) \overset{[\sqrt{n}>0]}{=} \mathbb{P}(M_n \leqslant x\sqrt{n})\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x\sqrt{n} < 1 \iff x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \dfrac{1}{(x\sqrt{n})^2}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x\sqrt{n} \geqslant 1 \iff x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Pour tout réel $x \leqslant 0$: on aura toujours, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \leqslant 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Ne pas oublier la remarque préliminaire qui donne ici tout son sens au calcul de limite !

5. a) Soit x un réel strictement positif : un entier n vérifie $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ si et seulement si :

$x^2 \geqslant \dfrac{1}{n} \iff \dfrac{1}{x^2} \leqslant n$ par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, puis par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le premier entier n tel que $n \geqslant \dfrac{1}{x}$ est $\lfloor \dfrac{1}{x^2} \rfloor + 1$, qui est aussi le premeir entier strictement supérieur à $\lfloor \dfrac{1}{x^2} \rfloor$, et pour tout n supérieur ou égal à cet entier, on a bien : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^2$.

b) On rappelle ici l'équivalent classique : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

Or pour tout $x > 0$ fixé, et pour tout $n > \lfloor \dfrac{1}{x^2} \rfloor$: $F_n(x) = e^{n\ln(1-\frac{1}{nx^2})}$, où :

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{nx^2} = 0$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{nx^2} \iff n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{-} \dfrac{1}{x^2}$.

On ne commet pas l'erreur de composer les équivalents par l'exponentielle : comme $-\dfrac{1}{x^2}$ ne dépend pas de n, la dernière équivalence signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$, et comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{1}{nx^2})} = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

6. Les calculs réalisés aux questions 4. et 5. prouvent ainsi que :

Pour tout réel x fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Bref :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

ce qui prouve bien, par définition même de cette notion, que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3

On considèrte un nombre réel $a \in]0,1[$ et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. a) On remarque que la matrice M_a est triangulaire (inférieure), donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, de sorte que :

$$\text{Sp}(M_a) = \{1, a\}$$

b) Pour trouver les sous-espaces propres de M_a, on résout le système $M_aX = \lambda.X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour chacune des deux valeurs propres λ de M_a :

- Pour $\lambda = 1$:

$$M_aX = X \iff (M_a - I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} & & 0 & = & 0 \\ (1-a)x & + & (a-1)y & = & 0 \\ & & (1-a)y + (a-1)z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 & L_1 \leftarrow 1/(1-a)L_1 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow 1/(1-a)L_2 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z$$

Donc : $\quad E_1(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Le sous-espace propre est engendré par un vecteur non nul, qui forme donc aussi une famille libre, et donc une base de $E_1(M_a)$.

- Pour $\lambda = a$:

$$M_aX = a.x \iff (M_a - a.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ (1-a)x & = 0 \\ (1-a)y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \quad \text{puisque } 1-a \neq 0 \text{ et } a \neq 0$$

Ainsi : $\quad E_a(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Le sous-espace propre est engendré par un vecteur non nul, qui forme donc aussi une famille libre, et donc une base de $E_a(M_a)$.

c) D'après ce qui précède : $\dim E_1(M_a) + \dim E_a(M_a) = 1 + 1 = 2 \neq 3$: la matrice M_a, carrée d'ordre 3, n'est donc pas diagonalisable.

2. On note I la matrice identité d'ordre 3, et $E = \text{Vect}(I, M_a, M_a^2)$.

a) Le calcul matriciel donne :

$$M_a^2 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1-a+a(1-a)+0 & 0+a^2+0 & 0+0+0 \\ 0+(1-a)^2+0 & 0+a(1-a)+a(1-a) & 0+0+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$$

E est déjà engendré par (I, M_a, M_a^2) ; on cherche donc à savoir si cette famille est libre, et pour cela on pose une combinaison linéaire nulle des trois matrices :

$$x.I+y.M_a+z.M_a^2 = 0_3 \iff \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z & x+ay+a^2z & 0 \\ (1-a)^2z & (1-a)y+2a(1-a)z & x+ay+a^2z \end{pmatrix} = 0_3$$

Le coefficient d'indices $(3,1)$ donne : $\quad (1-a)^2z = 0 \iff z = 0$ car $(1-a)^2 \neq 0$.
Le coefficient d'indices $(2,1)$ donne alors : $\quad (1-a)y = 0 \iff y = 0$ puisque $1-a \neq 0$.
Le coefficient d'indices $(1,1)$ donne alors : $\quad x = 0$, donc :

$x.I + y.M_a + z.M_a^2 = 0_3 \implies x = y = z = 0$, donc la famille (I, M_a, M_a^2) est libre, et c'est finalement une base de E, de sorte que $\dim E = 3$.

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les calculs matriciels donnent : $\quad K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque alors que : $\quad M_a - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} = (1-a)J$

et $M_a - aI = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} = (1-a)K$, donc :

$$(M_a - I)(M_a - aI)^2 = \big((1-a)J\big)\big((1-a)K\big)^2 = (1-a)^3JK^2 = 0_3$$

c) Si on développe le produit précédent :

$$(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2I^2) = M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2I$$

Or ce produit est nul :

$$M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2+2a)M_a - a^2I = 0 \iff M_a^3 = a^2I - (a^2+2a)M_a + (2a+1)M_a^2$$

On vient d'écrire M_a^3 comme combinaison linéaire de $I,\ M_a$ et M_a^2, ce qui prouve que M_a^3 appartient à E.

3. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que $M_a^n = u_n.M_a^2 + v_n.M_a + w_n.I$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $M_a^0 = I = 0.M_a^2 + 0.M_a + 1.I$, et l'unicité de la décomposition est garantie par le fait que la famille (I, M_a, M_a^2) est libre.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $u_0 = 0,\ v_0 = 0$ et $w_0 = 1$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M_a^{n+1} = M_a \times M_a^n &\overset{H.R.}{=} M_a \times \big(u_n.M_a^2 + v_n.M_a + w_n.I\big) = u_n.M_a^3 + v_n.M_a^2 + w_n.M_a \\ &= u_n.\big(a^2I - (a^2+2a)M_a + (2a+1)M_a^2\big) + v_n.M_a^2 + w_n.M_a \\ &= \big((2a+1)u_n + v_n\big).M_a^2 + \big(-a(a+2)u_n + w_n\big)M_a + a^2u_n.I \end{aligned}$$

On a donc obtenu une décomposition de M_a^{n+1} dans la base (I, M_a, M_a^2) qui est unique :
$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est avec

$$\begin{cases} u_{n+1} &= (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} &= a^2u_n \end{cases}$$

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Le script suivant le permet effectivement pas de calculer et d'afficher les valeurs de $u_n,\ v_n$ et w_n :

```
1  n = input('entrez une valeur pour n :')
2  a = input('entrez une valeur pour a :')
3  u = 0
4  v = 0
5  w = 1
6  for k = 1:n
7      u = (2*a+1)*u+v
8      v = -a*(a+2)*u+w
9      w = a*a*u
10 end
11 disp(w,v,u)
```

En effet, il faut toujours garder en tête que les opérations informatiques s'effectuent de façon séquentielle : on entre dans la k-ième boucle avec la valeur u_{k-1} dans la variable `u` ; puis à la ligne 7, la valeur de `u` est redéfinie et contient désormais u_k. À la ligne 8, la variable `v` est alors redéfinie via le calcul $-a(a+2)u_k + v_{k-1}$, qui n'est pas égal à $-a(a+2)u_{k-1} + v_{k-1} = v_k$.

c) Le problème est donc d'être sûr de calculer les nouvelles valeurs de `u`, `v` et `w` avec les anciennes valeurs de ces trois variables ; la solution la plus simple consiste à enregistrer ailleurs au moins les anciennes valeurs des variable. On peut en fait, dans ce cas précis, se contenter de sauvegarder l'ancienne valeur de `u` :

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
a = input('entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k = 1:n
    uold = u
    u = (2*a+1)*uold + v   // ici v a toujours son ancienne valeur
    v = -a*(a+2)*uold + w  // ici w a toujours son ancienne valeur
    w = a*a*uold
end
disp(w,v,u)
```

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les relations de récurrences obtenues en 3.a) :

$$u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2}+v_{n+2} = (2a+1)u_{n+2}-a(a+2)u_{n+1}+w_{n+1} = (2a+1)u_{n+2}-a(a+2)u_{n+1}+a^2u_n$$

L'énoncé admettait qu'on peut en déduire u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1}+1}{(a-1)^2}$$

b) Puisque $0 < a < 1$, alors par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} na^{n-1} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{(a-1)^2}$$

La relation $w_{n+1} = a^2u_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donne alors :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{a^2}{(a-1)^2}$$

La relation $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n$ donne finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{-a(a+2)}{(a-1)^2} + \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{-2a}{(a-1)^2}$$

c) D'après le résultat admis par l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \frac{1}{(a-1)^2}M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2}M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2}I = \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2I\right)$$
$$= \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2 = \frac{(1-a)^2}{(a-1)^2}K^2 = K^2 = L_a$$

d'après les calculs réalisés à la question 2.b).

d) On remarque donc que la matrice L_a ne dépend pas de a, et les calculs matriciels donnent bien :

$$L_a^2 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_a$$

5. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
Alors :

a) Pour tout x appartenant à $\text{Ker}(f_a - Id)$, c'est-à-dire au sous-espace propre $E_1(f_a) = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ d'après la question 1.b) :

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda.(1,1,1) = \lambda.(e_1 + e_2 + e_3)$ en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice L_a représente φ_a dans cette base, donc :

$$\varphi_a(x) = \lambda.\varphi_a(e_1+e_2+e_3) = \lambda.\big(\varphi_a(e_1)+\varphi_a(e_2)+\varphi_a(e_3)\big) = \lambda.(e_1+e_2+e_3+0_{\mathbb{R}^3}+0_{\mathbb{R}^3}) \iff \varphi_a(x) = x$$

b) L'endormorphisme $f_a - Id$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$M_a - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} = (1-a)J$, donc grâce à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire :

$$\text{Im}(\varphi_a - Id) = \text{Vect}\big((1-a)e_2, (a-1)e_2 + (1-a)e_3, (a-1)e_3\big) = \text{Vect}(e_2, e_2 - e_3, e_3) = \text{Vect}(e_2, e_3)$$

de sorte que : $x \in \text{Im}(f_a - Id) \Longrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;\ x = \lambda.e_2 + \mu.e_2$.

La linéarité de φ_a, et la matrice L_a assurent alors que : $\varphi_a(x) = \lambda.\varphi_a(e_2) + \mu.\varphi_a(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $\varphi_a(e_2) = \varphi_a(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ vu que les colonnes 2 et 3 de L_a sont nulles.

Problème

Partie 1 : un jeu naïf

1. Étude de la première manche.

a) La variable aléatoire X_1 est égale au temps d'attente d'un premier succès : obtenir Pile, dans une suite d'épreuves de Bernoulli (les lancers de la pièce par le joueur A) répétées de façon identique et sans mémoire ; X_1 suit donc la loi géométrique de paramètre p, et comme on peut dire exactement la même chose de la variable aléatoire Y_1 qui concerne cette fois le joueur B.

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1}p = \mathbb{P}(Y_1 = k)$$

On sait qu'alors il est presque sûr que le joueur A finira par obtenir Pile, donc il est aussi presque sûr que la première manche se terminera (par la victoire de A s'il obtient Pile en premier, ou par celle de B). Cet événement est en effet $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X = k]$, union disjoite qui a pour probabilité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \frac{p}{1-q} = 1$.

b) L'événement E_1 s'écrit : $\quad E_1 = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\big([X_1 = k] \cap [Y_1 = k]\big)$.

c) Cette union est disjointe, donc par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = k] \cap [Y_1 = k]\big) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k).\mathbb{P}(Y_1 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2.q^2(k-1) = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = p^2.\frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}$$

$(*)$: par indépendance des variables aléatoires X_1 et Y_1.

d) Les pièces que lancent les joueurs A et B étant identiques, les rôles des deux joueurs sont parfaitement symétriques et peuvent donc être échangés, ce qui comprend notamment le fait $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(H_1)$.

Or la première manche ne peut se terminer que de trois façons différentes : soit il y a égalité, soit le joueur A gagne à la première manche, soit le joueur B gagne à la première manche.

Bref, les événements (E_1, G_1, H_1) forment un système complet d'événements, et par conséquent :

$$\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(H_1) = 1 \iff 2\mathbb{P}(G_1) = 1 - \mathbb{P}(E_1) = 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$$

soit : $\quad \mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q} = \mathbb{P}(H_1)$.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'événement G_n est réalisé si et seulement si pendant les $n-1$ premières parties, les deux joueurs sont à égalité, et à la n-ième partie, le joueur A obtient son premier Pile strictement plus tôt que le joueur B, soit :

$$G_n = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n < Y_n)$$

b) Pour tout entier $k \geqslant 2$: $\mathbb{P}_{E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$ car on a besoin de savoir que les $k-1$ premières parties ont chacune conduit à l'égalité entre les deux joueurs A et B, pour que la k-ième partie ait lieu, mais dans ce cas cette partie supplémentaire se déroule dans les même conditions que la première partie, et la probabilité qu'il y ait à nouveau égalité est encore égale à $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la probabilité $\mathbb{P}(G_n)$ se calcule alors avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n)$$

$$= \underbrace{\frac{p}{1+q} . \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q}}_{n-1 \text{ fois}} \times \frac{q}{1+q} = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} . \frac{q}{1+q}$$

En effet, on a aussi, pour des raisons analogues à celles évoquées au début de cette question : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$.

c) Lorsque $n = 1$: $\quad \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{1-1} . \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q} = \mathbb{P}(G_1)$, donc la formule générale est aussi vraie pour $n = 1$, donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) L'événement G est réalisé si et seulement si l'un des événements G_n est réalisé, donc :

$G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$, et l'union est disjointe puisque si A gagne à une certaine partie, il n'a pas gagné avant et les parties d'après n'auront pas lieu. Ainsi, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{q}{1+q} . \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} = \frac{q}{1+q} . \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$$

e) À nouveau, pour obtenir la probabilité $\mathbb{P}(H)$ il suffit d'échanger les rôles des joueurs A et B, qui sont parfaitement symétriques ; on écrirait notamment : $H_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (Y_n < X_n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$, et $H = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$.

Les calculs suivent alors exactement les mêmes étapes, et : $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

En définitive ce jeu n'a que trois issues possibles : soit A finit par gagner, soit c'est B qui finit par gagner, soit le jeu ne s'arrête jamais.

Les événements (G, H, E) forment donc un système complet d'événements, et par conséquent :

$$\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E) = 1 \iff \mathbb{P}(E) = 0 \quad \text{puisque } \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}$$

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un rang d'écart, et B parie le contraire.

3. a) Comme l'énoncé l'indique, on utilise le système complet d'événements $\big((X_1 = i)\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire :

$$\mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big((X_1 = i) \cap (Y_1 = X_1 + 1)\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big((X_1 = i) \cap (Y_1 = i + 1)\big)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(Y_1 = i + 1) = \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1}.pq^{i} = p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} (q^2)^{i-1}$$

$$= p^2 q . \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq}{1+q} \qquad \text{puisque } 1 - q = p$$

$(*)$ par indépendance des variables aléatoires X_1 et Y_1.

b) La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est alors :

$$u = \mathbb{P}\big((Y_1 = X_1 + 1) \cup (X_1 = Y_1 + 1)\big) = \mathbb{P}(Y_1 = X_1 + 1) + \mathbb{P}(X_1 = Y_1 + 1) = \frac{2pq}{1+q}$$

par union disjointe, et toujours parce que les rôles de X_1 et Y_1 sont symétriques.

4. a) L'événement K_1 est égal à $(Y_1 = X_1 + 1) \cup (X_1 = Y_1 + 1)$ donc $\mathbb{P}(K_1) = \dfrac{2pq}{1+q}$, et pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$K_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap \big((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1)\big)$$

La formule des probabilités composées donne alors :

$$\mathbb{P}(K_n) = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}\big((Y_n = X_n + 1) \cup (X_n = Y_n + 1)\big)$$

$$= \Big(\frac{p}{1+q}\Big)^{n-1} . u = \Big(\frac{p}{1+q}\Big)^{n-1} . \frac{2pq}{1+q}$$

et à nouveau, on remarque que la formule finale pour $\mathbb{P}(K_n)$ est aussi valable pour $n = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour finir : $K = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ et l'union est disjointe, donc encore par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(K) = \frac{2pq}{1+q} . \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} = \frac{2pq}{1+q} . \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q} . \frac{1+q}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = p$$

Partie 3 : Informatique

6. Le script Scilab suivant simule l'expérience dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu, ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné (calculé par la variable c).

```
p = input('entrez une valeur pour p : ')
c = 1
X = grand(1,1,'geom',1,p)    // calcul de X1
Y = grand(1,1,'geom',1,p)    // calcul de Y1
while X == Y                 // tant qu'il y a égalité, on recommence une manche
    X = grand(1,1,'geom',1,p)
    Y = grand(1,1,'geom',1,p)
    c = c+1
end
if X < Y then disp('Le joueur A a gagné')
         else disp('Le joueur B a gagné')
end
disp(c)
```

7. La commande supplémentaire ci-dessous evalue plus précisément si les valeurs finales des variables X et Y ont une unité d'écart, auquel cas le joueur A a gagné son pari au deuxième jeu, ou pas.

```
if abs(X-Y) == 1 then disp('A gagne le deuxième jeu') else disp('B gagne le deuxiè
me jeu') end
```