MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. a) Les calculs matriciels donnent :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1-2+1 & -2-2+1 & -1-4+2 \\ 1+1-2 & -2+1-2 & -1+2-4 \\ -1-1+2 & 2-1+2 & 1-2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0+3-3 & 0+3-3 & 0+6-6 \\ 0+3-3 & 0+3-3 & 0+6-6 \\ 0-3+3 & 0-3+3 & 0-6+6 \end{pmatrix} = 0_3 \quad \text{(matrice nulle)}$$

b) De la relation précédente on déduit que $P(X) = X^3$ est un polynôme annulateur de A. L'unique racine de P, à savoir 0, est donc la seule valeur propre possible de A.

c) Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On peut directement supprimer la troisième ligne qui est l'opposée de la deuxième

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \; L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}\right. \iff \begin{cases} x = 2y + z = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi : $\operatorname{Ker}(f) = \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\big((-1,-1,1)\big)$ est engendré par un seul vecteur non nul, c'en est donc une base et $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$.

d) Le noyau de f correspond au sous-espace propre $E_0(f)$ de f pour la valeur propre 0, ce qui prouve que 0 est bien valeur propre de f, et que c'est la seule. Comme $\dim E_0(f) = 1 < 3$, on peut en déduire que f n'est pas diagonalisable.

2. Soient $e_1' = (-1,-1,1)$, $e_2' = (2,-1,1)$ et $e_3' = (-1,2,1)$.

a) La famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 : il suffit donc de démontrer que $\mathcal{B}'$ est libre, pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a.e'_1 + b.e'_2 + c.e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3b = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff b = 0 = c = a$$

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, on calcule les images par f de chacun de ses éléments :

On reconnaît en $e'_1 = (-1, -1, 1)$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$, donc $f(e'_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$f(e'_2)$ est représenté par $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(e'_2) = e'_1$.

$f(e'_3)$ est représenté par $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(e'_3) = e'_2$.

La matrice représentative T de f dans la base $\mathcal{B}'$ est bien :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

3. On pose : $\quad M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

a) On pourrait poser un système, mais on peut aussi remarquer assez facilement la décomposition :

$$M = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}(3I - A) = -\frac{1}{3}.A + I$$

ce qui est bien la relation cherchée avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 1$.

b) L'égalité des matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}$ entraîne l'égalité des endomorphismes : $h = -\frac{1}{3}.f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Cette égalité d'endomorphismes entraîne à son tour l'égalité des matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}'$ cette fois :

$$M' = -\frac{1}{3}T + I = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Il est alors évident que la matrice M' est inversible, comme matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous non nuls.

La matrice M qui lui est semblable via une matrice de passage P inversible et la relation : $M = PM'P^{-1}$, est donc elle-même inversible comme produit de matrices inversibles.

On pouvait aussi invoquer l'argument selon lequel l'inversibilité de M' implique la bijectivité de h, qui entraîne elle-même l'inversibilité de M qui représente h dans la base $\mathcal{B}$.

d) D'après les relations précédentes : $(M-I)^3 = \left(-\frac{1}{3}.A\right)^3 = -\dfrac{1}{27}.A^3 = 0_3$ puisque A^3 est la matrice nulle.

Or le développement de $(M-I)^3$ donne, par exemple d'après la formule du binôme de Newton, possible puisque M commute avec I :

$$(M-I)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}M^k(-I)^{3-k} = 1.M^0(-I)^3+3M.(-I)^2+3M^2(-I)+M^3(-I)^0 = -I+3M-3M^2+M^3$$

ce qui permet d'écrire : $M^3-3M^2+3M-I=0 \iff M(M^2-3M+3I)=I$, et confirme donc que M est inversible, d'inverse :

$$M^{-1} = M^2-3M+3I$$

e) La relation : $M = -\frac{1}{3}.A+I$ et le fait que I commute avec A permettent à nouveau d'utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = \left(-\frac{1}{3}.A+I\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{3}.A\right)^k.I^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0}\left(-\frac{1}{3}.A\right)^0.I^n + \binom{n}{1}\left(-\frac{1}{3}.A\right)^1.I^{n-1} + \binom{n}{2}.\left(-\frac{1}{3}\right)^2.I^{n-2}$$

puisque $A^3=0$, les termes pour $k \geqslant 3$ sont tous nuls

$$= I - \frac{n}{3}.A + \frac{n(n-1)}{18}.A^2$$

Lorsque $n=-1$, le membre de droite devient :

$$I+\frac{1}{3}.A+\frac{2}{18}.A^2 = I+(I-M)+\frac{1}{9}.(3I-3M)^2 = 2I-M+\frac{1}{9}(9I-18M+9M^2) = 3I-3M+M^2 = M^{-1},$$

donc la formule est aussi vraie pour $n=-1$.

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Il suffit d'écrire : $VT = V \times V^2 = V^3$ et $TV = V^2 \times V = V^3$ pour conclure que $VT = TV$.

   Or, d'après les règles de calculs pour les représentations matricielles : $VT = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g \circ f)$ et $TV = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ g)$; l'égalité des matrices représentatives dans la même base, est alors équivalente à l'égalité des endomorphismes :

$$g \circ f = f \circ g$$

2. a) D'après ce qui précède : $f\big(g(e_1')\big) = f \circ g(e_1') = g \circ f(e_1') \overset{1.c)}{=} g(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui prouve bien que $g(e_1')$ appartient au noyau de f.

Or $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1')$ (ce qui est la raison pour laquelle on a pu écrire $f(e_1') = 0_{\mathbb{R}^3}$) : le vecteur $g(e_1')$ qui appartient à ce noyau, s'écrit donc bien sous la forme : $g(e_1') = a.e_1'$, pour un certain réel a.

b) De même : $f\big(g(e_2') - a.e_2'\big) \overset{f \text{ est linéaire}}{=} f \circ g(e_2') - a.f(e_2') = g \circ f(e_2') - a.e_1' = g(e_1') - a.e_1' = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $g(e_2') - a.e_2'$ appartient bien à $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1')$; à nouveau, il existe donc un réel b tel que : $g(e_2') - a.e_2' = b.e_1' \iff g(e_2') = b.e_1' + a.e_2'$.

c) Enfin : $f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = a.e_2' + b.e_1'$ d'après la question précédente.
On en déduit, toujours grâce à la linéarité de f, que :

$$f\big(g(e_3') - a.e_3' - b.e_2'\big) = f \circ g(e_3') - a.f(e_3') - b.f(e_2') = a.e_2' + b.e_1' - a.e_2' - b.e_1' = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $g(e_3') - a.e_3' - b.e_2'$ appartient à $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1')$, et il existe un réel c tel que :

$$g(e_3') - a.e_3' - b.e_2' = c.e_1' \iff g(e_3') = c.e_1' + b.e_2' + a.e_3'$$

d) La matrice V de g dans la base $\mathcal{B}'$ a alors la forme suivante, au vu des trois questions précédentes :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g(e_1') & g(e_2') & g(e_3') \end{array} \\ V = & \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \end{array}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

Partie A

1. L'affichage des courbes de niveau de la fonction f, les valeurs étant indiquées sur chacune d'elles, suggère clairement que la fonction f admet un minimum local valant 3 ou une valeur proche, en un point de coordonnées proches de $(1,1)$, puisque les valeurs des courbes de niveau vont décroissant vers cette valeur lorsqu'on se rapproche de ce point.

2. a) Une question à rédiger très rigoureusement, ce qui est rarement fait : les fonctions *coordonnées* $p_1 : (x,y) \mapsto x$ et $p_2 : (x,y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme fonctions polynômiales, toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$: la fonction $f = p_1/p_2^2 + p_2^2 + 1/p_1$ est alors bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme somme de produits et quotients de telles fonctions.

b) La fonction f admet donc des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sur son domaine de définition.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

Les points critiques (x, y) de f sont alors les solutions sur son domaine du système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} & = 0 \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ -2x + 2y^4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \text{ puisque } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ -2x + 2x^4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 2x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Puisque $x > 0$ sur le domaine, alors : $\quad 2x(x^3-1) = 0 \iff x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1.$

On en déduit que le système a pour unique couple solution : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, ce qui prouve que f admet un unique point critique A sur son domaine, de coordonnées $(1, 1)$.

c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\partial_{1,1}^2(f)(x,y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = \frac{6x}{y^4} + 2, \quad \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

En $A = (1, 1)$, la Hessienne de f est bien :

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(1,1) & \partial_{1,2}^2(f)(x,y) \\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) & \partial_{2,2}^2(f)(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

d) Les valeurs propres de la Hessienne H sont les réels λ tels que $A - \lambda.I_2$ n'est pas inversible, donc les solutions de l'équation :

$$\det(A - \lambda.I_2) = 0 \iff (2-\lambda)(8-\lambda) - (-2).(-2) = 0 \iff 16 - 10\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 100 - 4 \times 12 = 52 > 0$, il y a donc deux solutions distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{10 - \sqrt{52}}{2} = \frac{\sqrt{100} - \sqrt{52}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{10 + \sqrt{52}}{2} > 0$$

Les deux valeurs propres de la Hessienne étant strictement positives, on peut donc conclure qu'au point A, la fonction f admet un minimum local, qui vaut d'ailleurs $f(A) = f(1,1) = 1+1+1 = 3$: toutes les conjectures faites à la question 1. sont vérifiées !

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. La fonction h_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, avec :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h_n'(x) = n.x^{n-1} + 0 + (-n).x^{-n-1} = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = \frac{n(x^{2n} - 1)}{x^{n+1}}$$

Pour la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, on a choisi de dériver ici la forme x^{-n}, mais il y a plusieurs autres façons de procéder (utiliser $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ par exemple), mais par contre il n'y a qu'une seule dérivée possible à la fin !

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x^{n+1} > 0$ et $n \geqslant 1$ donc le signe de $h_n'(x)$ est celui de $x^{2n} - 1$, et :

$$x^{2n} - 1 > 0 \iff x^{2n} > 1 \iff x > 1$$

D'après le cours sur les fonctions puissances, et puisqu'on travaille sur $]0; +\infty[$.

Les variations correspondent bien à ce qui est demandé :

x	0		u_n		1		v_n		$+\infty$
$h'_n(x)$	$\|\|$		$-$		0		$+$		
h_n	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites aux bornes : puisque $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n + 1 + \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n + 1 + \frac{1}{x^n} = +\infty$$

   Ainsi, sur $]0;1[$ (resp. sur $[1;+\infty[$) :
   - h_n est continue car dérivable
   - h_n est strictement décroissante (resp. strictement croissante)
   - l'intervalle-image est $]3;+\infty[$ qui contient 4 (resp. est $[3;+\infty[$ qui contient 4).

   Le théorème de la bijection assure alors que l'équation $h_n(x) = 4$ possède une unique solution u_n sur $]0;1[$ (resp. possède une unique solution v_n sur $[1;+\infty[$).
   L'équation admet donc exactement deux solutions u_n et v_n sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et tout x de $]0;+\infty[$:

$$\text{D'une part,} \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + \cancel{1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \cancel{1} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}}$$

$$\text{D'autre part,} \quad \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} = \frac{x^{2n+2} - x - x^{2n+1} + 1}{x^{n+1}}$$

   Les deux expressions sont égales à une même troisième, elles sont donc égales entre elles pour tout x de $]0;+\infty[$.

   b) On peut remplacer, dans l'égalité précédente, x par v_n qui appartient bien à $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne, puisque $h_n(v_n) = 4$:

$$h_{n+1}(v_n) - 4 = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

   où : $v_n > 1$ donc $v_n - 1 > 0$ et $v_n^{n+1} > 1 \iff v_n^{n+1} - 1 > 0$, ce qui assure que :
   $h_{n+1}(v_n) - 4 \geqslant 0 \iff h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

   c) À chaque fonction sa solution : on sait que $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ et que $h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $h_{n+1}(v_n) \geqslant h_{n+1}(v_{n+1}) \iff v_n \geqslant v_{n+1}$ par stricte croissance de la fonction h_{n+1} sur $[1;+\infty[$ qui contient v_n et v_{n+1}.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien décroissante.

4. a) Dans les questions précédentes, on a démontré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (q.3.c)) et minorée par 1 (q.2. : $v_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) : la suite est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone, vers une limite $\ell \geqslant 1$.

   b) Il y a plusieurs possibilités de réponse ici, en voici deux : supposons dans les deux cas que $\ell > 1$.

   - En passant alors par la forme exponentielle des puissances : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n = e^{n\ln(v_n)}$, où : par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \ln(\ell) > 0$ puisque $\ell > 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(v_n) = +\infty$, et par composition avec $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(v_n)} = +\infty = \lim_{n\to+\infty} (v_n)^n$$
   - On peut aussi dire que puisque (v_n) est décroissante, de limite ℓ, alors :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \ell \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n \geqslant \ell^n$ par croissance de la fonction puissance n-ième sur $\mathbb{R}_+$.
   Or on a supposé $\ell > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$. Le théorème de comparaison des limites assure alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^n = +\infty$

   Il faut se souvenir pour conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre v_n vérifie l'équation :
   $h_n(v_n) = 4 \iff (v_n)^n + 1 + \dfrac{1}{(v_n)^n} = 4$.

   Or d'après ce qui précède, et par inverse de la limite précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(v_n)^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^n + 1 + \dfrac{1}{(v_n)^n} = +\infty$, ce qui est contradictoire avec le fait que cette quantité est toujours égale à 4.

   c) On sait donc que $\ell \geqslant 1$ mais que $\ell > 1$ est impossible : la seule solution est donc que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

5. a) Soit $n \geqslant 1$: $h_n(3) = 3^n + 1 + \dfrac{1}{3^n} > 3 + 1 = 4$, donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(3) > h_n(v_n) \iff 3 > v_n$$
   toujours par stricte croissance de h_n sur $[1; +\infty[$ auquel appartiennent 3 et v_n.

   b)
```
function y = h(n,x)
    y = x^n + 1 + 1/x^n
endfunction
```

   c)
```
function res = v(n)
    a = 1
    b = 3
    while (b-a) > 10^(-5)
        c = (a+b)/2
        if h(n,c) < 4 then a=c
            else b = c
        end
    end
res = (a+b)/2   // ou a, ou b
```

   Commentaire : plus qu'un apprentissage bête et méchant par cœur, c'est la compréhension fine de l'agorithme de dichotomie qui permet d'adapter le script de façon adéquate lorsqu'il n'est pas exactement sous sa forme standard, comme ici.

On sait que $1 < v_n \leqslant 3$, ce qui justifie les valeurs de départ de `a` et `b`. À chaque fois qu'on calcule $c = \dfrac{a+b}{2}$, on coupe en deux l'intervalle de recherche et on redéfinit l'une des deux bornes pour sélectionner le demi-intervalle qui contient la solution v_n.

Si $h_n(c) < 4$, alors $h_n(c) < h_n(v_n) \iff c < v_n$ puisqu'une fois de plus, h_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$: il faut donc que c devienne la nouvelle borne de **gauche** de l'intervalle de recherche ! Donc que c remplace a.

Sinon c'est le contraire : $h_n(c) \geqslant 4 \iff h_n(c) \geqslant h_n(v_n) \iff c \geqslant v_n$, il faut donc que c devienne la nouvelle borne de **droite** de l'intervalle de recherche, et remplace b.

Il faut enfin rendre un résultat, donc affecter une valeur à la variable de sortie `res` de la fonction : on peut soit rendre a, valeur approchée par défaut à 10^{-5} près, soit b (valeur approchée à 10^{-5} près par excès), soit même couper une dernière fois en deux en renvoyant $\dfrac{a+b}{2}$, qui sera encore une valeur approchée à 10^{-5} près sans qu'on ait cherché pour cette dernière fois à savoir si c'est une approximation par défaut ou par excès.

d) Au vu du code : le script de cette question remplit un vecteur `Y` de taille 20, avec les 20 premières valeurs de la suite $(v_n)^n$ puis affiche le nuage de points correspondant.

La sortie graphique suggère que $(v_n)^n$ reste constant, égal à une valeur un peu supérieure à $2,6$.

e) Le réel v_n est solution de l'équation $h_n(x) = 4$, soit :

$$h_n(x) = 4 \iff (x^n + 1 + \frac{1}{x^n} = 4 \iff x^n - 3 + \frac{1}{x^n} = 0 \iff \frac{x^{2n} - 3x^n + 1}{x^n} = 0$$
$$\iff x^{2n} - 3x^n + 1 = 0$$

En posant $X = x^n$, on est donc ramené à l'équation du second degré $X^2 - 3X + 1 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$, il y a donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

On cherche une solution dans $[1;+\infty[$, et $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $X_1 < 1$ et $X_2 > 1$.

On a bien : $\quad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

f) Par conséquent : $\quad$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{3}\right)^{1/n}$ (puissance réciproque).

Sous forme exponentielle : $\quad v_n = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$, où :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = e^0 = 1 = \lim_{n\to+\infty} v_n$
par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1, \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. La fonction f est définie sur $]-\infty; +\infty[$ qui est bien un domaine symétrique par rapport à 0.
   Pour tout $t \in]-1; 1[$: $-t \in]-1; 1[$ encore, et $f(t) = 0 = f(-t)$.
   Pour tout $t \geqslant 1$: $-t \leqslant -1$, et $f(-t) = \dfrac{-1}{(-t)^3} = \dfrac{-1}{-t^3} = \dfrac{1}{t^3} = f(t)$ puisque l'exposant 3 est impair.
   Pour tout $t \leqslant -1$: $-t \geqslant 1$ et $f(-t) = \dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{1}{-t^3} = f(t)$
   Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(-t) = f(t)$, donc la fonction f est bien paire.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ est bien convergente comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$, et vaut :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A t^{-3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
3. a) Soit $A > 1$: alors $-A < -1$, et dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$, on pose le changement de variable affine $u = -t$:
   Alors $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, et $f(t)\mathrm{d}t = f(-u).(-\mathrm{d}u) = -f(u)\mathrm{d}u$, donc :
$$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_A^1 -f(u)\mathrm{d}u = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u$$
   Remarque : on vient de redémontrer une propriété des intégrales de fonctions paires.
   Lorsque A tend vers $+\infty$: $-A$ tend vers $-\infty$, et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ également, ce qui prouve que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut aussi $\dfrac{1}{2}$.

   b) La fonction f est bien positive sur $]-1; 1[$ car constante nulle, positive sur $[1; +\infty[$ puisque $\dfrac{1}{t^3} > 0$ pour tout $t \geqslant 1$, et positive sur $]-\infty; -1]$ puisque $t^3 < 0$ donc $\dfrac{-1}{t^3} > 0$ pour tout $t \leqslant -1$.
   Finalement, f est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   La fonction f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$ comme inverse d'un polynôme, et continue sur $]-1; 1[$ comme fonction constante : f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (-1 et 1).
   Finalement, puisque f est paire, nulle sur $]-1; 1[$ et d'après ce qui précède :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0 \ \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$
   ce qui achève de prouver que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

   a) Pour tout réel x : $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On distingue 3 cas :

   - Pour tout $x \leqslant -1$:
   $$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-A}^{x} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2} = \frac{1}{2x^2}$$
   - Pour tout $x \in]-1;1[$:
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$
   - Pour tout $x \geqslant 1$:
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

   b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
   Comme f est paire, alors la fonction $g:\ t \mapsto t.f(t)$ est impaire.
   $(\forall t \in \mathbb{R},\ g(-t) = -t.f(-t) = -g(t))$; comme f est aussi nulle sur $]-1;1[$ il suffit donc, comme on l'a vu en 3.a), d'étudier la convergence de $\int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.
   Il s'agit d'une intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$, donc l'intégrale converge : par imparité, on en déduit que $\int_{-\infty}^{-1} tf(t)\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut $-\int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$.
   On en déduit que X admet une espérance, qui vaut :
   $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

   c) Toujours selon le même principe : la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2 ; d'après le théorème de transfert, l'existence de ce moment est conditionnée par l'absolue convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

   On commence par étudier la convergence de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$: il s'agit d'une intégrale divergente comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$, donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, ni de variance.

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

   a) La variable aléatoire Y est par définition à valeurs positives, donc on peut déjà dire que pour tout $x < 0,\ F_Y(x) = 0$.
   Pour tout $x \geqslant 0$: $\quad F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(|X| \leqslant x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x) = F_X(x) - F_X(-x)$.
   On distingue alors deux cas :

   - Pour $x \in]-1;1[$: $-x \in]-1;1[$ aussi et $F_Y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
   - Pour tout $x \geqslant 1$: $-x \leqslant -1$ et $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

   Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Sous cette forme, F_Y estde classe C^1 donc continue sur $]-\infty;1[$ comme constante, et de classe C^1 dnc continue sur $]1;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

Par ailleurs : $\lim_{x\to 1^+} F_Y(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1 - 1 = 0 = F_Y(0) = \lim_{x\to 1^-} F_Y(x)$, donc F_Y est continue en 1.

Finalement : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.

La variable aléatoire Y est donc bien une variable à densité, et une densité f_Y est donnée par dérivation de F_Y sauf en 1 où on choisit une valeur arbitraire et positive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Comme la fonction $t \mapsto tf(t)$ est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$, on est donc ramené à l'étude de la convergence simple de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t}{t^3}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t = 2$ d'après les calculs déjà faits en 4.b).

Tout ceci prouve que Y admet une espérance, qui vaut $E(Y) = 2$.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.

   Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

   a) Puisque D prend les valeurs -1 et 1, alors $Z = \dfrac{D+1}{2}$ prend les valeurs $\dfrac{-1+1}{2} = 0$ et $\dfrac{1+1}{2} = 1$.

   Puisque $\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(D=-1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(D=1) = \dfrac{1}{2}$ aussi, alors Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

   On sait donc que Z admet une espérance et une variance qui valent respectivement $E(Z) = \dfrac{1}{2}$ et $V(Z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. On en déduit que $D = 2Z - 1$ admet une espérance et une variance qui valent respectivement, d'après leurs propriétés :

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2.\frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad V(D) = 2^2.V(Z) = 4.\frac{1}{4} = 1$$

   b) Puisque D et Y sont indépendantes et admettent chacune une espérance, alors T admet une espérance qui vaut : $\quad E(T) = E(D) \times E(Y) = 0$.

   c) Pour tout réel x : on calcule $\mathbb{P}(T \leqslant x) = \mathbb{P}(DY \leqslant x)$ grâce à la formule des probabilités totales avec le système complet $\big([D=-1],[D=1]\big)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leqslant x) &= \mathbb{P}\big([D=-1] \cap [DY \leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([D=1] \cap [DY \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([D=-1] \cap [-Y \leqslant x]\big) + \mathbb{P}([D=1] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(D=-1) \times \mathbb{P}(Y \geqslant -x) + \mathbb{P}(D=1) \times \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \geqslant -x)\end{aligned}$$

   Par indépendance des variables aléatoires D et Y.

d) On distingue à nouveau plusieurs cas :

- Pour tout $x \leqslant -1$: $-x \geqslant 1$ et
$$F_T(x) = \mathbb{P}(T \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(Y \leqslant -x)) = 0 + \frac{1}{2}.\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{2x^2}$$
- Pour tout $x \in]-1;1[$: $-x \in]-1;1[$ aussi donc $F_Y(-x) = 0$ et
$$F_T(x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \geqslant -x) = 0 + \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$
- Pour tout $x \geqslant 1$: $-x \leqslant -1$ et
$$F_T(x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y \geqslant -x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) + \frac{1}{2}.1 = 1 - \frac{1}{2x^2}$$

On remarque donc que T et X suivent la même loi puisqu'elles ont la même fonction de répartition.

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$ et soit V la variable aléatoire définie par : $\quad V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

a) La fonction de répartition de U est, d'après le cours, définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Puisque U est à valeurs dans $]0;1[$: alors $1-U$ aussi, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} = V$ est à valeurs dans $]1;+\infty[$. Ainsi :
$\forall x \leqslant 1,\ F_V(x) = 0$ et pour tout $x > 1$:
$$F_V(x) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\Big) = \mathbb{P}\Big(\sqrt{1-U} \geqslant \frac{1}{x}\Big) = \mathbb{P}\Big(1-U \geqslant \frac{1}{x^2}\Big) = \mathbb{P}\Big(U \leqslant 1 - \frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{1}{x^2}$$
par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, et puisque pour tout $x > 1$,
$x^2 > 1 \iff 0 < \dfrac{1}{x^2} < 1 \iff 0 < 1 - \dfrac{1}{x^2} < 1$.

Les variables aléatoires V et Y suivent bien la même loi puisqu'elles ont la même fonction de répartition.

3. a) La fonction suivante prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D : pour cela on commence par calculer n réalisations de Z qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, puis on utilise la relation $D = 2Z - 1$:

```
function a = D(n)
    Z = grand(1,n,'bin',1,0.5)
    a = 2*Z-1
endfunction
```

b) Le script suivant :

```
n = input('entrer n : ')
a = D(n)
b = rand(1,n)
c = a./sqrt(1-b)    // opération pointée : correction de l'énoncé!
disp(sum(c)/n)
```

Le vecteur `c` correspond au produit terme à terme de n simulations de la loi de D par autant de simulations de la loi de V, donc de Y : ce sont donc n simulations de la loi de T, et donc de X

Pour n assez grand, `sum(c)/n` qui est la moyenne empirique des simulations de la loi de X, rend alors une valeur proche de $E(X) = 0$.