MATHÉMATIQUES - Edhec S 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie 1 : étude d'un exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -2-6+2 & 0+9-2 & 0-6+0 \\ -1-2+0 & 0+3+0 & 0-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

   On remarque donc que $A^2 = 3A - 2I_3 \iff A = 2 - 3A + 2I_3 = 0_3$, ce qui signifie que $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A (et il est bien de degré 2).

   b) Les valeurs propres possibles de A sont donc les racines de P : on remarque que $P(1) = 1-3+2 = 0$ et $P(2) = 4-6+2 = 0$, donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux racines de P (il n'en a pas d'autre puisqu'il est de degré 2), donc les seules valeurs propres possibles de A.

   c) Le script `Scilab` réalisé dans l'énoncé, donne $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1 < 3$ et $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2 < 3$: cela suggère que 1 et 2 sont bien valeurs propres de A, et d'après le théorème du rang :

   $$\dim E_1(A) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2(A) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1.$$

   (en effet, $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.)

   d) On passe par le calcul pour vérifier les résultats précédents et trouver une base de chacun des deux sous-espaces propres possibles :

   - pour $\lambda_1 = 1$: $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; les trois colonnes de cette matrice sont proportionnelles (voire égales pour la première et la deuxième) et non nulles, ce qui confirme que $\mathrm{rg}(f - Id) = 1$ et que $\lambda_1 = 1$ est bien valeur propre de f. De plus :

     $$u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - Id) \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y - z = 0 \iff x = y - z.$$

     (les deux lignes du sytème obtenu étaient proportionnelles). Ainsi :

     $$\mathrm{Ker}(f - Id) = \big\{(y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big),$$

     et comme les deux vecteurs qui engendrent ce sous-espace propre sont non colinéaires, alors ils forment une famille libre, et finalement une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

- Pour $\lambda_2 = 2$: $\quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque que les deux dernières colonnes sont proportionnelles entre elles, mais pas avec la première, donc : $\mathrm{rg}(f - 2Id) = 2$, et 2 est bien valeur propre de f. De plus :

$$u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - 2Id) \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & & & & & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(f - 2Id) = \big\{(0, 2z, z) |\ z \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((0, 2, 1)\big).$$

Ce sous-espace propre est engendré par un seul vecteur non nul : il forme à lui seul une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

2. a) D'après ce qui précdède : $\mathrm{Sp}(f) = \{1 ; 2\}$, et $\dim \mathrm{Ker}(f - Id) + \dim \mathrm{Ker}(f - 2Id) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc f est diagonalisable et on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f en juxtaposant des bases de ses deux sous-espaces propres.

   Pour satisfaire aux exigences de l'énoncé, on utilise le fait qu'on obtient une autre base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$ que $\big((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$ en ajoutant au deuxième vecteur, le premier : la famille $\big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$ est encore génératrice de $\mathrm{Ker}(f - Id)$, toujours libre donc une base de ce sous-espace propre. L'ordre des vecteurs n'ayant pas d'importance quant au fait qu'il s'agisse d'une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$, on en déduit que $(u_1, v_1, v_2) = \big((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)\big)$ est la base de $\mathbb{R}^3$ cherchée.

   b) Soit $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$: les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2) sont les réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que :

$$x = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot v_1 + \alpha_3 \cdot v_2 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & & & & & = & a \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & b \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & c \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 & = a \\ \alpha_3 & = -a + b - c \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 & = a \\ \alpha_2 & = a - b + 2c \\ \alpha_3 & = -a + b - c \end{cases}$$

Partie 2 : généralisation

Pour deux entiers n et p tels que $n \geqslant p \geqslant 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deux à deux distinctes.

3. a) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D : ses éléments diagonaux sont alors les valeurs propres de f, donc les λ_i, éventuellement répétés (autant de fois que la dimension de l'espace propre associé).
   Pour tout entier i compris entre 1 et p : la matrice $D - \lambda_i \cdot I_n$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont nuls là où la matrice D avait des éléments diagonaux égaux à λ_i.

   Ainsi, la matrice $(D - \lambda_1 \cdot I_n)(D - \lambda_2 \cdot I_n) \cdots (D - \lambda_p \cdot I_n)$ est le produit de matrices diagonales : c'est encore une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les produits des éléments diagonaux de chaque facteur, à la même place. D'après ce qu'on vient de voir, chacun de ces produits contient au moins un facteur nul, donc est égal à zéro : on a bien démontré que

$$(D-\lambda_1\cdot I_n)(D-\lambda_2\cdot I_n)\cdots(D-\lambda_p\cdot I_n)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

b) Le relation précédente fournit directement un polynôme annulateur de f : il s'agit du polynôme $Q=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$.

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

4. a) Pour tout entier i compris entre 1 et n : si $i\neq k$, alors $L_k(\lambda_i)=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$ est le produit de $n-1$ facteurs dont l'un est nul, puisque j prend toutes les valeurs comprises entre 1 et n sauf k, mais bien i.
Bref : si $i\neq k,\ L_k(\lambda_i)=0$.
Et si $i=k$: $\quad L_k(\lambda_k)=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}=1^{n-1}=1.$

b) La famille $(L_1,L_2,\ldots,L_p)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $p-1+1=p$: il suffit donc de prouver que cette famille est libre, pour démontrer que c'est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Soient donc $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ des réels tels que :

$$\alpha_1\cdot L_1+\alpha_2\cdot L_2+\cdots+\alpha_p\cdot L_p=0_{\mathbb{R}_{p-1}[X]}.$$

En évaluant cette égalité de polynômes en chacun des réels λ_i $(1\leqslant i\leqslant p)$, on obtient :

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad 0+\alpha_k\cdot L_k(\lambda_k)+0=0\iff\alpha_k=0,$$

ce qui prouve que la famille $(L_1,L_2,\ldots,L_p)$ est libre, et est donc une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Par définition d'une base : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, il existe des réels $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p$ uniques tels que :

$$P=\sum_{i=1}^{p}\beta_i\cdot L_i.$$

Les réels β_i sont constants, donc si on évalue cette égalité en chacun des λ_k $(1\leqslant k\leqslant p)$, on obtient :

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad P(\lambda_k)=0+\beta_k\cdot L_k(\lambda_k)+0\iff\beta_k=P(\lambda_k),$$

donc effectivement : $\quad\forall P\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\ P=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}P(\lambda_k)\cdot L_k.$

d) Si on applique le résultat précédent avec le polynôme $P=1$ constant égal à 1 : pour tout $k\in[\![1,p]\!],\ P(\lambda_k)=1$ donc :

$$\sum_{i=1}^{p}L_i=1.$$

5. a) Pour tout x de E, on vérifie que $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-\lambda_k\cdot Id)$, en prouvant que son image par $(f-\lambda_k\cdot Id)$, donne le vecteur nul ; or :

$$(f-\lambda_k\cdot Id)\circ L_k(f)=\big((X-\lambda_k)L_k\big)(f)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\cdot Q(f),$$

où $Q = \prod_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de D (voir la question 3.a)) : c'est donc aussi un polynôme annulateur de f, et par conséquent :

$$\forall x \in E, \quad (f - \lambda_k \cdot Id)\big(L_k(f)(x)\big) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \cdot Q(f)(x) = 0_E,$$

ce qui prouve bien que $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \cdot Id)$.

b) Des questions 4.d) et 5.a), on déduit : $\sum_{i=1}^{p} L_i(f) = Id$, donc :

$$\forall x \in E, \quad Id(x) = x = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x) \quad \text{où } \forall i \in [\![1, p]\!],\ L_i(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \cdot Id).$$

Il s'agit donc bien d'une décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \cdot Id)$, et même de *la* décomposition de x sur cette somme directe, puisqu'elle est unique.

6. Avec l'endomorphisme f de la partie 1 : $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$, $p = 2$ et les deux polynômes L_1 et L_2 sont :

$$L_1 = \frac{X - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -X + 2, \qquad L_2 = \frac{X - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = X - 1$$

Pour tout $x = (a, b, c) \in E$, on a alors :

- $L_1(f)(x) = (2Id - f)(x)$, qui est représenté matriciellement dans la base canonique de E par $(2I_3 - A)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - b + 2c \\ a - b + 2c \end{pmatrix}$
- $L_2(f)(x) = (f - Id)(x)$ qui est représenté matriciellement par $(A - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a + 2b - 2c \\ -a + b - c \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier que :

$$L_1(f)(x) + L_2(f)(x) = (a, 2a - b + 2c, a - b + 2c) + (0, -2a + 2b - 2c, -a + b - c) = (a, b, c) = x$$

qui s'écrit aussi :

$$x = a \cdot (1, 1, 0) + (a - b + 2c) \cdot (0, 1, 1) + (-a + b - c) \cdot (0, 2, 1),$$

ce qui redonne bien la décomposition de x obtenue à la fin de la partie 1.

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1. a) D'après le cours sur la fonction arctangente : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   b) Le nombre Arctan(1) est l'unique réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = 1$, il s'agit donc de $\theta = \frac{\pi}{4}$.

   Ensuite, la fonction $h :\ x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$, et :

   $$\forall x > 0, \quad h'(x) = \text{Arctan}'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot \text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

   La fonction h est donc constante sur $]0\,;+\infty[$ puisque sa dérivée est nulle sur cet intervalle : il suffit donc de connaître la valeur de h en un point de $]0\,;+\infty[$: c'est alors celle de $h(x)$ pour tout $x > 0$.
   Or d'après ce qui précède : $h(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

   $$\forall x > 0, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

   c) La fonction Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donné par la formule de Taylor-Young :

   $$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}'(0) \cdot x + o_0(x) = 0 + \frac{1}{1+0^2} \cdot x + o_0(x), \quad \text{soit } \text{Arctan}(x) = x + o_0(x).$$

   On a notamment utilisé le fait que $\tan(0) = 0 \iff 0 = \text{Arctan}(0)$. La dernière égalité obtenue signifie bien, par définition, que :

   $$\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

2. a) La fonction f et continue est positive sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 > 0$). Comme elle est aussi paire, on a sous réserve de convergence des intégrales : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

   Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^A \text{Arctan}'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big(\lim_{t \to +\infty} \text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(0)\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \frac{1}{2}$.

   En effet, par propriété de la bijection réciproque : $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \iff \lim_{t \to +\infty} \text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$.

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $2 \times \frac{1}{2} = 1$, ce qui achève de démontrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   b) Pour tout réel x, par définition :

   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big(\text{Arctan}(x) - \lim_{B \to -\infty} \text{Arctan}(B)\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\Big) \boxed{= \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}}.$$

   En effet : $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \iff \lim_{B \to -\infty} \text{Arctan}(B) = -\frac{\pi}{2}$.

3. a) La fonction g introduite par l'énoncé est positive sur $-\infty\,;0]$ car constante nulle, et positive sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de deux facteurs strictement positifs (l'invers d'un carré et une exponentielle), elle est donc positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est continue sur $]-\infty\,;0[$ comme fonction constante, et est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions qui le sont, donc g est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

Enfin, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to 0^+}} \left[e^{-1/t}\right]_B^A = \lim_{A\to+\infty} e^{-1/A} - \lim_{B\to 0^+} e^{-1/B} = 1-0=1.$$

En effet, $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{1}{A} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$, tandis que $\lim\limits_{B\to 0^+} -\dfrac{1}{B} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

b) Toujours par définition de la fonction de répartition : $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$.

Puisque g est nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit sans calcul que $G(x)=0$ pour tout $x<0$.

Ensuite, pour tout réel x positif :

$$G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lim_{B\to 0^+}\left[e^{-1/t}\right]_B^x = e^{-1/x} - \lim_{B\to 0^+} e^{-1/B} \boxed{= e^{-1/x}}.$$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

4. a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= P(M_n \leqslant x) = P\big(\max(X_1,X_2,\dots,X_n)\leqslant x\big)\\
&= P\big([X_1\leqslant x]\cap[X_2\leqslant x]\cap\ldots\cap[X_n\leqslant x]\big) \quad \text{par définition du maximum}\\
&= P(X_1\leqslant x)\times P(X_2\leqslant x)\times\cdots\times P(X_n\leqslant x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } X_i\\
&= \big(F(x)\big)^n \quad \text{puisque les } X_i \text{ suivent toutes la même loi que } X\\
&= \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x)+\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n}M_n$. Comme π et n sont strictement positifs, alors pour tout réel x :

$$G_n(x) = P(Y_n\leqslant x) = P\Big(M_n \leqslant \frac{n}{\pi}x\Big) = F_{M_n}\Big(\frac{nx}{\pi}\Big) = \Big(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{nx}{\pi}\Big)+\frac{1}{2}\Big)^n.$$

5. a) Si $x=0$, alors $G_n(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puisque $\mathrm{Arctan}(0)=0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(0) = 0$ puisque $0<\frac{1}{2}<1$.

Pour $x<0$ fixé, on écrit : $\quad G_n(x) = e^{n\ln\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)}$, où :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nx}{\pi} = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty}\mathrm{Arctan}(u) = -\dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{nx}{\pi}\Big)+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{nx}{\pi}\Big)+\dfrac{1}{2}\right) = -\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{nx}{\pi}\Big)+\dfrac{1}{2}\right)$.

Comme $\lim\limits_{z\to-\infty} e^z = 0$, on en déduit :

$$\forall x<0,\quad \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)} = 0 = \lim_{n\to+\infty} G_n(x).$$

b) Pour tout réel strictement positif x, $\dfrac{nx}{\pi} > 0$, donc on peut utiliser la formule obtenue à la question 1.b) pour écrire :

$$G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) + \frac{1}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n.$$

c) En passant là encore à la forme exponentielle, pour tout $x > 0$, $G_n(x) = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)}$, où :

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{nx} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) = -\frac{1}{\pi} \times \text{Arctan}(0) = 0$ par continuité de la fonction Arctangente en 0.

L'équivalent classique $\quad \ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u \quad$ donne donc ici :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{nx}\right) = -\frac{1}{x},$$

ce qui signifie que : $\quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right) = -\frac{1}{x}$, et par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)} = e^{-1/x} = \lim_{n \to +\infty} G_n(x).$$

d) La fonction $G : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{z \to -\infty} e^z = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} G(x) = 0 = G(0) = \lim_{x \to 0^-} G(x)$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

Les questions précédentes ayant fait apparaître que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$, alors on peut effectivement conclure que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3

Soit un espace euclidien E de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthnormale de E.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associé le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x)\,, y\rangle = \langle x\,, u^*(y)\rangle.$$

1. a) On suppose que u^* existe. Dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, le vecteur $u^*(y)$ admet la décomposition :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^*(y)\,, e_i\rangle e_i \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle e_i\,, u^*(y)\rangle e_i \overset{(\star\star)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i.$$

On a utilisé la symétrie du produit scalaire $(\star)$, et la propriété que l'énoncé donne comme définition de u^* $(\star\star)$ dans ce calcul.

b) L'expression précédemment obtenue de $u^*(y)$, valable pour tout $y \in E$, dépend uniquement de u et de y : cela caractérise bien de façon unique le vecteur $u^*(y)$ pour $y \in E$ donné quelconque, donc l'application u^*. S'il existait un autre endomorphisme v de E qui vérifie la même relation $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x)\,, y\rangle = \langle x\,, v(y)\rangle$, alors on aurait, par les mêmes calculs que précédemment : $\forall y \in E,\ v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i = u^*(y)$, donc $v = u^*$.

2. a) Soit donc l'application $u^* :\ y \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i$, définie ainsi pour tout y de E.

Pour tout $y \in E,\ \langle u(e_i)\,, y\rangle \in \mathbb{R}$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i$ appartient bien encore à E.

Pour tous vecteurs y, z de E et tout réel λ :

$$\begin{aligned} u^*(\lambda \cdot y + z) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, \lambda \cdot y + z\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda \langle u(e_i)\,, y\rangle + \langle u(e_i)\,, z\rangle\big) \cdot e_i \quad \text{par linéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i + \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, z\rangle e_i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \lambda \cdot u^*(y) + u^*(z), \end{aligned}$$

donc u^* ainsi définie, est bien une application linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de E.

b) Pour tout vecteur x de E, qui se décompose sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x\,, e_i\rangle e_i$, alors par linéarité de u, on a : $\quad u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x\,, e_i\rangle u(e_i)$ et pour tout $y \in E$:

$$\langle u(x)\,, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x\,, e_i\rangle u(e_i)\,, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x\,, e_i\rangle \cdot \langle u(e_i)\,, y\rangle,$$

et d'autre part :

$$\langle x,, u^*(y)\rangle = \langle x\,, \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i)\,, y\rangle \cdot \langle x\,, e_i\rangle,$$

on a donc bien :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x)\,, y\rangle = \langle x\,, u^*(y)\rangle.$$

On a donc bien démontré l'existence et l'unicité de l'endomorphisme u^*, adjoint de u.

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.

On dit que u est un **endomorphisme normal** quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u.$$

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E, vérifiant donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x)\,, y\rangle = \langle x\,, f(y)\rangle.$$

On a alors, pour tout y de E et d'après 1.a) :

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i)\,, y\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i\,, f(y)\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f(y)\,, e_i\rangle e_i = f(y),$$

donc $f = f^*$: f est son propre adjoint, et alors bien sûr, $f \circ f^* = f^2 = f^* \circ f$, donc f est normal.

4. Soit u un endomorphisme normal.
   a) Par définition de la norme associée au produit scalaire : pour tout x de E,

   $$||u(x)|| = \sqrt{\langle u(x)\,, u(x)\rangle} \overset{(\star)}{=} \sqrt{\langle x\,, u^* \circ u(x)\rangle} \overset{(\star\star)}{=} \sqrt{\langle x\,, u \circ u^*(x)\rangle} \overset{(\star)}{=} \sqrt{\langle u^*(x)\,, u^*(x)\rangle} = ||u^*(x)||.$$

   On a utilisé la définition de l'adjoint $(\star)$ et le fait que u est normal, donc commute avec son adjoint $(\star\star)$.

   b) De ce qui précède, on déduit la chaîne d'équivalences :

   $$x \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(x) = 0_E \iff ||u(x)|| = 0 \iff ||u^*(x)|| = 0 \iff u^*(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(u^*),$$

   qui prouve bien l'égalité d'ensembles : $\quad \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, c'est-à-dire : $\quad \forall x \in F,\ u(x) \in F$.
   L'orthogonal de F est alors le sous-espace $F^\perp = \big\{y \in E |\ \forall x \in F,\ \langle x\,, y\rangle = 0\big\}$.
   Soit donc $y \in F^\perp$ quelconque, alors pour tout x de F :

   $$\langle u^*(y)\,, x\rangle = \langle y\,, u(x)\rangle = 0 \quad \text{puisque } u(x) \in F,$$

   ce qui prouve que : $\forall y \in F^\perp,\ u^*(y) \in F^\perp$, et donc que $F^\perp$ est stable par u^*.

6. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous-espace propre associé.
   a) Pour tout $x \in E_\lambda$, on a donc $u(x) = \lambda \cdot x$ et puisque u est un endomorphisme normal de E :

   $$\forall x \in E_\lambda, \quad u \circ u^*(x) = u^* \circ u(x) \iff u\big(u^*(x)\big) = u^*(\lambda \cdot x) \iff u\big(u^*(x)\big) = \lambda \cdot u^*(x),$$

   ce qui prouve que $u^*(x)$ appartient encore à E_λ, donc que E_λ est stable par u^*.

   b) L'endomorphisme u^* admet lui-même un adjoint, défini à nouveau grâce à 1.a) par :

   $$\forall y \in E, \quad (u^*)^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^*(e_i)\,, y\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i\,, u(y)\rangle e_i = u(y),$$

   ce qui prouve bien l'égalité d'endomorphismes $(u^*)^* = u$.
   Ainsi d'après 5 : puisque E_λ est stable par u^*, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

Problème

Partie 1.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1;n]\!]$ et on appelle **fonction génératrice de** X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)t^k$$

1. $G(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$ puisque X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$.
2. Il s'agit d'une question qui demande un peu d'initiative, mais qui reste un grand classique :

   La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynômiale, avec :

   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X=k).kt^{k-1}$, donc $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = G'(1)$.
3. La fonction polynômiale est dérivable une deuxième fois sur $\mathbb{R}$, avec :

   $G''(t) = \displaystyle\sum_{k=\cancel{1}\ 2}^{n} P(X=k).k(k-1)t^{k-2}$, donc $G''(1) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P(X=k)$

   (le terme pour $k=1$ étant nul, il est indifféremment présent ou pas dans la somme).

   Le théorème de transfert assure alors que :

$$G''(1) = E\big(X(X-1)\big), \text{ et } G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - E(X)^2$$

$$= E\big(X^2 - X + X\big) - \big(E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = V(X)$$

   Par linéarité de l'espérance et d'après la formule de Koenig-Huygens.

Partie 2.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. a) Cette question est un grand classique de l'utilisation de l'Inégalité des Accroissements Finis :

   la fonction ln est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $[k;k+1]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur cet intervalle :

   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [k;k+1],\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\frac{1}{k+1}.(k+1-k) \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.(k+1-k) \iff \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

   (on aurait aussi pu travailler avec l'inégalité de la moyenne sur cet intervalle pour la fonction inverse.)

   b) Par sommation des inégalités précédentes lorsque k varie de 1 à $n-1$, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\iff \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \sum_{j=2}^{n} \ln(j) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\iff u_n - 1 \leqslant \ln(n) - \ln(1) \leqslant u_n - \frac{1}{n} \iff \ln(n)$$

ce qui donne bien, séparément, les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ u_n \leqslant \ln(n) + 1$ et $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n$, donc $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$ donc : $1 + \dfrac{1}{n\ln(n)} \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$, où :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} = 1 + 0 = 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)}$, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

5. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$, elle est donc convergente, ce qui signifie par définition que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6. Le script suivant permet d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
n = input('entrez une valeur pour n :')
A = 1:n
p = n
for k = 1:n
    j = grand(1,1,'uin',1,p)
    aux = A(j)
    A(j) = A(p)
    A(p) = aux
    p = p-1
end
disp(A)
```

7. On considère le script suivant :

```
m = A(1)
c = 1
for k = 2:n
    if A(k) > m then m = A(k)
                     c = k
    end
end
disp(c)
```

a) Ce script parcourt tout le vecteur `A` : dès que la case `A(k)` contient une valeur supérieure à la valeur courante de `m` (initialisée avec la valeur de `A(1)`), elle devient la nouvelle valeur de `m`.

On comprend donc que ce script consiste à rechercher la valeur maximale contenue dans le vecteur `A`. Or le vecteur en question représente une permutation possible de l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : son maximum est forcément la valeur n, et c'est celle qui est toujours rendue par ce script !

b) En même temps que la variable `m` enregistre une nouvelle valeur `A(k)`, la variable `c` enregistre la valeur `k` de la place à laquelle on trouve cette valeur.

On en déduit que la valeur de la variable `c` affichée à la fin du script, correspond à la place à laquelle se trouve l'entier n dans le vecteur `A`.

c) Les commandes suivantes suffisent pour réaliser exactement le même travail :

```
c = find(A == n)
disp(c)
```

8. Si $n = 1$, la boucle `for` n'est pas exécutée dans le script et la variable `c` n'est affectée qu'une fois avec la valeur 1 ; on en déduit que X_1 est la variable certaine égale à 1.

9. a) Après permutations de tous les entiers compris entre 1 et n, la valeur n peut se trouver à n'importe place entre les numéros 1 et n. Cet entier peut être précédé d'un nombre d'entiers dans l'ordre croissant égal à n'importe quelle valeur j comprise entre 0 et $n-1$, ce qui garantit que la variable `c` sera réévaluée $k = j+1$ fois, ce qui prouve bien que $X_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

b) $P(X_n = 1)$ est la probabilité que l'entier n se trouve en première position à l'issue de la permutation des n entiers : il y a $(n-1)!$ permutations qui commencent par l'entier n, et comme toutes les permutations sont supposées équiprobables, alors $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

$P(X_n = n)$ est la probabilité que la variable `c` soit réaffectée n fois : cela ne se produit que si chaque nouvelle case explorée du vecteur `A` définit un nouveau maximum provisoire (par rapport à toutes les valeurs explorées précédemment) : il n'y a qu'une seule permutation qui convienne, celle où les entiers de 1 à n sont rangés dans leur ordre initial croissant ! Ainsi : $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n!}$.

Pour $n = 2$, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, les deux formules précédentes donnent : $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$ également.

Pour $n = 3$, $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$; on a $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$,
et $P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \dfrac{6-2-1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

c) Les événements $\big([A_n = n], [A_n < n]\big)$ forment un système complet d'événements, avec lequel la formule des probabilités totales donn pour tout $n \geqslant 2$ et tout $j \in [\![2;n]\!]$:

$$P(X_n = j) = P(A_n = n).P_{[A_n=n]}(X_n = j) + P(A_n < n).P_{[A_n<n]}(X_n = j)$$

Sachant $[A_n = n]$ réalisé : les $n-1$ premiers entiers non nuls occupent les $n-1$ premières places du vecteur `A` ; il y aura forcément une dernière affectation de `c` à la fin de la boucle pour donner à `c` la valeur n ; auparavant, en parcourant les $n-1$ premières places, elle aura été affectée $j-1$ fois en tout, ce qui justifie que : $P_{[A_n=n]}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j-1)$.
Sachant $[A_n < n]$ réalisé : la variable `m` aura pris la valeur n avant d'arriver à la dernière place du vecteur `A`, la variable `c` prendra donc une dernière valeur strictement inférieure à n et ne changera plus de valeur au cours du dernier tour de boucle, ce qui justifie
que $P_{[A_n<n]}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$.
Par ailleurs, $P(A_n = n)$ est la probabilité que la permutation contenue dans `A` voit l'entier n à la n-ième place, donc $P(A_n = n) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ et $P(A_n < n) = \dfrac{n-1}{n}$, ce qui justifie que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2;n]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

d) La relation précédente permet de calculer par récurrence la loi de X_4 grâce à celle, connue, de X_3.

On connaît déjà les valeurs particulières $P(X_4=1)=\dfrac{1}{4}$ et $P(X_4=4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$; par ailleurs :

$P(X_4=2)=\dfrac{1}{4}P(X_3=1)+\dfrac{3}{4}P(X_3=2)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+9}{24}=\dfrac{11}{24}$;

$P(X_4=3)=\dfrac{1}{4}P(X_3=2)+\dfrac{3}{4}P(X_3=3)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{6}=\dfrac{3+3}{24}=\dfrac{1}{4}$.

La somme des 4 probabilités de la loi de X_4 vaut bien 1.

10. a) Lorsque $j=1$, le membre de droite de la question 9.c) donne :

$\dfrac{1}{n}P(X_{n-1}=0)+\dfrac{n-1}{n}P(X_{n-1}=1)=0+\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n}$ qui est bien égal à $P(X_n=1)$, donc la formule est encore vraie pour $j=1$.

b) En reprenant la question 9.c), valable pour tout j compris entre 1 et n, par t^j et par sommation de la relation pour j variant de 1 à n, on obtient pour tout $n\geqslant 2$ et tout réel t :

$$G_n(t)=\sum_{j=1}^{n}t^jP(X_n=j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}t^jP(X_{n-1}=j-1)+\frac{n-1}{n}t^jP(X_{n-1}=j)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}t^{k+1}P(X_{n-1}=k)+\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n}t^jP(X_{n-1}=j)$$

$$=\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n-1}t^kP(X_{n-1}=k)+\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}t^jP(X_n=j)\quad\text{car } P(X_{n-1}=0)=P(X_{n-1}=n)=0$$

$$G_n(t)=\frac{t}{n}G_{n-1}(t)+\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)=\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t)\quad(\star)$$

c) On peut par exemple par récurrence, démontrer la relation demandée ; pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: "$G_n(t)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)$".

Pour $n=1$: $G_1(t)=t^1P(X_1=1)=t$ et $\dfrac{1}{1!}\displaystyle\prod_{j=0}^{0}(t+j)=t$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Pour tout réel t : $G_{n+1}(t)=\dfrac{t+n}{n+1}G_n(t)=\dfrac{1}{n+1}.\dfrac{1}{n!}.(t+n)\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)=\dfrac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(t+j)$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

11. Par dérivation terme à terme de la relation $(\star)$, on obtient, pour tout entier $n\geqslant 2$ et tout réel t :

$$G_n'(t)=\frac{1}{n}G_{n-1}(t)+\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}'(t)$$

En évaluant alors cette relation en $t=1$, on obtient la relation valable pour tout $n\geqslant 2$:

$$G_n'(1)=\frac{1}{n}G_{n-1}(1)+G_{n-1}'(1)\iff E_n=\frac{1}{n}+E_{n-1}$$

En écrivant cette relation : $E_n - E_{n-1} = \dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} E_k - E_{k-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \iff E_n - E_1 = u_n - 1 \iff E_n = u_n \text{ puisque } E_1 = 1$$

12. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_n''(t) = \frac{1}{n}G_{n-1}'(t) + \frac{1}{n}G_{n-1}'(t) + \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}''(t)$$

qui donne pour $t = 1$: $\quad G_n''(1) = \dfrac{2}{n}G_{n-1}'(1) + G_{n-1}''(1)$, et donc

$$\begin{aligned} V_n = G_n''(1) + G_n'(1) - \big(G_n'(1)\big)^2 &= G_{n-1}''(1) + \frac{2}{n}E_{n-1} + E_n - (E_n)^2 \\ &= V_{n-1} - E_{n-1} + (E_{n-1})^2 + \frac{2}{n}E_{n-1} + E_{n-1} + \frac{1}{n} - \big(E_{n-1} + \frac{1}{n}\big)^2 \\ &= V_{n-1} + (E_{n-1})^2 + \frac{2}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n} - (E_{n-1})^2 - \frac{2}{n}E_{n-1} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) Par sommation de l'égalité précédente, on obtient pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k - V_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \iff V_n - V_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \iff V_n = u_n - h_n$$

puisque $V_1 = 0$, étant donné que X_1 est une variable certaine.

c) On a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, et (h_n) converge donc est négligeable devant u_n qui tend vers $+\infty$ comme $\ln(n)$, de sorte que :

$$V_n = u_n + o(u_n) \iff V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$