MATHÉMATIQUES - EML S 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

PROBLÈME 1

PARTIE A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. a. Soit $t \in]0\,;+\infty[$ quelconque : la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t\,;t+1]$, et pour tout x de $[t\,;t+1]$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie $\dfrac{1}{t+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{t}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\frac{1}{t+1}(t+1-t) \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}(t+1-t) \iff \frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) \geqslant 0,$$

d'après ce qui précède avec $t = n+1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \leqslant 0,$$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ est compris entre $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$, donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes : d'après le théorème associé, elles sont donc convergentes et de même limite notée γ.

2. Au vu de ce qui précède, on peut écrire :

$$v_n = \gamma + o(1) \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) = \ln(n) + o\big(\ln(n)\big),$$

ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. a. Puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes de même limite γ, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite décroissante, alors on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-u_n \geqslant -\gamma \geqslant -v_n \iff \frac{u_n+v_n}{2}-u_n \geqslant \frac{u_n+v_n}{2}-\gamma \geqslant \frac{u_n+v_n}{2}-v_n \iff \frac{v_n-u_n}{2} \geqslant \frac{u_n+v_n}{2}-\gamma \geqslant \frac{u_n-v_n}{2},$$

ce qui donne bien, d'après l'équivalence fondamentale : $A \geqslant X \geqslant -A \iff |X| \leqslant A$ (où $A \geqslant 0$ vaut ici $\dfrac{v_n-u_n}{2}$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right| \leqslant \frac{1}{2}(v_n-u_n).$$

b. L'inégalité précédente indique que $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ est une valeur approchée de γ à 10^{-5} près dès que $\dfrac{1}{2}(v_n-u_n) = \dfrac{1}{2}\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)$ est inférieur à 10^{-5}. Il suffit donc de trouver le premier entier n tel que cette dernière inégalité est vraie, puis de calculer la valeur correspondante de $\dfrac{u_n+v_n}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(n)+\ln(n+1)}{2}$.

```
function gamma = approx()
    n = 1
    while (log(n+1)-log(n))/2 > 1e-5
        n = n+1
    end
    gamma = sum([1:n].^(-1)) - (log(n+1)+log(n))/2
endfunction
```

À l'exécution, le script donne la valeur approchée à 10^{-5} près : $\gamma \approx 0.57722$.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Soit $x \in [0\,;+\infty[$: si $x=0$, alors $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x}=0$ est bien le terme général d'une série convergente, et si $x>0$, alors $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x} = \dfrac{x+k-k}{k(k+x)} = \dfrac{x}{k(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} x\cdot\dfrac{1}{k^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ est convergente, comme série de Riemann d'exposant $2>1$. Comme $x>0$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que la série $\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x}\right)$ est convergente, et ce pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

On pose alors, pour tout x de $[0\,;+\infty[$: $\displaystyle S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$.

5. a. Comme on l'a vu : lorsque $x=0$, $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x}=0$ pour tout $k\geqslant 1$, donc $S(0)=0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} = 1-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$

donc $\displaystyle S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1.$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1}=2\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\Big)$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$ est la somme des inverses de tous les entiers impairs compris entre 3 et $2n+1$: on peut donc l'écrire comme la différence de la somme de tous les inverses des entiers de 2 à $2n+1$, et de la somme de tous les inverses des entiers pairs compris entre 2 et $2n$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\Big)=2\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}\Big)=2\Big(1-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}\Big),$$

qu'on peut continer à écrire :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\overset{[j=n-k]}{=}2-\frac{2}{2n+1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n+j}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

On a bien sûr $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}2-\frac{2}{2n+1}=2-0=2$; quand au terme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}$: on reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x\mapsto\dfrac{2}{1+x}$, qui est bien continue sur $[0\,;1]$.
Le théorème associé à ces sommes assure alors que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{2}{1+x}\mathrm{d}x=\Big[2\ln(1+x)\Big]_0^1=2\ln(2),$$

donc : $\quad S\left(\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\ln(2).$

6. a. Pour tous réels $(x,y)\in[0\,;+\infty[^2$:

$$S(y)-S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+y}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+y-(k+x)}{(k+x)(k+y)}=(y-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

b. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}$ est un réel strictement positif (comme somme de réels qui le sont tous), donc $S(y)-S(x)$ est du même signe que $(y-x)$: cela démontre bien que la fonction S est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. Pour tout $x\in[0\,;+\infty[$ et pour tout réel h tel que $y=x+h\in[0\,;+\infty[$, on a d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right|&=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+h)}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+x)-(k+x+h)}{(k+x)^2(k+x+h)}\right|\\&=|h|\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)}\leqslant|h|\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} |h|\cdot \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$, et puisqu'une valeur absolue est toujours positive, alors ce qui précède donne, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| = 0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2},$$

ce qui prouve que la fonction S est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}.$$

L'énoncé admet que S' est également continue sur $[0\,;+\infty[$, donc que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

7. a. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$S(x+1)-S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j+x}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{n+1+x} = \frac{1}{x+1}.$$

b. On rédige proprement mais rapidement la récurrence qui permet alors de montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: on a vu que $S(1) = 1$, et $\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

On sait d'après la question précédente, que :

$S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1} \overset{H.R.}{=} \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurence.

c. Il s'agit ici de passer de l'équivalence de suites : $S(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ lorsque la variable entière n tend vers $+\infty$, obtenue à la question 2, à une équivalence de fonctions de la variable réelle, ce qui n'est pas forcément évident.

Le lien entre les deux peut se faire via la partie entière : pour tout $x > 1$, on a $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$; comme la fonction S est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\forall x > 1,\quad S(\lfloor x\rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x\rfloor + 1) \iff S(\lfloor x\rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x\rfloor) + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1},$$

d'après la relation obtenue en 7.a.

Or on sait d'après 2. que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(\lfloor x\rfloor)} = 1$, et en divisant tous les membres par $\ln(\lfloor x\rfloor) > 0$ (puisque $x > 1$), on obtient :

$$\frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(\lfloor x\rfloor)} \leqslant \frac{S(x)}{\ln(\lfloor x\rfloor)} \leqslant \frac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(\lfloor x\rfloor)} + \frac{1}{(\lfloor x\rfloor + 1)\cdot\ln(\lfloor x\rfloor)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\lfloor x\rfloor+1)\cdot\ln(\lfloor x\rfloor)} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{\ln(\lfloor x\rfloor)} = 1$, donc que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x\rfloor)$.

Si l'on veut tout écrire proprement, il reste à dire que :

$\forall x > 1,\ \lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 \iff x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x \Longrightarrow \ln(x) < \ln(\lfloor x\rfloor) \leqslant \ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ (par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$) pour voir que $\ln(\lfloor x\rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, et donc en effet :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

8. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\cdot(1-0) - \sum_{k=1}^n \Big[\ln(k+x)\Big]_0^1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \cancel{\ln(1)} = u_n.$$

b. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n = \int_0^1 \left(S(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\mathrm{d}x.$$

Cela s'écrit encore : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\mathrm{d}x$, où : pour tout x de $[0\,;1]$ et pour tout entier $k \geqslant n+1$, $0 \leqslant \dfrac{x}{k(k+x)} \leqslant \dfrac{x}{k^2}$.

Le passage à la somme lorsque k varie de $n+1$ à $+\infty$ est possible car toutes les séries convergent : on utilise aussi la positivité et la croissance de l'intégrale, puisque les fonctions (de la variable x) concernées sont continues et positives sur $[0\,;1]$, avec $0 < 1$; on obtient ainsi :

$$0 \leqslant \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}\mathrm{d}x \leqslant \Bigg(\underbrace{\int_0^1 x\mathrm{d}x}_{=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}}\Bigg)\cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \text{ soit : } 0 \leqslant \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

c. La somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'ordre n d'une série de Riemann convergente : par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0$ et le théorème d'encadrement s'applique à la double inégalité obtenue à la question précédente, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n\right) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x,$$

Et donc en effet, par unicité de la limite : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \gamma.$

PARTIE C : Application en probabilité.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$.

9. La fonction f est positive sur $]-\infty\,;1[$ comme fonction nulle, et sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de deux termes toujours positifs.
La fonction f est continue sur $]-\infty\,;1[$ comme fonction constante, et sur $]1\,;+\infty[$ comme fonction puissance (négative), donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf (peut-être) en 1.
Enfin : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge comme intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$, et vaut : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{A} + 1 = 1$. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;1[$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, ce qui achève de démontrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de densité f.

10. **a.** La fonction de répartition F_X de X est définie par : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Il est clair que pour tout $x < 1$, $F_X(x) = 0$ (f est nulle sur $]-\infty\,;x] \subset]-\infty\,;1[$), et pour tout $x \geqslant 1$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\ \mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x^2}$, par un calcul semblable à celui qui a été fait à la question 9.

$$\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

b. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente. Comme f est nulle sur $]-\infty\,;1[$ et positive sur $[1\,;+\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Cette intégrale de Riemann d'exposant 1 est divergente : on en conclut que la variable aléatoire x n'admet pas d'espérance.

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

11. **a.** Pour tout réel x de $[0\,;1[$: l'événement $[Y \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si la partie fractionnaire Y de X, qui est par définition un réel de $[0\,;1[$, est plus précisément compris entre 0 et x : cela signifie que X, qui est à valeurs dans $[1\,;+\infty[$ a priori, appartient plus précisément à un intervalle du type $[k\,;k+x]$, où k qui représente alors la partie entière de X, peut-être n'importe quel entier de $\mathbb{N}^*$.

En clair : $\displaystyle[Y \leqslant x] = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[k \leqslant X \leqslant k+x]$; comme $[k\,;k+x] \subset [k\,;k+1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, cette union est disjointe, et donc par σ-additivité, et pour tout x de $[0\,;1[$:

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(F_X(k+x) - F_X(k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{k+x} - 1 + \frac{1}{k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(x)$$

b. La variable aléatoire Y est, en tant que partie fractionnaire, à valeurs dans $[0\,;1[$, donc on conclut sans calcul supplémentaire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

c. La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue, sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;+\infty[$ comme fonction constante.
La fonction S est continue car dérivable, sur $[0\,;+\infty[$, donc F_Y est continue sur $]0\,;1[$ et :
$\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = S(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x)$, ainsi que $\lim\limits_{x\to 1^-} F_Y(x) = S(1) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} F_Y(x)$.
La fonction F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1.
On en déduit que Y est une variable à densité, et qu'une densité f_Y de Y est obtenue par dérivation de F_Y, sauf en 0 et en 1 où on choisit des valeurs arbitraires positives, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ S'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

12. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente. Comme f_Y est nulle en-dehors de $[0\,;1]$ et positive sur ce dernier intervalle, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_0^1 xS'(x)\mathrm{d}x$. La fonction S' est continue sur $[0\,;1]$ donc cette intégrale n'est pas impropre et est bien définie et Y admet une espérance. Pour la calculer, on peut réaliser une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & &\longrightarrow & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= S'(x) & &\longrightarrow & v(x) &= S(x) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, donc :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 xS'(x)\mathrm{d}x = \Big[xS(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = S(1) - 0 - \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = 1 - \gamma,$$

d'après les résultats obtenus précédemment (questions 5.a. et 8.c).

PROBLÈME 2

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Avec $P = 1$, polynôme constant : $P' = 0_{\mathbb{R}_n[X]} = P''$, donc $\varphi_n(1) = X$.
Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(X^i) &= X^{i+1} - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)\cdot iX^{i-1} + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2\cdot i(i-1)X^{i-2}\\
&= X^{i+1} - \frac{i(2n-1)}{n^2}X^{i+1} + \frac{i(2n-2)}{n^2}X^i + \frac{i}{n^2}X^{i-1} + \frac{i(i-1)}{n^2}(X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1})\\
&= \frac{n^2-2ni+i+i^2-i}{n^2}X^{i+1} + \frac{2ni-2i-2i^2+2i}{n^2}X^i + \frac{i+i^2-i}{n^2}X^{i-1}\\
&= \frac{n^2-2ni+i^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2ni-2i^2}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}\\
&= \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}.
\end{aligned}$$

b. La dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ étant linéaire, on démontre rapidement que φ_n est linéaire : pour tous (P, Q) de $(\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout réel λ :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\lambda\cdot P+Q) &= X(\lambda\cdot P+Q) - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)(\lambda\cdot P+Q)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\lambda\cdot P+Q)''\\
&= \lambda\cdot P + Q - \lambda\cdot\frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)Q'\\
&\qquad + \lambda\cdot\frac{1}{n^2}X(X-1)^2P'' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2Q''\\
&= \lambda\cdot\Big(XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''\Big)\\
&\qquad + \Big(XQ - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)Q' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2Q''\Big)\\
&= \lambda\cdot\varphi_n(P) + \varphi_n(Q),
\end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Les calculs de la question a. montrent aussi que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $\varphi_n(X^i)$ appartient encore à $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\varphi_n(X^n) = X^{n-1}$ (on remplace i par n dans la formule général de a.), on peut donc conclure que les images par φ_n de tous les éléments de la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, appartient encore à $\mathbb{R}_n[X]$.
L'application linéaire φ_n est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathscr{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$).

2. Cas $n = 2$:

a. La formule obtenue en 1.a. avec $n = 2$ donne :

$$\varphi_2(X^0) = X, \quad \varphi_2(X^1) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^1 + \frac{1}{4}X^0, \quad \varphi_2(X^2) = 0 + 0 + X = X,$$

donc la matrice de l'application φ_2 dans la base $\mathscr{B}_2$ est bien : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0\\ 1 & 1/2 & 1\\ 0 & 1/4 & 0\end{pmatrix}$.

b. On cherche ici les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda \cdot I_3$ est non-inversible.

$$A_2 - \lambda \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & 1/4 + (1/2)\lambda - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \\ 0 & 1/4 + (1/2)\lambda - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 1/4 L_3 - (1/4+(1/2)\lambda - \lambda^2) L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} = G_2$$

où $Q(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda + \lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2\right)$.

On vérifie rapidement que les racines du trinôme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda - \lambda^2$ sont $-\frac{1}{2}$ et 1 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, donc les racines de Q sont $-\frac{1}{2}, 0, 1$ et ce sont bien, d'après la réduite de Gauss obtenue, les seules valeurs de λ pour lesquelles $A_2 - \lambda \cdot I_3$ est non-inversible, donc :

$$\mathrm{Sp}(A_2) = \left\{ -\tfrac{1}{2}, 0, 1 \right\}.$$

On calcule ensuite les sous-espaces propres de A_2 en résolvant, pour chacune des valeurs propres de cette matrice, le système : $A_2 X = \lambda \cdot X \iff (A_2 - \lambda \cdot I_3)X = 0_{3,1}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, qui est aussi équivalent à $G_2 X = 0_{3,1}$ en reprenant la réduite de Gauss de $A_2 - \lambda \cdot I_3$.

- Pour $\lambda = 0$:

$$A_2 X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc : $\quad E_0(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$

- Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$(A_2 + \tfrac{1}{2} \cdot I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -y - z = z \end{cases}$$

Donc : $\quad E_{\frac{-1}{2}}(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

- Pour $\lambda = 1$:

$$(A_2 - I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - \frac{1}{2}y + z & = 0 \\ \frac{1}{4}y - z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 4z \\ x = \frac{1}{2}y - z = z \end{cases}$$

Donc : $\quad E_1(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

c. Le spectre de l'endomorphisme φ_2 est celui de sa matrice A_2 : $\mathrm{Sp}(\varphi_2) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$ et les sous-espaces propres de φ_2 sont :

$$E_0(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(-X^2+1), \quad E_{\frac{-1}{2}}(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(X^2-2X+1) = \mathrm{Vect}\big((X-1)^2\big), \quad E_1(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(X^2+4X+1).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\varphi_n\big((X-1)^n\big) &= X(X-1)^n - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)\cdot n(X-1)^{n-1} \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2\cdot n(n-1)(X-1)^{n-2} \\ &= X(X-1)^n - \frac{2n-1}{n}X(X-1)^n - \frac{1}{n}(X-1)^n + \frac{n-1}{n}X(X-1)^n \\ &= -\frac{1}{n}(X-1)^n\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(X-1)^n$ est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\dfrac{1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En reprenant la formule obtenue en 1.a. : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\big(\varphi_n(X^i)\big)(1) = \frac{(n-i)^2}{n^2} + \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{i^2}{n^2} = \frac{n^2 - 2ni + i^2 + 2ni - 2i^2 + i^2}{n^2} = 1,$$

et pour $i = 0$, $\varphi_n(X^0) = X$ donc $\big(\varphi_n(1)\big)(1) = 1$ aussi.

b. Comme $\varphi_n(X^i)$ est un polynôme, $\big(\varphi_n(X^i)\big)(1)$ est égal à la somme des coefficients de celui-ci, qui est aussi égal à la somme des éléments de la $(i+1)$-ième colonne de la matrice A_n : elle vaut 1 d'après ce qui précède.

c. D'après ce qui précède, la somme des éléments de chaque ligne de la transposée ${}^{\mathrm{t}}A_n$ est égale à 1 : cela implique que 1 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}A_n$, de vecteur propre associé $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Or on sait que A_n et sa transposée ont les mêmes valeurs propres, donc 1 est valeur propre de A_n, et donc de φ_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2\varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) &= (n+1)^2\Big(X(X-1)P - \frac{1}{(n+1)^2}\big((2n+1)X+1\big)(X-1)\big(P+(X-1)P'\big) \\ &\qquad + \frac{1}{(n+1)^2}X(X-1)^2\big(2P'+(X-1)P''\big)\Big) \\ &= (X-1)\Big((n+1)^2XP - \big((2n+1)X+1\big)P - \big((2n+1)X+1\big)(X-1)P' \\ &\qquad + 2X(X-1)P' + X(X-1)^2P''\Big) \\ &= (X-1)\Big(n^2XP - P - \big((2n+1)X+1-2X\big)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\Big) \\ &= (X-1)\Big(n^2XP - \big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\Big) \\ &= (X-1)\big(n^2\varphi_n(P) - P\big).\end{aligned}$$

b. Si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ, alors $\varphi_n(P) = \lambda \cdot P$ et la relation précédente se réécrit :

$$(n+1)^2\varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)(n^2\lambda - 1)P \iff \varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2} \cdot (X-1)P$$

où puisque P est non nul comme vecteur propre, alors $(X-1)P$ est également non nul, et est un vecteur propre de φ_{n+1} pour la valeur propre $\dfrac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}$.

6. a. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{\dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}\ ;\ j \in [\![0\,;n]\!]\right\}$", est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: l'application φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$, espace vectoriel de dimension 2, dont on sait d'après 3. et 4.c., que -1 et 1 sont valeurs propres : d'après le théorème spectral, φ_1 ne peut pas avoir d'autre valeur propre et $\mathrm{Sp}(\varphi_1) = \{-1\,;1\}$.

Or pour $n = 1$, $\left\{\dfrac{-1 + j(j+1)}{1^2}\,;|j \in [\![0\,;1]\!]\right\} = \left\{\dfrac{-1+0}{1}, \dfrac{-1+2}{1}\right\} = \{-1, 1\}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

D'après la question 5.b., et au vu de l'hypthèse de récurrence, on sait que pour tout j de $[\![0\,;n]\!]$, la valeur propre $\lambda = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$ de φ_n donne pour φ_{n+1} la valeur propre :

$$\frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2} = \frac{-n + j(j+1) - 1}{(n+1)^2} = \frac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2}.$$

Il reste donc à vérifier que pour $j = n+1$, $\dfrac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)(-1+n+2)}{(n+1)^2} = 1$ appartient aussi au spectre de φ_{n+1} : c'est bien le cas d'après la question 4.c.

Ainsi, les nombres $\dfrac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2}$ sont, pour tout $j \in [\![0\,;n+1]\!]$, tous valeurs propres de φ_{n+1}.

Comme la fonction $j \mapsto \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$ est clairement strictement croissante sur $\mathbb{N}$, on a donc trouvé $n+2$ valeurs propres distinctes pour φ_{n+1}, qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, espace de dimension $n+2$: d'après le théorème spectral, φ_{n+1} n'a pas d'autres valeurs propres et $\mathrm{Sp}(\varphi_{n+1}) = \left\{\dfrac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2}\ ;\ j \in [\![0\,;n+1]\!]\right\}$, et par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'après le théorème de récurrence.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et possède $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres distinctes : cet endomorphisme vérifie donc le critère suffisant qui assure qu'il est diagonalisable, et que tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 chacun.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Pi_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i \in \mathbb{R}_n[X]$.

a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'après 1.a. et par linéarité de φ_n :

$$\varphi_n(\Pi_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n(X^i)$$

$$= X + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n!)^2}{(i!)^2\big((n-i)!\big)^2} \cdot \Big(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\Big) + X^{n-1}$$

$$= X + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\big((n-1)!\big)^2}{(i!)^2\big((n-i-1)\big)^2} X^{i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\big((n-1)!\big)^2}{i!(i-1)!(n-i)!(n-i-1)!} X^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\big((n-1)!\big)^2}{\big((i-1)!\big)^2\big((n-i)!\big)^2} X^{i-1} + X^{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2 X^{i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}\binom{n-1}{i-1} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}^2 X^{i-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1}^2 X^j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}\binom{n-1}{i-1} X^i + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 X^k$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i-1}^2 + 2\binom{n-1}{i}\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}^2\right) X^i + X^n + 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right)^2 X^i + X^n + 1 = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i + X^n + 1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i$$

d'après la formule de Pascal ; on a bien démontré que : $\varphi(\Pi_n) = \Pi_n$.

b. Le résultat précédent exprime que Π_n, qui est non nul, est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre 1 : comme le sous-espace propre associé est de dimension 1, on en déduit que :

$$E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(\Pi_n).$$

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout j de $[\![0\,;n]\!]$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

a. Comme φ_n est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 : on en déduit que pour tout j de $[\![0\,;n]\!]$, $E_{\lambda_j}(\varphi_n) = \text{Vect}(R_j)$, et que $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres pour φ_n. Ainsi pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\quad P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cdot R_j$.

Comme φ_n est linéaire, on en déduit que : $\quad \varphi_n(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cdot \varphi_n(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cdot \lambda_j \cdot R_j$

par définition des R_j ; plus généralement, φ_n^k est aussi linéaire comme composée d'applications qui le sont, et puisque (par récurrence immédiate), on a $\varphi_n^k(R_j) = (\lambda_j)^k \cdot R_j$, alors en effet :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cdot \varphi_n^k(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cdot (\lambda_j)^k \cdot R_j$$

b. Pour tout j de $[\![0\,;n-1]\!]$: $\quad 0 \leqslant j(j+1) \leqslant n(n-1) \Longrightarrow -n + j(j+1) \leqslant n(n-2)$,

donc $-1 \leqslant -\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{-n+j(j+1)}{n^2} \leqslant \dfrac{n-2}{n} < 1$, et la première inégalité est même stricte dès que $n \geqslant 2$. On en déduit que pour tout j de $[\![0\,;n-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} (\lambda_j)^k = 0$, et donc au sens de la convergence coefficient par coefficient des polynômes définie au début de l'énoncé, on peut dire que : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \cdot (\lambda_j)^k \cdot R_j = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Il reste à voir que $\lambda_n = 1$, donc que R_n est un multiple scalaire de Π_n, et que $\alpha_n \cdot (\lambda_n)^k \cdot R_n = \alpha_n \cdot R_n$ s'écrit sous la forme $\alpha \cdot \Pi_n$, où α ne dépend pas de k. Avec ces notations, on en déduit bien que la suite de polynômes $\big(\varphi_n^k(P)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha \cdot \Pi_n$.

PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

9. Au vu des conditions de l'expérience : après un échange, on a forcément retiré une boule rouge de l'urne rouge, et une boule bleue de l'urne bleue, et on les échange. Il y a donc forcément $n-1$ boules rouges dans l'urne rouge après le premier échange, et Z_1 est la variable certaine égale à $n-1$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$: l'événement $[Z_{k+1} = i]$ est réalisé si et seulement si après $(k+1)$ échanges, l'urne rouge contient i boules rouges.
Cela se produit dans trois situations possibles, en fonction de l'état des urnes après les k premiers échanges et avant le suivant :

- Soit l'urne rouge contenait $i-1$ boules rouges après k échanges, et on a récupéré une boule rouge dans l'urne bleue et une bleue dans l'urne rouge, qu'on échange. On appelle cet événement : $[Z_k = i-1] \cap R_B \cap B_R$
- Soit l'urne rouge contenait déjà i boules rouges après k échanges, et à l'échange suivant on a soit échangé deux boules rouges (prise chacune dans les deux urnes), soit échangé deux boules bleues, prises chacune dans les deux urnes. On note cet événement $[Z_k = i] \cap \big((R_R \cap R_B) \cup (B_R \cap B_B)\big)$.
- Soit l'urne rouge contenait $i+1$ boules rouges après k échanges, et à l'échange suivant on a retiré une boule rouge de l'urne rouge, qu'on échange avec une boule bleue retirée de l'urne bleue : on note cet événement $[Z_k = i+1] \cap R_R \cap B_B$.

Ainsi :

$$[Z_{k+1} = i] = \big([Z_k = i-1] \cap R_B \cap B_R\big) \cup \Big([Z_k = i] \cap \big((R_R \cap R_B) \cup (B_R \cap B_B)\big)\Big) \\ \cup \big([Z_k = i+1] \cap R_R \cap B_B\big)$$

L'unon est disjointe, et par indépendance des choix des boules dans chacune des urnes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) &= \mathbb{P}(Z_k = i-1) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i-1]}(R_B) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i-1]}(B_R) \\ &\quad + \mathbb{P}(Z_k = i) \times \big(\mathbb{P}_{[Z_k=i]}(R_R) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(R_B) + \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(B_R) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(B_B)\big) \\ &\quad + \mathbb{P}(Z_k = i+1) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i+1]}(R_R) \times \mathbb{P}_{[Z_k=i+1]}(B_B) \\ &= \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\mathbb{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1)\end{aligned}$$

11. a. Le script suivant simule l'expérience aléatoire étudiée dans cette partie. Remarquons que, comme l'énoncé le rappelle, la variable `R` qui correspond au nombre de boules rouges dans l'urne rouge, est aussi égale de façon symétrique, au nombre de boules bleues dans l'urne bleue. Ainsi, l'événement `[aleaR <= (R/n)]` correspond au fait de tirer une boule rouge dans l'urne, et `[AleaB <= (R/n)]` correspond au fait de tirer une boule bleue dans l'urne bleue.

```
function Z = simule(n,k)
    R = n
    for j = 1:k
        aleaR = rand()
        aleaB = rand()
        if AleaR <= (R/n) & AleaB <= (R/n) then
            R = R-1
        elseif AleaR > (R/n) & AleaB > (R/n) then
            R = R+1
        end
    end
    Z = R
endfunction
```

b. L'estimateur naturel (et sans biais) de l'espérance de Z_k, est la moyenne empirique : on construit un échantillon de 10000 simulations de cette variable aléatoire, dont on calcule ensuite la moyenne, en en faisant d'abord la somme, puis en divisant par l'effectif.

```
function E = esperance(n,k)
    S = 0
    for i=1:10000
        S = S + simule(n,k)
    end
    E = S/10000
endfunction
```

c. On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n. Le graphe obtenu pour $n=10$, $n=20$ et $n=30$ suggère que l'espérance de Z_k tend vers $\frac{n}{2}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

a. La variable aléatoire Δ_k prend pour valeur l'évolution du nombre de boules rouges dans l'urne rouge : comme on l'a vu, l'urne rouge peut soit récupérer une boule rouge, soit en perdre une, soit garder un nombre stable de boules rouges, donc : $\Delta_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

b. On calcule $\mathbb{P}(\Delta_k = -1)$ avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\big([Z_k = i]\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\mathbb{P}(\Delta_k=-1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(\Delta_k=-1)\cdot\mathbb{P}(Z_k=i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(R_R\cap B_B)\cdot\mathbb{P}(Z_k=i) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\mathbb{P}(Z_k=i)$$

et de même :

$$\mathbb{P}(\Delta_k=1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(\Delta_k=1)\cdot\mathbb{P}(Z_k=i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(B_R\cap R_B)\cdot\mathbb{P}(Z_k=i) = \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\mathbb{P}(Z_k=i)$$

c. Vu l'univers-image de Δ_k, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta_k) &= (-1)\cdot\mathbb{P}(\Delta_k=-1) + 0\cdot\mathbb{P}(\Delta_k=0) + 1\cdot\mathbb{P}(\Delta_k=1) = -\mathbb{P}(\Delta_k=-1)+\mathbb{P}(\Delta_k=1)\\
&= -\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\mathbb{P}(Z_k=i) + \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^2\mathbb{P}(Z_k=i) = \sum_{i=0}^{n}\left(-\frac{i^2}{n^2}+1-2\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)\mathbb{P}(Z_k=i)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(Z_k=i) - \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(Z_k=i) = 1-\frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k).
\end{aligned}$$

La linéarité de l'espérance donne aussi : $\mathbb{E}(\Delta_k) = \mathbb{E}(Z_{k+1}-Z_k) = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - \mathbb{E}(Z_k)$, donc :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{E}(Z_{k+1})-\mathbb{E}(Z_k) = 1-\frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k) \iff \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \left(1-\frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(Z_k)+1.$$

d. La suite $\big(\mathbb{E}(Z_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Pour calculer explicitement $\mathbb{E}(Z_k)$, on commence par résoudre l'équation d'inconnue ℓ :

$$\ell = \left(1-\frac{2}{n}\right)\ell+1 \iff \frac{2}{n}\ell = 1 \iff \ell = \frac{n}{2}$$

Alors, en soustrayant membre à membre les deux relations :

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \left(1-\frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(Z_k)+1$ et $\ell = \left(1-\frac{2}{n}\right)\ell+1$, on obtient :

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z_{k+1})-\ell = \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\big(\mathbb{E}(Z_k)-\ell\big)$, ce qui prouve que la suite $\big(\mathbb{E}(Z_k)-\ell\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1-\frac{2}{n}$, et de premier terme $\mathbb{E}(Z_0)-\ell = n-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. On en déduit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{E}(Z_k)-\ell = \frac{n}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^k \iff \mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\frac{n}{2}.$$

Comme clairement, $0 < 1 - \dfrac{2}{n} < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^k = 0$ et par opérations sur les limites :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{2}.$$

Ce résultat confirme ce qui a été conjecturé à la question 11.c., et signifie qu'en moyenne, à force de faire des échanges, les boules rouges et bleues se retrouveront équitablement réparties entre les deux urnes.

13. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\quad Q_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i)X^i.$

a. La question 1.a. et la linéarité de φ_n donnent, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(Q_k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i) \cdot \varphi_n(X^i) \\
&= \mathbb{P}(Z_k = 0) + \sum_{i=1}^{\cancel{n}\ n-1} \left(\frac{n-i}{n}\right)^2 X^{i+1}\mathbb{P}(Z_k = i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i \mathbb{P}(Z_k = i) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\mathbb{P}(Z_k = i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-(j-1)}{n}\right)^2 X^j \mathbb{P}(Z_k = j-1) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right) X^i \mathbb{P}(Z_k = i) \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)^2}{n^2} X^j \mathbb{P}(Z_k = j+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\mathbb{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1) \right) X^i.
\end{aligned}$$

Le terme pour $j = 0$ de la premier somme, et celui pour $j = n$ de la dernière somme sont en effet nuls, donc on peut les y intégrer, ce qui permet de rassembler les trois sommes en une seule où l'indice varie de 0 à n.
On reconnaît dans le coefficient de degré i obtenu, la formule vue à la question 10., ce qui permet de conclure :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n(Q_k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_{k+1} = i)X^i = Q_{k+1}.$$

b. De la relation précédente, on déduit par récurrence immédiate : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ Q_k = \varphi_n^k(Q_0)$.
Le résultat de la question 8.a. s'applique alors (il ne dépend pas du polynôme P), qui assure qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}} = \big(\varphi_n^k(Q_0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, converge vers $\alpha \cdot \Pi_n$.

14. a) La convergence de la suite de polynômes $\lim\limits_{k\to+\infty} Q_k = \alpha \cdot \Pi_n$ s'entend, par définition, coefficient par coefficient, ce qui donne bien :

$$\forall i \in [\![0\,;n]\!], \quad \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.$$

b) L'énoncé admettait la formule : $\quad \forall (a,b,m) \in \mathbb{N}^3, \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$

(Pour la culture, il s'agit de la *formule de Vandermonde*).

Puisque Z_k est à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$, on sait que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i) = 1$. Cette égalité est conservée par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$, et donne alors :

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha\binom{n}{i}^2=1 \iff \alpha\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=1 \iff \alpha\binom{n+n}{n}=1 \iff \alpha=\frac{1}{\dbinom{2n}{n}}$$

On a utilisé la symétrie des coefficients binomiaux : $\dbinom{n}{i}=\dbinom{n}{n-i}$, et la formule de Vandermonde admise ci-dessus, avec $a,\ b,\ m$ tous les trois égaux à n.

c) Le résultat de la question 14.a. exprime déjà que la suite de variables aléatoires finies $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, converge en loi vers une variable aléatoire Z telle que : $\forall i\in[\![0\,;n]\!],\ \mathbb{P}(Z=i)=\dfrac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$, et le travail effectué en 14.b. assure que la somme des probabilités de la loi de Z vaut 1.

Comme Z est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{i=\cancel{0}\ 1}^{n} i\cdot\mathbb{P}(Z=i)=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{i\binom{n}{i}}\binom{n}{n-i}=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{n\binom{n-1}{i-1}}_{\text{d'après la formule sans nom}}\binom{n}{n-i}$$

$$=\frac{n}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\binom{n}{n-1-j}=\frac{n\dbinom{2n-1}{n-1}}{\dbinom{2n}{n}}=\frac{n(2n-1)!(n!)^2}{(n-1)!n!(2n)!}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}.$$

On remarque en particulier que $\mathbb{E}(Z)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Z_k)$, ce qu'on aurait pu vérifier directement en fait, en écrivant :

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\mathbb{P}(Z=i)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\left(\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(Z_k=i)\right)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} i\cdot\mathbb{P}(Z_k=i)=\lim_{k\to+\infty}\mathbb{E}(Z_k)=\frac{n}{2},$$

d'après 12.d.

On a donc donné ici deux preuves possible de ce résultat limite, sachant bien sûr qu'une seule des deux preuves suffit !

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★