MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2022

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0\,;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérée dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = q^k p = (1 - p)^k p.$$

PARTIE A :

1. Soit donc $Y = X + 1$: comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X + 1 = k) = \mathbb{P}(X = k - 1) = (1 - p)^{k-1} p \qquad \text{puisque } k - 1 \in \mathbb{N}.$$

On reconnaît ainsi que Y suit la loi géométrique de paramètre p.

2. D'après le cours sur la loi géométrique, Y admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(Y) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance assurent alors que $X = Y - 1$ admet elle aussi une espérance et une variance, qui valent :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

3. La fonction `Scilab` qui suit fait partie des scripts au programme, à savoir retrouver le moment venu : le but est de simuler le temps d'attente d'un premier succès de probabilité p, Y étant alors le nombre d'essais réalisés.

```
function X = simule_X(p)
    Y = 1                // on fait toujours au moins un essai
    while rand() > p     // cet événement est de probabilité 1-p
        Y = Y + 1        // tant qu'on a échec, on continue
    end
    X = Y - 1            // on a simulé Y, on en déduit X = Y - 1
```

PARTIE B :

4. La fonction suivante simule n parties : pour chacune d'entre elles, l'énoncé suppose que le joueur mise toute sa fortune, représentée par les variables aléatoirs successives $Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.
À chaque partie, la variable `Z` représente donc le nombre de jetons introduits dans la machine ; et pour chaque jeton introduit, la valeur rendue par une nouvelle simulation de la variable `X` du script précédent, correspond au nombre (potentiellement nul) de jetons renvoyés en échange. On comprend ainsi la présence d'une double boucle `for` :

```
function Z = simule_Z(n,p)
    Z = 1
    for i = 1 : n
        s = 0        // à chaque nouvelle partie le joueur joue tous ses jetons
        for j = 1 : Z
            s = s + simule_X(p) // chaque nouvelle fournée de jetons rendus
        end                     // s'ajoute à ceux déjà possédés dans la partie
        Z = s        // le nombre final de jetons définit la nouvelle valeur de Z
    end
endfunction
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. a) À l'instant 0, on sait que le joueur dispose de façon certaine de $Z_0 = 1$ jeton, donc $u_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$.
Après la première activation de la machine : le joueur a joué son unique jeton, il peut donc perdre d'emblée si la machine ne lui renvoie aucun jeton ; c'est bien possible car le nombre de jetons rendus pour un seul jeton joué suit la loi de X, de sorte que :

$$u_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = q^0 p = p.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$: il est clair que si après n parties, le joueur n'a plus de jeton à jouer, alors il n'en a plus jamais par la suite, et notamment il n'en a plus pour jouer la $n+1$-ième partie.
Autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[Z_n = 0]$ *implique* l'événement $[Z_{n+1} = 0]$.
Cette relation se traduit par l'inclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$

Par croissance de la probabilité, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante ; mais c'est une suite de probabilités ! Elle est donc aussi bornée par 0 et 1, donc majorée en particulier.
Le théorème de limite monotone assure alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet une limite $\ell \in [0\,;1]$.

6. L'événement R est réalisé si et seulement si à une certaine partie, la fortune du joueur devient nulle (et le reste ensuite), donc si et seulement si l'un au moins des événements $[Z_n = 0]$ est réalisé, soit :

$$R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0].$$

Or comme on l'a vu, la suite d'événements $\big([Z_n = 0]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante pour l'inclusion* : la propriété de limite monotone pour les probabilités assure alors que

$$\mathbb{P}(R) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n \iff \mathbb{P}(R) = \ell.$$

7. a) Pour tout entier k de $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2=0)$ est la probabilité qu'ayant récupéré k jetons après la première partie, ceux-ci soient tous joués ensuite sans aucun gain pour aucun d'entre eux. En appelant comme l'énoncé, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ les gains aléatoires pour chacun des k jetons joués à la deuxième partie, on peut donc écrire :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2=0) = \mathbb{P}\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\cap\cdots\cap[X_k=0]\big).$$

Le conditionnement par l'événement $[Z_1=k]$ indique en effet uniquement le nombre de jetons joués à la deuxième partie : les comportements de la machine pour ces k jetons sont mutuellement indépendants, et indépendants de ce qui s'est passé avant ; comme les X_i suivent tous la même loi que X, on a donc :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\times\mathbb{P}(X_2=0)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_k=0) = \big(\mathbb{P}(X=0)\big)^k = p^k = (u_1)^k.$$

L'énoncé admettait ensuite que plus généralement, $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1}=0) = (u_n)^k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\mathbb{N}$.

b) On est donc incité ici à écrire la **formule des probabilités totales** pour le calcul de $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0)$, avec le système complet d'événements $\big([Z_1=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1}=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_1=k)\times\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1}=0)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_1=k)(u_n)^k \qquad \text{d'après a)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p(u_n)^k = p\sum_{k=0}^{+\infty}(qu_n)^k \quad Z_1 \text{ suit la même loi que } X\\
&= p\cdot\frac{1}{1-qu_n} = \frac{p}{1-qu_n}. \qquad \text{somme d'une série géométrique avec } 0\leqslant qu_n<1
\end{aligned}$$

8. a) On sait déjà d'après **5.** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on dispose désormais de la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{p}{1-qu_n}$; le principe d'unicité de la limite assure alors, par passage à la limite dans cette relation quand n tend vers $+\infty$, que :

$$\ell = \frac{p}{1-q\ell} \iff \ell(1-q\ell) = p \iff 0 = q\ell^2-\ell+p.$$

Or si on développe la forme donnée par l'énoncé :

$$(\ell-1)(q\ell-p) = q\ell^2-p\ell-q\ell+p = q\ell^2-(p+q)\ell+p = q\ell^2-\ell+p \quad \text{puisque } p+q=1.$$

On a donc bien prouvé ainsi que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\ell-p)=0$.

b) D'après ce qui précède et la règle du produit nul :

$$\text{soit } \ell-1=0 \iff \ell=1, \text{ soit } q\ell-p=0 \iff \ell=\frac{p}{q}.$$

Si $p\geqslant\dfrac{1}{2}$, alors logiquement $q=1-p\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant p$, donc $\dfrac{p}{q}\geqslant 1$.
Dans l'équation-produit précédente, la seule solution est alors $\ell=1$, et comme $\mathbb{P}(R)=\ell$ d'après 6., on peut conclure que :

$$\text{si } p\geqslant\frac{1}{2}, \text{ alors } \mathbb{P}(R)=1.$$

c) On suppose désormais que $p<\dfrac{1}{2}$. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n\in\left[0\,;\dfrac{p}{q}\right]$", est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Puisque $u_0=0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

On a supposé (H.R.) : $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{p}{q}$, donc par opérations successives sur les inégalités :

$$0 \geqslant -qu_n \geqslant -p \iff 1 \geqslant 1-qu_n \geqslant 1-p = q > 0 \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{1-qu_n} \leqslant \frac{1}{q} \Longrightarrow 0 < p \leqslant \frac{p}{1-qu_n} = u_{n+1} \leqslant \frac{p}{q}$$

On a donc bien prouvé que $u_{n+1} \in \left[0\,;\dfrac{p}{q}\right]$, et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{p}{q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a aussi $0 \leqslant \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \dfrac{p}{q}$, donc $\mathbb{P}(R) \leqslant \dfrac{p}{q} < 1$ puisque : $0 \leqslant p < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow p < \dfrac{1}{2} < 1-p = q \Longrightarrow \dfrac{p}{q} < 1$.

d) Le point de vue du casino conduit naturellement à chercher la ruine du joueur, après un temps plus ou moins long passé avec des jetons en poche, alors que l'alternative consiste à envisager le fait que le joueur puisse continuer indéfiniment à jouer, avec une probabilité non nulle.
On préférera donc s'assurer que $\mathbb{P}(R) = 1$, ce qui équivaut d'après les questions précédentes au fait de choisir $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

PARTIE C :

On suppose à présent que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

9. L'événement $[Z_n = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jeton après n activations de la machine : soit il a perdu tous ses jetons à la n-ième activation, soit il n'en avait déjà plus à une activation précédente (et il aurait alors continué à activer la machine en vain, puisque sans jeton par la suite).
Il y a donc égalité des événements $[Z_n = 0] = [T \leqslant n]$, donc égalité des probabilités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(T \leqslant n).$$

On réalise ensuite le raisonnement classique : puisque T est une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $[T \leqslant n] = [T = n] \cup [T < n] = [T = n] \cup [T \leqslant n-1]$. L'union est disjointe, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T \leqslant n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T \leqslant n-1) \iff \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \leqslant n) - \mathbb{P}(T \leqslant n-1)$$

Soit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T = n) = u_n - u_{n-1} = (1 - v_n) - (1 - v_{n-1}) = v_{n-1} - v_n$.

10. On utilise la relation précédente pour calculer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) &= \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n) = \sum_{n=1}^{N} nv_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nv_n \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)v_k - \sum_{n=1}^{N} nv_n \qquad [k = n-1] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \sum_{n=0}^{N-1} nv_n - \sum_{n=1}^{N} nv_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N \qquad \text{après télescopage.}\end{aligned}$$

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

a) La relation de récurrence obtenue en 7.b) s'écrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} \iff u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

On peut alors démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}(n)$: "$u_n = \dfrac{n}{n+1}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ On sait que $u_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$, donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{Q}(n+1)$ est encore vraie.

On sait que :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \overset{H.R.}{=} \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2},$$

donc $\mathcal{Q}(n)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Dans ce cas on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 1 - u_n = \dfrac{1}{n+1}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{N}{N+1}$.

Or on sait que la série harmonique diverge : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = +\infty$,

tandis que $N + 1 \underset{N \to +\infty}{\sim} N \Longrightarrow \displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{N}{N+1} = 1$.

On en déduit que : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) = +\infty$, et donc que T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que $p > \dfrac{1}{2}$. On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en repartant de la relation de récurrence obtenue en 7.b) :

$$w_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1 - qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qu_n}} = \frac{\frac{1 - p - qu_n}{1 - qu_n}}{\frac{p - pqu_n - pq}{q(1 - qu_n)}} = \frac{q - qu_n}{1 - qu_n} \times \frac{q(1 - qu_n)}{p(1 - q) - pqu_n}$$

$$= \frac{q^2(1 - u_n)}{p^2 - pqu_n} = \frac{q^2(1 - u_n)}{pq\left(\frac{p}{q} - u_n\right)} = \frac{q}{p} \times \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} = \frac{q}{p} w_n.$$

b) On vient donc de démontrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $\dfrac{q}{p}$ et de premier terme $w_0 = \dfrac{1 - u_0}{\frac{p}{q} - u_0} = \dfrac{q}{p}$, de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \iff 1 - u_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \times \left(\frac{p}{q} - u_n\right) \iff 1 - u_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n} - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} u_n,$$

Soit : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right) \times u_n \iff u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$.

On a alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^n \times \dfrac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$,

où puisque $p > \dfrac{1}{2}$, alors $p > \dfrac{1}{2} > q \Longrightarrow \dfrac{q}{p} < 1$, ce qui implique :

$$\frac{q}{p} > \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \iff 0 < 1 - \frac{q}{p} < 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \Longrightarrow 0 < \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} < 1,$$

et qui donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

c) Comme on vient de le revoir : puisque $p > \dfrac{1}{2}$, alors $p > q \Longrightarrow 0 \leqslant \dfrac{q}{p} < 1$, et $\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ est par conséquent le terme général d'une série géométrique convergente.

Le résultat de b) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs assurent alors que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ converge ; comme par ailleurs, $\lim\limits_{N \to +\infty} N\left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 0$ par croissances comparées (toujours du fait que $0 \leqslant \frac{q}{p} < 1$), donc par encadrement $\lim\limits_{N \to +\infty} N v_N = 0$, et alors $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n)$ existe et est finie.

Cette série à termes positifs, donc aussi absolument convergente, garantit ainsi que T admet une espérance égale à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N$.

Comme on l'a vu en b) : $\lim\limits_{N \to +\infty} N v_N = 0$, et par passage à la somme dans l'inégalité de 12.b), puis à la limite quand N tend vers $+\infty$:

$$\forall n \in N^*, \quad \sum_{n=0}^{N-1} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n \Longrightarrow \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} v_n \leqslant \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}.$$

On a bien montré ainsi : $\quad E(T) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T = n) \leqslant \dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

13. Pour maximiser l'espérance du temps passé au casino, on peut chercher à maximiser son majorant $\dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

Pour cela il faut minimiser le dénominateur $1 - \frac{q}{p}$, donc maximiser le rapport $\frac{q}{p}$.

Comme on l'a vu, ce rapport est pour $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, compris entre 0 et 1 ; or la valeur 1 est atteinte par le quotient si et seulement si $q = p \iff p = \dfrac{1}{2}$: c'est la valeur qu'on peut conseiller au casino.

EXERCICE 2

1. a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ainsi que λ et μ deux réels quelconques : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z & \lambda d + \mu t \end{pmatrix}$, donc :

$$\mathrm{tr}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = (\lambda a + \mu x) + (\lambda d + \mu t) = \lambda(a+d) + \mu(x+t) = \lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr}(N),$$

ce qui prouve que l'application tr est bien une application linéaire entre les deux espaces vectoriels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \iff a + d = 0 \iff d = -a,$$

donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Le noyau Ker(tr) possède donc une famille génératrice de trois vecteurs ; on vérifie que cette dernière est libre en considérant une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0,$$

donc la famille génératrice de Ker(tr) est aussi libre : c'est une base de ce sous-espace, et on a bien $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = 3$.

2. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}(M)$ est un réel, donc $\mathrm{tr}(M)J$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme somme de deux matrices carrées d'ordre 2.
Soient alors M, N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ, μ deux réels quelconques :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= (\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + \mathrm{tr}(\lambda \cdot M + \mu \cdot N)J \\ &= \lambda \cdot M + \mu \cdot N + \big(\lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr}(N)\big)J \quad \text{puisque tr est linéaire} \\ &= \lambda\big(M + \mathrm{tr}(M)J\big) + \mu\big(N + \mathrm{tr}(N)J\big) \\ &= \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N), \end{aligned}$$

donc $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est linéaire : c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question uniquement, l'énoncé considérait le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) On construit la matrice demandée de f dans la base $\mathcal{B}$ en calculant les images de chacun de ces vecteurs de base par f :

- $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1+0)J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (0+0)J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (0+0)J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0+1)J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

donc la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Les calculs matriciels donnent :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \end{pmatrix} = 0$$

c) De ce qui précède, on déduit que $P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. D'après le cours, on peut donc affirmer que les valeurs propres de A se situent *parmi* les racines de P. Comme sa forme factorisée le montre immédiatement, ce pôlynôme a pour seule racine 1, qui est donc la seule valeur propre *possible* de A.

On a déjà calculé $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est clairement non inversible puisqu'elle a (par exemple) deux colonnes nulles : 1 est bien valeur propre de A, est c'est finalement la seule :

$$\text{Sp}(A) = \{1\}.$$

On peut même directement calculer le rang de $A - I_4$: il est égal à 1 puisque deux de ses colonnes sont nulles, tandis que les deux colonnes non nulles sont égales.

On a donc aussi $\text{rg}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 1$, et d'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) + \text{rg}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \dim \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 4 - 1 = 3$$

Or $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ est le seul sous-espace propre de f : comme $3 < 4$, on en déduit que f n'est *pas* diagonalisable.

d) On repart ici de la relation $(A - I_4)^2 = 0$, qui sous forme développée, donne :

$$A^2 - 2A + I_4 = 0 \iff I_4 = -A^2 + 2A \iff I_4 = A(-A + 2I_4).$$

Cette relation assure alors que A est inversible, avec :

$$A^{-1} = -A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Une matrice non nulle M est vecteur propre de f pour la valeur propre 1 si et seulement si :

$$f(M) = M \iff M + \text{tr}(M)J = M \iff \text{tr}(M)J = 0 \iff \text{tr}(M) = 0 \text{ puisque } J \neq 0.$$

Ainsi donc : $\quad \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\} = \text{Ker}(\text{tr})$:
on a vu à la question 1.b) qu'il s'agissait d'un espace de dimension 3, donc 1 est bien valeur propre de f, et le sous-espace propre associé $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ est de dimension 3.

b) On calcule directement : $f(J) = J + \text{tr}(J)J = \big(1 + \text{tr}(J)\big)J$; comme $J \neq 0$, cette relation prouve que J est bien vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda = 1 + \text{tr}(J)$.

c) i. On considère dans cette sous-question, le cas où $\text{tr}(J) \neq 0$.

Dans ce cas, $\lambda = 1 + \text{tr}(J) \neq 1$ et on a donc trouvé une deuxième valeur propre pour f, avec $\dim E_{1+\text{tr}(J)}(f) \geqslant 1$. Ainsi, $\dim E_1(f) + \dim E_{1+\text{tr}(J)}(f) \geqslant 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Or d'après le théorème spectral, la somme des dimensions des sous-espaces propres de f ne dépasse pas $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$; par conséquent :

- $\dim E_1(f) + \dim E_{1+\text{tr}(J)}(f) = 4$ et l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'a pas d'autre valeurs propres que 1 et $1 + \text{tr}(J)$.
- L'endomorphisme f est diagonalisable.
- $E_1(f) = \text{Ker}(\text{tr})$ a pour base celle qui a été trouvée à la question 1.b).
- La matrice non nulle J appartient à $E_{1+\text{tr}(J)}$ qui est de dimension 1 : (J) constitue une base de ce sous-espace propre.

ii. On considère dans cette sous-question, le cas où $\text{tr}(J) = 0$. Soit λ une valeur propre de f différente de 1, et M un vecteur propre associé.

On a donc : $\quad f(M) = \lambda \cdot M \iff M + \text{tr}(M)J = \lambda M$.

Deux matrices égales ont la même trace, et comme l'application linéaire tr est linéaire, on a alors :

$$\text{tr}(M) + \text{tr}(M)\underbrace{\text{tr}(J)}_{=0} = \lambda\text{tr}(M) \iff \text{tr}(M) = \lambda\text{tr}(M) \iff (1-\lambda)\text{tr}(M) = 0.$$

Puisque $\lambda \neq 1 \iff 1 - \lambda \neq 0$, la règle du produit nul assure alors que $\text{tr}(M) = 0$. Mais cela signifie alors que M appartient à $\text{Ker}(\text{tr}) = E_1(f)$, ce qui contredit le fait qu'on a justement pris M comme vecteur propre de f associé à une valeur propre *différente* de 1.

On en conclut donc que si $\text{tr}(J) = 0$, alors f n'a pas d'autre valeur propre que 1.

iii. De ce qui précède, on déduit que si J $\neq 0$ alors f est diagonalisable, et si $\text{tr}(J) = 0$ alors f n'est pas diagonalisable, d'où la condition nécessaire et suffisante :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \text{tr}(J) \neq 0$$

5. On sait que f est bijectif (automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

- C'est le cas si $\text{tr}(J) = 0$, car alors 1 est la seule valeur propre de f.
- Si $\text{tr}(J) \neq 0$, alors f a pour valeurs propres 1 et $1 + \text{tr}(J)$, et il faut alors éviter que :

$$1 + \text{tr}(J) = 0 \iff \text{tr}(J) = -1.$$

On en déduit donc la condition nécessaire et suffisante :

$$f \text{ est bijectif} \iff \text{tr}(J) \neq -1$$

EXERCICE 3

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par :

$$\forall t\in]-\infty;1[,\quad f(t)=\begin{cases}\dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t\in]-\infty;0[\cup]0;1[,\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

1. La rédaction de cette question se fait en deux temps :

- Sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$: $1-t>0$, donc la fonction f est continue comme composée, puis quotient de fonctions bien définies et continues.
- Au point $t=0$: on sait que $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, et $\lim\limits_{t\to 0}-t=0$ donc $\ln(1-t)\underset{t\to 0}{\sim}-t$, et par conséquent $-\ln(1-t)\underset{t\to 0}{\sim}t\iff\dfrac{-\ln(1-t)}{t}\underset{t\to 0}{\sim}1$, soit :

$$\lim_{t\to 0}\frac{-\ln(1-t)}{t}=1\iff\lim_{t\to 0}f(t)=f(0),$$

  ce qui prouve que f est continue en 0.

On a ainsi démontré que la fonction f est continue sur tout l'intervalle $]-\infty;1[$.

2. a) La fonction $g:\ t\mapsto\dfrac{t}{1-t}+\ln(1-t)$ est bien définie et dérivable sur $]-\infty;1[$, avec :

$$\forall t\in]-\infty;1[,\quad g'(t)=\frac{1\cdot(1-t)-t\cdot(-1)}{(1-t)^2}+\frac{-1}{1-t}=\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t}=\frac{t}{(1-t)^2}$$

La dérivée g' est donc du signe de t : elle est strictement négative sur $]-\infty;0[$, puis strictement positive sur $]0;1[$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, puis strictement croissante sur $[0;1[$: elle admet donc un minimum en $t=0$ qui vaut $g(0)=\dfrac{0}{1-0}+\ln(1)=0$.

On peut donc conclure que : $\quad\forall t\in]-\infty;1[,\quad g(t)=\dfrac{t}{1-t}+\ln(1-t)\geqslant 0.$

b) Sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$: $1-t>0$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée, puis quotient de fonctions de référence de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction est donc en particulier dérivable sur ces deux intervalles, avec :

$$\forall t\in]-\infty;0[\cup]0;1[,\quad f'(t)=\frac{-\frac{-1}{1-t}\cdot t-\big(-\ln(1-t)\big)\cdot 1}{t^2}=\frac{\frac{t}{1-t}-\ln(1-t)}{t^2}=\frac{g(t)}{t^2}.$$

c) On a vu que pour tout $t\in]-\infty;0[\cup]0;1[$, $g(t)>0$ donc $f'(t)>0$ également. La fonction f est donc strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$: comme elle est aussi continue en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

3. a) Le développement limité suivant fait partie du cours : $\quad\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$, pour u dans un voisinage de 0.

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}-t=0$, on peut effectuer le changement de variable $u=-t$ dans le développement limité précédent, ce qui donne :

$$\ln(1-t)=-t-\frac{(-t)^2}{2}+o\big((-t)^2\big)\iff\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

b) De ce qui précède, on déduit que pour tout t dans un voisinage de 0, avec $t \neq 0$:

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} = \frac{t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} \iff f(t) = 1 + \frac{t}{2} + o(t).$$

On vient donc d'obtenir un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0 : d'après le cours, on en déduit donc que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = \frac{1}{2}$ puisque c'est le coefficient de degré 1 dans ce développement limité.

c) On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$: la fonction f, dérivable en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point si et seulement si f' est continue en 0, soit $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = f'(0) = \frac{1}{2}$.

On écrit ici le développement limité de $\frac{1}{1-t}$ en 0 : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ au voisinage de 0, donc $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2) \Longrightarrow \frac{t}{1-t} = t + t^2 + o(t^2)$,

donc $g(t) = \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) = t + t^2 - t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $f'(t) = \frac{g(t)}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2} = f'(0)$: la fonction f est bien continue en 0, et f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$.

4. Lorsque t tend vers $-\infty$, $u = 1-t$ tend vers $+\infty$ et $f(t) = \frac{-\ln(u)}{1-u} = \frac{\ln(u)}{u} \times \frac{1}{1-\frac{1}{u}}$,

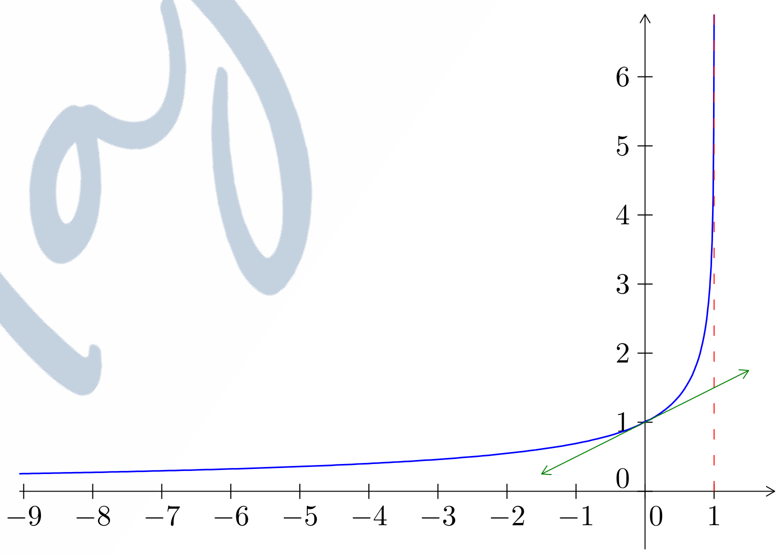
où $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{u}} = 1$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to 1^-} 1-t = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 1^-} \frac{-\ln(1-t)}{t} = +\infty = \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)$.

5. Des deux résultats précédents on déduit que la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, et la droite d'équation $t = 1$ comme asymptote verticale. La tangente au point $t = 0$ a pour coefficient directeur $f'(0) = \frac{1}{2}$, et pour ordonnée à l'origine $f(0) = 1$. On n'oublie pas non plus que f est strictement croissante et continue sur son domaine $]-\infty;1[$:



PARTIE B :

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty;1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty;1[, \quad L(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

6. Sous cette forme intégrale, sachant que la fonction f est continue sur $]-\infty;1[$: L est en fait *la* primitive de f sur cet intervalle, qui s'annule en 0.

À ce titre, et sans calcul supplémentaire, on en déduit que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$, et que :

$$\forall x \in]-\infty;1[, \quad L'(x) = f(x).$$

7. Étude de L en 1 :

a) Le changement de variable affine $u = 1-t$ donne :

$$\forall (A,B) \in]0;1[^2, \quad \int_A^B f(t)\mathrm{d}t = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}(-\mathrm{d}u) = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u, \quad \text{CQFD}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;1[$; d'après la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique, ici de raison $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \iff \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t},$$

et il suffit alors de multiplier les deux membres de l'égalité par $-\ln(t)$ pour obtenir en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0;1[, \quad \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

c) Pour tout k de $\mathbb{N}$: la fonction $t \mapsto -t^k \ln(t)$ est continue sur $]0;1]$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0^+} -t^k \ln(t) = 0^+$, donc la fonction se prolonge par continuité en 0, ce qui garantit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

Pour la calculer, on pose $A \in]0;1[$ et on réalise une intégration par parties dans $\displaystyle\int_A^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t$, en posant :

$$u'(t) = -\ln(t) \longrightarrow u'(t) = -\frac{1}{t}$$
$$v'(t) = t^k \longrightarrow v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_A^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{k+1}\ln(t)}{k+1}\right]_A^1 + \frac{1}{k+1}\int_A^1 t^k \mathrm{d}t$$
$$= -\frac{A^{k+1}\ln(A)}{k+1} + \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_A^1 = -\frac{A^{k+1}\ln(A)}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{A^{k+1}}{(k+1)^2}$$

Or : $\lim\limits_{A\to 0^+} \dfrac{A^{k+1}}{(k+1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{A\to 0^+} A^{k+1}\ln(A) = 0$ par croissances comparées, donc :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 -t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

d) Comme suggéré, on calcule les limites de $\dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ en 0 et en 1 :

- Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0^+} -t\ln(t) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{-t\ln(t)}{1-t} = \dfrac{0}{1} = 0$.
- $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{-\ln(t)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{\ln(1)-\ln(t)-\ln(1)}{1-t} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$: on a en effet reconnu la limite du taux d'accroissement de ln en $t_0 = 1$, où elle est dérivable.

  Ainsi : $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{-t\ln(t)}{1-t} = 1\times 1 = 1$.

La fonction $\varphi :\ t \mapsto \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$, par ailleurs continue sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions de référence qui le sont, est donc prolongeable par continuité en 0 et en 1, en une fonction continue $\tilde{\varphi}$ sur
le *segment fermé* $[0;1]$.
D'après le cours, dans ces conditions la fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi prolongée est bien bornée sur $[0;1]$, donc la fonction de départ φ est bien a fortiori bornée sur $]0;1[$.

On en tire deux conséquences :

- La fonction $t \mapsto \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} = t^n \times \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ se prolonge elle-même en une fonction continue sur $[0;1]$, comme produit de fonctions qui le sont.

  Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t$ converge, elle est faussement impropre en 0 et en 1.
- Le fait que $\tilde{\varphi}$ soit bornée sur $[0;1]$ signifie par définition qu'il existe deux réels fixés m et M tels que :

$$\forall t\in[0;1],\quad m \leqslant \tilde{\varphi}(t) \leqslant M,\ \text{et implique : } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0;1],\quad mt^n \leqslant t^n\tilde{\varphi}(t) \leqslant Mt^n \text{ puisque } t\geqslant 0.$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0;1]$, et $0<1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad m\int_0^1 t^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 t^n\mathrm{d}t \iff \frac{m}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1}$, le théorème d'encadrement assure alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

e) La relation obtenue en 7.b) et les résultats des questions 7.c) et 7.d) assurent que la fonction $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ converge comme somme d'intégrales convergentes, et par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 -t^k\ln(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = 0$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$, alors le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, est possible donne effectivement :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

f) Comme on l'a vu en 7.a) : $\forall (A,B)\in]0;1[^2, \quad \displaystyle\int_A^B f(t)\mathrm{d}t = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t.$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ converge comme on vient de le voir, alors on peut faire tendre A vers 0 et B vers 1 dans l'égalité précédente :

$$\lim_{\substack{A\to 0\\ B\to 1}} \int_A^B f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui assure ainsi que : $\displaystyle\lim_{B\to 1}\int_0^B f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6} \iff \lim_{B\to 1} L(B) = \frac{\pi^2}{6}.$

On peut donc effectivement prolonger L par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. a) Pour tout $x\in]-1;0[$, $-x\in]0;1[$ et $x^2\in]0;1[$, tandis que pour tout $x\in]0;1[$, $-x\in]-1;0[$ et $x^2\in]0;1[$: la fonction L étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$, et les fonctions $x\mapsto -x$ et $x\mapsto x^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $K:\ x\mapsto L(x)+L(-x)-\dfrac{1}{2}L(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et $]0;1[$ par composition puis somme de telles fonctions.

Pour tout $x\in]-1;0[\cup]0;1[$:

$$\begin{aligned}
K'(x) &= L'(x) - L'(-x) - \frac{1}{2}\cdot 2xL'(2x) = f(x) - f(-x) - xf(x^2)\\
&= \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{-\ln(1+x)}{-x} - x\frac{-\ln(1-x^2)}{x^2}\\
&= \frac{-\ln(1-x)-\ln(1+x)+\ln(1-x^2)}{x} = \frac{-\ln\big((1-x)(1+x)\big)+\ln(1-x^2)}{x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque $(1-x)(1+x) = 1-x^2$. La fonction K est donc constante sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;1[$.

Comme L est aussi continue en 0 et en 1 et se prolonge par continuité en 1, alors K est aussi continue en 0 et se prolonge par continuité en -1 et en 1 : elle est est donc en fait constante sur tout l'intervalle $[-1;1]$.

Il suffit donc de calculer la valeur de $K(0)$ par exemple, pour que ce soit aussi la valeur prise par $K(x)$ sur tout l'intervalle :

$$K(0) = L(0)+L(0)-\frac{1}{2}L(0) = 0, \quad \text{donc } \forall x\in[-1;1]\ K(x) = 0 \iff L(x)+L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

b) Il suffit alors d'écrire la relation précédente en $x=-1$ par exemple ; on obtient :

$$L(-1)+L(1) = \frac{1}{2}L(1) \iff L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

PARTIE C :

On considère pour finir la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty;0[^2$ par :

$$\forall (x,y)\in]-\infty;0[^2,\quad \Phi(x,y)=L(x)+L(y)-L(-xy).$$

L'énoncé admet que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]-\infty;0[^2$.

9. a) En tant que fonction de classe $\mathcal{C}^2$, Φ admet des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 sur l'ouvert $]-\infty;0[^2$: pour tout couple (x,y) de ce domaine,

$$\begin{aligned}\partial_1(\Phi)(x,y)&=L'(x)+0-(-y)L'(-xy)=f(x)+yf(-xy)\\&=\frac{-\ln(1-x)}{x}+y\frac{-\ln(1+xy)}{-xy}=\frac{\ln(1+xy)-\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

$$\partial_2(\Phi)(x,y)=0+L'(y)-(-x)L'(-xy)=f(y)+xf(-xy)=\frac{\ln(1+xy)-\ln(1-y)}{y}.$$

b) On résout alors le système suivant d'inconnues $(x,y)\in]-\infty;0[^2$, pour trouver les points critiques de Φ :

$$\begin{cases}\partial_1(\Phi)(x,y)&=0\\\partial_2(\Phi)(x,y)&=0\end{cases}\iff\begin{cases}\ln(1+xy)-\ln(1-x)&=0\\\ln(1+xy)-\ln(1-y)&=0\end{cases}\iff\begin{cases}1+xy&=1-x\\1+xy&=1-y\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}xy=-x\\xy=-y\end{cases}\iff\begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}$$

Toutes les simplifications successives ont été rendues possibles du fait que x et y sont non nuls (car strictement négatifs), et par injectivité de la fonciton logarithme népérien.

On a bien démontré ainsi, que Φ admet le $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10. a) En repartant des expressions des dérivées partielles d'ordre 1 de Φ en fonction de f (avant la forme explicite, donc), on peut plus facilement dériver une fois de plus par rapport aux deux variables x et y, avant d'évaluer les dérivées partielles d'ordre 2 au point $(-1,-1)$: pour tout $(x,y)\in]-\infty;0[^2$,

$$\partial^2_{1,1}(\Phi)(x,y)=f'(x)+y\cdot(-y)f'(-xy)=f'(x)-y^2f'(-xy)$$

$$\partial^2_{2,2}(\Phi)(x,y)=f'(y)+x(-x)f'(-xy)=f'(y)-x^2f'(-xy)$$

$$\partial^2_{1,2}(\Phi)(x,y)=0+1\cdot f(-xy)+y\cdot(-x)f'(-xy)=f(-xy)-xyf'(-xy)=\partial^2_{2,1}(\Phi(x,y)$$

d'après le théorème de Schwarz, puisque Φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

On a donc :

$$\partial^2_{1,1}(\Phi)(-1,-1)=f'(-1)-f'(-1)=0$$

$$\partial^2_{2,2}(\Phi)(-1,-1)=f'(-1)-f'(-1)=0$$

$$\partial^2_{1,2}(\Phi)(-1,-1)=f(-1)-f'(-1)=\frac{-\ln(2)}{-1}-\frac{g(-1)}{(-1)^2}=-\ln(2)-\frac{-1}{2}+\ln(2)=\frac{1}{2}.$$

La Hessienne de Φ au seul point critique $(-1,-1)$ est donc bien $H=\begin{pmatrix}0&\frac12\\\frac12&0\end{pmatrix}$, comme annoncé.

b) Comme H est une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser le critère du déterminant pour écrire les équivalences :

$$\big(\lambda \text{ est valeur propre de } H\big) \iff H-\lambda\cdot I_2 \text{ n'est pas inversible } \iff \det(H-\lambda\cdot I_2)=0$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}=0 \iff \lambda^2-\frac{1}{4}=0.$$

Les deux solutions de cette équations sont $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$, qui sont donc les deux valeurs propres de la Hessienne H.

11. Si la fonction Φ, de classe $\mathcal{C}^2$, présente un extremum local, alors c'est forcément en un point critique, donc en $(-1,-1)$.

Or en ce point la Hessienne de Φ possède deux valeurs propres de signes opposés : elle n'y admet donc pas un extrémum local, mais un point-selle.

On en déduit que la fonction Φ n'admet aucun extremum local sur $]-\infty;0[^2$.

⋆ ⋆ ⋆ **FIN DU SUJET** ⋆ ⋆ ⋆