MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

PROBLÈME 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty;1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty;1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

PARTIE A : Étude de la fonction φ

1. Pour tout $x < 1$, $1 - x > 0$ donc φ est bien définie et continue sur $]-\infty;1[$ comme composée, produit et somme de fonctions continues.

Pour la continuité en 1 : $\lim\limits_{x\to 1^-} 1 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0^-$ par croissances comparées, donc par composition de limites :
$\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x + (1-x)\ln(1-x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x)$.
Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$, ce qui prouve que la fonction φ est continue en 1, et est finalement continue sur $]-\infty;1]$.

2. a) La fonction φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ comme composée, produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x < 1$:

$$\varphi'(x) = 1 + (-1).\ln(1-x) + (1-x).\frac{-1}{1-x} = 1 - \ln(1-x) - 1 = -\ln(1-x)$$

b) On étudie le signe de $\varphi'(x)$ en résolvant, pour tout $x < 1$:

$$-\ln(1-x) < 0 \iff \ln(1-x) > 0 \overset{(*)}{\iff} 1 - x > 1 \iff 0 > x$$

$(*)$: par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;1[$.

c) On étudie la dérivabilité de φ en 1 en écrivant son taux d'accroissement en ce point :
Pour tout $x < 1$, $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \dfrac{x - 1 + (1-x)\ln(1-x)}{x-1} = 1 - \ln(1-x)$.
Or $\lim\limits_{x\to 1^-} 1 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} 1 - \ln(1-x) = +\infty = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$.
Le taux d'accroissement en 1 admet une limite infinie en ce point, donc φ n'est pas dérivable en 1 (la courbe de φ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1).

3. Pour x au voisinage de $-\infty$, on peut factoriser l'expression par x : $\quad \varphi(x) = x\Big(1+\big(\frac{1}{x}-1\big)\ln(1-x)\Big)$, où :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - 1 = 0 - 1 = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$.

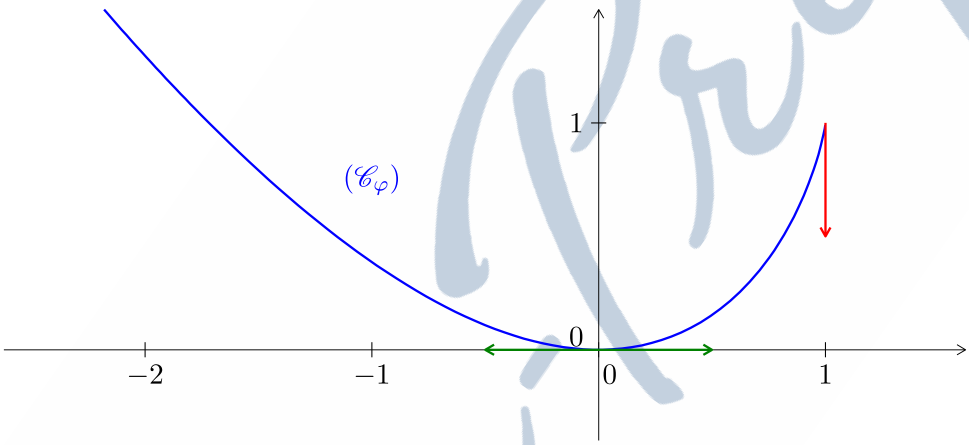
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\big(\tfrac{1}{x}-1\big)\ln(1-x) = -\infty$, et par produit avec x qui tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x\Big(1+\big(\frac{1}{x}-1\big)\ln(1-x)\Big) = +\infty = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x).$$

4. On trace une allure cohérente de la courbe qui tienne compte des résultats précédents, en soignant comme l'énoncé nous y invite le tracé :

- Au voisinage de 0 où φ change de sens de variation, et où la courbe admet donc une tangente horizontale que l'on trace.

- Au voisinage de 1 où φ est continue mais pas dérivable : on trace la demi-tangente verticale partant du point de coordonnées $(1, 1)$.



5. a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$ est impropre en 0 ; on pose donc $y \in]0;1[$ et dans l'intégrale $\displaystyle\int_y^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \ln(t) & \longrightarrow & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t & \longrightarrow & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_y^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_y^1 - \int_y^1 \frac{t}{2}\mathrm{d}t = 0 - \frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_y^1 = -\frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y$$

Or : $\displaystyle\lim_{y\to0^+} y^2\ln(y) = 0$ par croissances comparées, donc $\displaystyle\lim_{y\to0^+} -\frac{1}{2}y^2\ln(y) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} = \lim_{y\to0^+}\int_y^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$.

On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{1}{4}$.

b) Le changement de variable affine : $\quad t = 1-x$ est de classe C^1 sur $[0;1]$ et bijectif : la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$ assure alors celle de $\displaystyle\int_1^0 (1-x)\ln(1-x).(-\mathrm{d}x) \overset{(*)}{=} \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$

qui est aussi égale à $-\dfrac{1}{4}$.
(*) : *on a utilisé le signe $-$ devant l'élément différentiel* $\mathrm{d}x$ *apparu lors du changement de variable, pour échanger l'ordre des bornes.*

Ainsi, on peut écrire, par convergence des intégrales concernées :

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

PARTIE B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0;1[$.

6. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0;x]$: $\quad 0 \leqslant t \leqslant x < 1$, donc

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1-(1-t^n)}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$$

On a en effet reconnu une somme géométrique de raison t différente de 1 comme remarqué plus haut.

b) Les fonctions concernées par l'égalité précédente sont continues sur $[0;1[$, donc on peut écrire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^x \Big(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\Big)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \overset{(*)}{\iff} \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x t^k\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$\iff \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \iff -\ln(1-x) + 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$\overset{(**)}{\iff} -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

(*) : *utilisation de la linéarité de l'intégrale*
(**) : changement d'indice $k+1 \to k$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [0;x]$:

$$0 \leqslant t \leqslant x \iff 1 \geqslant 1-t \geqslant 1-x > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x} \overset{\times t^n \geqslant 0}{\Longrightarrow} 0 < \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.$$

Les fonctions (de la variable t) concernées par la dernière inégalité sont continues sur $[0;x]$ et $0 \leqslant x$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}.\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \iff 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

On conclut par transitivité de l'inégalité, puisque $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$ et $(n+1)(1-x) > 0$, donc $\dfrac{x^n}{(n+1)(1-x)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(1-x)}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}.$$

On a bien sûr : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$, donc d'après le théorème d'*encadrement* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0$$

8. Le résultat précédent se réécrit, d'après la relation obtenue en **6.**b) :

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n\geqslant 1}$ converge, et a pour somme totale : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

9. a) Pour a et b deux réels fixés, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$.

Par identification des coefficients au numérateur avec $\frac{1}{n(n+1)}$, les réels a et b sont donc solutions du système : $\begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -a = -1 \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b) On peut alors écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} x^{k+1}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{x=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k}$$

On reconnaît deux fois la série étudiée précédemment, qui converge puisqu'ici encore, $0 \leqslant x < 1$: la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et a pour somme totale :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) - \Big(-\ln(1-x) - \frac{x^1}{1}\Big) = x - (x-1)\ln(1-x) = \varphi(x)$$

On n'a pas oublié dans la deuxième somme, de compenser le terme manquant $\frac{x^1}{1} = x$.

c) On peut encore utiliser le résultat de **9.**a) pour étudier la série classique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ dont les sommes partielles s'écrivent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - 0 = 1$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et a pour somme totale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ qui est bien égal à $\varphi(1)$.

PARTIE C : Application en probabilité

11. a) On introduit ici les événements nécessaires pour l'étude de l'expérience aléatoire :

- Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit B_i : « la i-ème boule tirée est bleue »
- Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit R_i : « la i-ème boule tirée est rouge ».

À la fin de l'expérience, le nombre de boules présentes dans l'urne est au moins égal à 2.

$[N = 2]$ est réalisé si et seulement si on tire tout de suite la boule rouge, ce qui arrête l'expérience : $\mathbb{P}(N = 2) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}$, et pour tout $n \geqslant 3$:

$[N = n]$ est réalisé si et seulement si on a fait $n-1$ tirages en tout, dont les $n-2$ premiers ont

donné une boule bleue (on a à chaque fois rajouté une boule bleue dans l'urne) et le dernier a donné la boule rouge qui arrête l'expérience (sans rajouter de boule dans l'urne). Ainsi :
$\forall n \geqslant 3, \quad [N=n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$, et d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\ldots B_{n-3}}(B_{n-2}) \times P_{B_1\cap\ldots\cap B_{n-2}}(R_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

En effet : si $B_1 \cap \ldots \cap B_{n-3}$ est réalisé, alors l'urne a reçu $n-3$ boules bleues, donc en contient $2+n-3 = n-1$ en tout, dont $1+n-3 = n-2$ bleues.
Et si $B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}$ est réalisé, alors l'urne a reçu $n-2$ boules bleues, donc en contient $2+n-2 = n$ en tout, dont une seule rouge.

b) La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n\mathbb{P}(N=n)$ est absolument convergente. Il s'agit d'une série à termes positifs, donc la convergence simple suffit ; pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \sum\limits_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \overset{[j=k-1]}{=} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}.$
On reconnaît la série harmonique qui diverge, donc la variable aléatoire N n'admet pas d'espérance.

12. Dans le script suivant, la variable `b` qui représente le nombre de boules bleues dans l'urne, n'augmente d'une unité que si on tire une boule bleue, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$ puisque l'urne contiendra toujours une seule boule rouge.

Le script se complète donc ainsi :

```
function N = simuleN()
    b = 1  // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < b/(b+1)
        b = b+1
    end
    N = b+1    // à la fin il y a b boules bleues et 1 seule rouge
endfunction
```

13. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$: sachant que $[N=n]$ est réalisé, alors on connaît le nombre n de variables dont T est le maximum, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(T \leqslant x) = \mathbb{P}_{[N=n]}\big(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant x\big) = \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]\big)$$

N est indépendante des X_i qui sont mutuellement indépendantes entre elles

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(T \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \times \mathbb{P}(X_2 \leqslant x) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant x)$$

$$= \big(F(x)\big)^n \qquad \text{puisque les } X_i \text{ ont toutes la même fonction de répartition } F$$

b) On calcule alors, pour tout réel x, $\mathbb{P}(T \leqslant x)$ grâce à la formule des probabilités totales et le système complet d'événement $\big([N=n]\big)_{n\geqslant 2}$ associé à N :

$$\mathbb{P}(T \leqslant x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}_{[N=n]}(T \leqslant x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(F(x)\big)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(F(x)\big)^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi\big(F(x)\big)$$

14. On suppose dans cette question uniquement, que la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0;1[$.

a. La fonction `Scilab` demandée doit d'abord simuler une valeur n de N avec la fonction précédente `simuleN()` : cela détermine le nombre de simulations de la loi uniforme sur $]0;1[$ que l'on doit réaliser (dans une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ par exemple), et dont T est alors la valeur maximale :

```
function T = simuleT()
    n = simuleN()
    U = grand(1,n,'unf',0,1)
    T = max(U)
endfunction
```

b. La fonction `mystere()` construit 3 échantillons de 1000 simulations chacun de la variable aléatoire T, et en calcule à chaque fois la moyenne (empirique donc) ; elle renvoie le vecteur-ligne des trois moyennes obtenues.

Les trois moyennes affichées sont toutes très proches de $0.75 = \dfrac{3}{4}$, ce qui suggère que l'espérance de T prend cette valeur.

c. La fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_i est, dans cette question, définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Ainsi, d'après **13.**b) : pour tout réel x, $\quad \mathbb{P}(T \leqslant x) = \varphi\big(F(x)\big) = \begin{cases} \varphi(0) = 0 + 1.\ln(1) = 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0;1[\\ \varphi(1) = 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

d. Sous sa forme obtenue à la question précédente, la fonction de répartition $F_T : \ x \mapsto \mathbb{P}(T \leqslant x)$ de la variable aléatoire T est :

- De classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ comme fonction constante sur chacun de ces deux intervalles.
- De classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $]0;1[$ car c'est le cas de la fonction φ (vu dans la partie A).

  La fonction F_T est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 et en 1.

- Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F_T(x) = \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0 + 1\ln(1) = 0 = F_T(0) = \lim_{x\to 0^-} F_T(x)$, donc F_T est continue en 0.

  De même : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = 1$ (vu en **1.**) donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F_T(x) = 1 = F_T(1) = \lim_{x\to 1^+} F_T(x)$, donc F_T est aussi continue en 1.

Finalement, la fonction de répartition de T est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : T est bien une variable à densité, et une densité de T est définie par dérivation de F_T là où c'est possible.

La fonction $f_T : x \mapsto \begin{cases} \varphi'(x) = -\ln(1-x) & \text{si} x \in [0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de T.

e. La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente. La fonction f_T est nulle en-dehors de l'intervalle $[0;1[$, donc on est ramené à étudier la convergente simple de l'intégrale $\displaystyle\int_0 1x\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

Comme φ' n'est pas définie en 1, on pose $a \in]0;1[$ et on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^a x\varphi'(x)\mathrm{d}x$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & \longrightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \varphi'(x) & \longrightarrow & v(x) = \varphi(x) \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0;1[$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^a x\varphi'(x)\mathrm{d}x = \Big[x\varphi(x)\Big]_0^a - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x = a\varphi(a) - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Or on a vu que $\lim_{a\to 1^-} \varphi(a) = 1$ et que l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{4}$, donc l'intégrale $\int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x$ converge : la variable aléatoire T admet une espérance qui vaut :

$$E(T) = \int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x = 1.\varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ce qui correspond bien à la valeur conjecturée en **14**.a).

15. On suppose dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) D'après le cours, la fonction de répartition de cette loi est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) On distingue alors deux cas pour calculer $\mathbb{P}(T \leqslant x) = \varphi\big(F(x)\big)$ pour tout réel x :

- Soit $x < 0$ et alors : $\quad P(T \leqslant x) = \varphi(0) = 0.$

- Soit $x \geqslant 0$, et alors $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ appartient à l'intervalle $[0;1[$, donc

$$\forall t \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(T \leqslant x) = \varphi(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}\ln\left(e^{-\lambda x}\right) = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$$

c) La fonction de répartition F_T de T calculée précédemment est :

- de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $]-\infty;0[$ comme fonction constante.
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

  Donc F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

- De plus : $\lim_{x\to 0^+} F_T(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} = 1 - (1 + 0).e^0 = 1 - 1 = 0.$

  Comme $F_T(0) = 0 = \lim_{xto0^-} F_T(x)$, la fonction F_T est aussi continue en 0.

  Ainsi F_T est continue sur $\mathbb{R}$, donc finalement, T est une variable à densité.

Une densité f_T de T est alors obtenue par dérivation de F_T là où c'est possible ; une telle densité g est par exemple définie par :

Pour tout $x < 0$, $g(x) = 0$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$g(x) = 0 - \left(\lambda.e^{-\lambda x} + (1 + \lambda x).(-\lambda).e^{-\lambda x}\right) = -\lambda.e^{-\lambda x} + \lambda.e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

d) La variable aléatoire T admet alors une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme g est nulle sur $]-\infty;0[$ et positive sur $[0;+\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^2.x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Or X_1 suivant la loi exponentielle de paramètre λ, admet pour densité la fonction $f_{X_1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda.e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^2.x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} x^2.f_{X_1}(x)\mathrm{d}x$ apparaît bien comme l'intégrale $\lambda E(X_1^2)$, d'après le théorème de transfert.

On sait d'ailleurs d'après le cours, que X_1 admet un moment d'ordre 2, donc l'intégrale précédente converge ; on en déduit donc que T admet une espérance qui vaut :

$$E(T) = \lambda E(X_1^2) = \lambda\big(V(X_1) + E(X_1)^2\big) = \lambda.\Big(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\Big) \quad \text{soit :} \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} + 1$$

PROBLÈME 2

Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a,b,c)$ par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

PARTIE A : Généralités

1. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, il est clair que la matrice $M(a,b,c)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème de cours admis en ECE.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Supposons par l'absurde que la matrice $M(a,b,c)$ admette une seule valeur propre λ_0 : comme on l'a vu, puisqu'elle est diagonalisable, alors cette matrice est semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres : $M(a,b,c)$ serait donc semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, qui est en fait $\lambda_0.I_3$.

Il existerait donc $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M(a,b,c) = PDP^{-1} = P(\lambda_0.I_3)P^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} \iff M(a,b,c) = \lambda_0.I_3$$

$M(a,b,c)$ serait donc carrément diagonale, ce qui est évidemment absurde vue sa définition !

On conclut donc que $M(a,b,c)$ n'admet jamais une unique valeur propre.

b) Comme $M(a,b,c)$ est une matrice carrée d'ordre 3, elle admet au plus trois valeurs propres distinctes.

Comme elle est diagonalisable, elle admet au moins une valeur propre, et on vient de voir qu'elle ne peut pas en admette une seule.

On conclut donc que $M(a,b,c)$ admet soit deux, soit trois valeurs propres distinctes.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M(a,b,c) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$.

a) La base $\mathscr{B}' = (e_2,e_1,e_3)$ est simplement obtenue à partir de $\mathscr{B}$ en permutant les deux premiers vecteurs de la base. On peut donc directement écrire, en lisant dans $M(a,b,c)$ la façon dont $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ s'écrivent en fonction de e_1, e_2, e_3 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_2) & f(e_1) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{array}$$

On constate qu'il s'agit de la matrice $M(b,a,c)$.

b) Les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ représentent donc le même endomorphisme f, dans des bases différentes : elles ont par conséquent les mêmes valeurs propres (qui sont aussi celles de f).

c) Il suffit d'appliquer le même procédé que précédemment en trouvant une autre base bien choisie : $\mathscr{B}'' = (e_1, e_3, e_2)$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de f est :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_3) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{array} \end{array} = M(a, c, b)$$

Ainsi pour la même raison que précédemment, $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c).

PARTIE B : Cas où $\text{Card}(\{a, b, c\}) = 1$.

4. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0, 0, 0)$ qui est donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Le calcul classique du carré de cette matrice donne :
$J^2 = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \\ 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que :

$J^2 = 3.J \iff J^2 - 3.J = 0_3$ et donc que $P(X) = X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de J.

b) Les valeurs propres *possibles* de J sont alors les racines de $P(X) = X(X-3)$, qui sont évidentes quand on écrit ce dernier sous forme factorisée :

$$\text{Sp}(J) \subset \{0, 3\}$$

On vérifie ensuite si ces deux seules valeurs propres possibles, le sont effectivement :

- Pour $\lambda = 0$: $J - 0.I_3 = J$ n'est évidemment pas inversible puisqu'elle a trois colonne nulles, donc 0 est bien valeur propre de J.

  Le sous-espace propre $E_0(J)$ est l'ensemble des matrices-colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que :

  $$JX = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+y+z = 0 \iff x = -y-z$$

  de sorte que : $E_0(J) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

  On a trouvé une famille génératrice de $E_0(J)$ constituée de 2 vecteurs propres non colinéaires, qui forment donc une famille libre, et donc une base du sous-espace propre.

- Pour $\lambda = 3$: On peut plus rapidement voir ici que $J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, donc que $X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est non nul, est un vecteur propre de J associé à la valeur propre 3 qui appartient donc bien au spectre de J :

$$\mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}$$

On a ainsi $\dim E_3(J) \geqslant 1$, et comme d'après le théorème spectral :

$\dim E_0(J) + \dim E_3(J) \leqslant 3 \iff \dim E_3(J) \leqslant 1$ puisque $\dim E_0(J) = 2$, alors :

$1 \leqslant \dim E_3(J) \leqslant 1 \iff \dim E_3(J) = 1$, et X_0 qui est non nul, forme une base de ce sous-espace propre (qu'on a ainsi évité de calculer avec un système).

c) On savait déjà que $J = M(0,0,0)$ est diagonalisable : les calculs précédents prouvent que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ diagonale, et $P = \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres pour J, obtenue en réunissant des bases des deux sous-espaces propres.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Il est assez clair que : $M(a,a,a) = \begin{pmatrix}1+a&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a\end{pmatrix} = a.I_3 + J$, de sorte que si on développe le membre de droite de l'égalité demandée :

$$P(a.I_3 + D)P^{-1} = a.PI_3P^{-1} + PDP^{-1} = a.I_3 + J = M(a,a,a) \qquad CQFD$$

b) La relation précédente signifie que la matrice $M(a,a,a)$ est semblable, via la matrice de passage P, à la matrice $a.I_3 + D = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a+3\end{pmatrix}$.

Cela signifie donc que $M(a,a,a)$ est diagonalisable (on le savait déjà) et que ses valeurs propres sont :

$$\mathrm{Sp}\big(M(a,a,a)\big) = \{a, a+3\}$$

c) La matrice $M(a,a,a)$ est inversible si et seulement si 0 n'est **pas** valeur propre de cette matrice, donc :

$$M(a,a,a) \text{ est inversible } \iff a \neq 0 \text{ et } a \neq -3$$

Or avec $a = b = c$: $ab + ac + bc + abc = 3a^2 + a^3 = a^2(3+a)$, et d'après la règle du produit nul :

$$3a^2 + a^3 \neq 0 \neq a^2(3+a) \neq 0 \iff a \neq 0 \text{ et } a \neq -3 \iff M(a,a,a) \text{ est inversible}$$

Donc la marice $M(a,a,a)$ vérifie bien la propriété $(*)$.

PARTIE C : Cas où $\mathrm{Card}(\{a,b,c\}) = 2$.

6. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$ est non nul.
On note $C = M(0,0,c)$.

a) La matrice $C = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1+c\end{pmatrix}$ est clairement non-inversible puisqu'elle possède deux colonnes égales : par conséquent, 0 est bien une valeur propre de C.

b) Soit λ un réel non nul.

i. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$CX = \lambda.X \iff \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+(1+c)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + (1+c)z = \lambda z \end{cases}$$

par identification des coefficients. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne alors le système équivalent :

$$\begin{cases} 0 = \lambda(y-x) \iff 0 = y - x \iff y = x \text{ puisque } \lambda \neq 0 \\ x + x + z = \lambda x \\ x + x + (1+c)z = \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda-2)x \\ 2x + (1+c)(\lambda-2)x = \lambda(\lambda-2)x \end{cases}$$

On regroupe tout à gauche dans la dernière équation où on peut factoriser par x, et on obtient :

$$\begin{aligned} 2x + (1+c)(\lambda-2)x - \lambda(\lambda-2)x = 0 &\iff \big(2 + (\lambda-2) + c(\lambda-2) - \lambda(\lambda-2)\big)x = 0 \\ &\iff \big(-\lambda^2 + (1+c+2)\lambda + 2 - 2 - 2c\big)x = 0 \\ &\iff \big(\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c\big)x = 0 \end{aligned}$$

en multipliant les 2 membres par (-1). On a ainsi bien démontré l'équivalence :

$$CX = \lambda X \iff \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda-2)x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c\big)x = 0 \end{cases}$$

ii. Par définition : λ est valeur propre de C si et seulement s'il existe une solution *non-nulle* à l'équation matricielle $CX = \lambda X$.

Le système précédent, équivalent à $CX = \lambda X$, fait clairement apparaître que x ne peut pas être nul, sinon y et z le sont aussi, et $X = 0_{3,1}$ n'est alors pas un vecteur propre pour la valeur propre λ.

Donc : (λ est valeur propre de C) $\implies \big(\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c\big) = 0$.

Réciproquement, si $\big(\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c\big) = 0$, alors le système $CX = \lambda X$ est équivalent à $\begin{cases} y = x \\ z = (\lambda-2)x \end{cases}$ qui possède alors une infinité de solutions : tous les vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda-2 \end{pmatrix}$ qui est non nul, ce qui prouve que λ est bien valeur propre de C.

D'où, par double implication, l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } C \iff \big(\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c\big) = 0$$

c) Le trinôme du second degré $\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c$ a pour discriminant :

$$\Delta = (-(c+3))^2 - 4 \times 1 \times 2c = c^2 + 6c + 9 - 8c = c^2 - 2c + 9 = (c-1)^2 + 8 > 0,$$

donc l'équation possède deux solutions distinctes et non nulles (puisque le terme constant est $2c \neq 0$) qu'on note λ_1 et λ_2 et qui sont donc deux valeurs propres distinctes non nulles de C.

Comme on n'oublie pas que 0 est aussi valeur propre de C, alors cette matrice admet les trois valeurs propres distinctes $0, \lambda_1, \lambda_2$.

Et comme C est une matrice carrée d'ordre 3, elle n'admet pas d'autre valeur propre.

7. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a) On a alors :

$$M(a,a,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c-a \end{pmatrix} = a.I_3 + M(0,0,c-a)$$

b) D'après ce qui précède, comme $a \neq c \iff c-a \neq 0$, alors $M(0,0,c-a)$ admet trois valeurs propres distinctes dont 0, est diagonalisable et semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, via une matrice de passage inversible P, telle que $M(0,0,c-a) = PDP^{-1}$.

Mais alors :

$$M(a,a,c) = a.I_3 + M(0,0,c-a) = a.PI_3P^{-1} + PDP^{-1} = P(a.I_3+D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & a+\lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

ce qui prouve que $M(a,a,c)$ admet pour valeurs propres les nombres a, $a+\lambda_1$, $a+\lambda_2$ qui sont bien distincts deux à deux.

c) On connaît l'équivalence : $M(a,a,c)$ est inversible $\iff$ 0 n'est pas valeur propre de $M(a,a,c)$, ce qui est donc équivalent au fait que :

$$\begin{aligned} a \neq 0 \text{ et } a+\lambda_1 \neq 0 \text{ et } a+\lambda_2 \neq 0 &\iff a \neq 0 \text{ et } -a \text{ n'est pas valeur propre de } M(0,0,c-a) \\ &\iff a \neq 0 \text{ et } a^2 + (c-a+3)a + 2(c-a) \neq 0 \end{aligned}$$

D'après l'équivalence obtenue en **6.**b.ii. avec $c-a$ à la place de c. Or :
$a^2 + (c-a+3)a + 2(c-a) = a^2 + ac - a^2 + 3a + 2c - 2a = a + ac + 2c$, donc :

$$M(a,a,b) \text{ est inversible } \iff a \neq 0 \text{ et } a+ac+2c \neq 0 \iff a(a+ac+2c) \neq 0 \iff a^2+2ac+a^2c \neq 0$$

puisque deux réels sont tous deux non nuls si et seulement si leur produit est non nul.
Or quand $a = b$: $ab+ac+bc+abc = a^2+2ac+a^2c = a(a+2c+ac)$ est égal au dernier produit écrit : l'équivalence précédente $\big(M(a,a,c)$ est inversible $\big) \iff a^2+2ac+a^2c \neq 0$ correspond donc bien à la propriété $(*)$, que vérifie donc la matrice $M(a,a,c)$.

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}(\{a,b,c\}) = 2$: la question **3.** a bien établi que les valeurs propres de la matrice $M(a,b,c)$ ne dépendant pas de l'ordre des trois paramètres ; ceci est encore valable lorsque deux d'entre eux sont égaux : $M(a,a,c)$, $M(a,c,a)$ et $M(c,a,a)$ ont les mêmes 3 valeurs propres, toutes distinctes d'après l'étude qui vient d'être faites.

Les rôles des trois paramètres a,b,c étant parfaitement symétriques dans l'expression $ab+ac+bc+abc$ (ce qui signifie qu'échanger deux de ces paramètres laisse inchangée cette expression), on en déduit que dans tous les cas où deux des trois paramètres (a,b,c) sont égaux, $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifie la propriété $(*)$.

PARTIE D : Cas où $\mathrm{Card}(\{a,b,c\}) = 3$.

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}.$$

a) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty; a[$, $]a;b[$, $]b;c[$, $]c;+\infty[$ qui composent le domaine D, et :

$$\forall x \in D, \quad g'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{1}{(x-c)^2}$$

Cette dérivée est clairement toujours strictement négative, donc g est strictement décroissante sur chacun des 4 intervalles cités plus haut.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0+0+0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c}$.

$\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a-c}$ est un nombre fini, donc $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$.

Le même raisonnement s'applique pour les limites en b et en c, à gauche et à droite ; on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

b) On distingue donc clairement grâce à ce tableau, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 1$ sur le domaine D :

- Sur $]-\infty; a[$, la fonction g est strictement décroissante, majorée par sa limite en $-\infty$ qui vaut 0 : l'équation $g(x) = 1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

- Sur chacun des intervalles $]a;b[$ et $]b;c[$, la fonction g est strictement décroissante, continue (car de classe $\mathcal{C}^1$), et 1 appartient à chacun des deux intervalles images, tous deux égaux à $]-\infty;+\infty[$: d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution λ_1 sur $]a;b[$, et une unique solution λ_2 sur $]b;c[$.

- Enfin sur $]c;+\infty[$, la fonction g est encore strictement décroissante et continue, et 1 appartient à l'intervalle-image $]0;+\infty[$: toujours d'après le même théorème, l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution λ_3 sur $]c;+\infty[$.

-

On a donc bien démontré que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3 sur le domaine D, qui vérifient : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$. On note $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix}$.

Alors :

$$M(a,b,c)X_\lambda = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{a}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{b}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-c} \\ \dfrac{1}{\lambda-a} + \dfrac{1}{\lambda-b} + \dfrac{1}{\lambda-c} + \dfrac{c}{\lambda-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\lambda-a} + g(\lambda) \\ \dfrac{b}{\lambda-b} + g(\lambda) \\ \dfrac{c}{\lambda-c} + g(\lambda) \end{pmatrix}$$

Or $g(\lambda) = 1$ puisqu'on a justement considéré une solution λ de cette équation, donc en réduisant à chaque fois au même dénominateur :

$$M(a,b,c)X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{a+\lambda-a}{\lambda-a} \\ \dfrac{b+\lambda-b}{\lambda-b} \\ \dfrac{c+\lambda-c}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{\lambda-a} \\ \dfrac{\lambda}{\lambda-b} \\ \dfrac{\lambda}{\lambda-c} \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda-a} \\ \dfrac{1}{\lambda-b} \\ \dfrac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix}$$

ce qui signifie : $M(a,b,c)X_\lambda = \lambda.X_\lambda$, et donc que le vecteur X_λ qui est non nul, est un vecteur propre de la matrice $M(a,b,c)$ pour la valeur propre λ.

d) Ce calcul et le résultat qui en découle, sont valables pour toute solution λ de l'équation $g(x) = 1$: on en déduit donc que λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois valeurs propres distinctes de $M(a,b,c)$.

Et comme $M(a,b,c)$ est une matrice carrée d'ordre 3, elle n'en a pas d'autres.

10. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Card}(\{a,b,c\}) = 3$.

a) On a traité à la question **9.** le cas où les trois paramètres distincts a,b,c sont rangés dans l'ordre strictement croissant, et dans ce cas $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Si on sait seulement que a,b,c sont trois réels distincts : il y a bien une seule façon de les ranger dans l'ordre strictement croissant (exemple : si $a = 3, b = -2$ et $c = 1$ alors $b < c < a$).

Or le travail fait à la question **3.** assure que les valeurs propres d'une matrice $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre de a,b,c : on en déduit donc que $M(a,b,c)$ admet les mêmes valeurs propres que la matrice du même type obtenue en rangeant les trois paramètres dans l'ordre strictement croissant, c'est-à-dire trois valeurs propres distinctes.

b) On repart encore et toujours de l'équivalence : $\big(M(a,b,c) \text{ est inversible} \iff \big(0 \notin \text{Sp}\big(M(a,b,c)\big)\big)$.

Or ici, le fait pour un réel λ, d'être valeur propre $M(a,b,c)$, est équivalent au fait de vérifier l'égalité : $g(\lambda) = 1$.

Dcnc a contrario :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \text{ est inversible } &\iff 0 \notin \text{Sp}\big(M(a,b,c)\big) \iff g(0) \neq 1 \iff -\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq 1 \\ &\iff -\frac{bc+ac+ab}{abc} \neq 1 \iff -(ab+ac+bc) \neq abc \\ &\iff ab+ac+bc+abc \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que ces matrices $M(a,b,c)$ vérifient la propriété $(*)$.

11. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) On repère facilement que A est en fait la matrice $M(0,1,2)$: comme les réels $0,1,2$ sont deux à deux distincts, la matrice A tombe sous le coup de ce qui a été démontré juste avant à la question **10.**, c'est-à-dire que A est bien inversible.

b) On note α la plus grande valeur propre de A.

i. Si on reprend l'étude de la fonction g réalisée à la question **9.** avec $a = 0,\ b = 1,\ c = 2$, donc avec $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, alors :

- On sait que la solution α (qui correspond à λ_3) appartient à l'intervalle $]2; +\infty[$, sur laquelle g est strictement décroissante.

- On peut alors comparer les images par g de 4, α et 5 par cette fonction particulière g :

$$g(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3+4+6}{12} = \frac{13}{12}, \quad g(\alpha) = 1, \quad g(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{12+15+20}{60} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Il est donc clair que : $\quad g(4) > g(\alpha) > g(5) \iff 4 < \alpha < 5$ par stricte décroissance de g sur $]2; +\infty[$.

ii. On termine alors ce sujet fleuve par une mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie qui permet de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près :

```
1   function alpha = valeur_approchee()
2       x = 4
3       y = 5
4       while (y-x) > 10^(-3)
5           m = (x+y)/2
6           if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) < 1 then
7               y = m
8           else
9               x = m
10          end
11      alpha = (x+y)/2
12      end
13  endfunction
```

On laissait le choix ici du sens de l'inégalité pour la condition du test `if` : l'idée principale de cet algorithme est que le réel cherché α sera toujours compris entre les deux bornes `x` et `y` qui doivent toujours vérifier la condition de leurs valeurs initiales : $\quad g(\mathtt{x}) > 1 > g(\mathtt{y})$.

On calcule à chaque fois le point milieu $\mathtt{m} = \dfrac{\mathtt{x}+\mathtt{y}}{2}$ pour éliminer la moitié[1] de l'intervalle de recherche : si $g(\mathtt{m}) < 1$, alors on garde le demi-intervalle de gauche en donnant à `y` la valeur de `m` (redéfinition de la borne de droite), sinon c'est `x` qui prend cette valeur (sélection du demi-intervalle de gauche).

Il était donc aussi correct d'écrire, pour les lignes 6 à 10 du script :

```
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) > 1 then
            x = m
        else
            y = m
        end
```

Ces opérations sont répétées tant que les deux bornes de l'intervalle de recherche sont à une distance l'une de l'autre, supérieure à 10^{-3} : dès que ce n'est plus le cas, `x` et `y` sont alors à une distance inférieure à 10^{-3} non seulement l'un de l'autre, mais aussi et surtout du réel α qu'elles encadrent !

Enfin, la ligne 11 du script signifie que le résultat rendu correspond au calcul du point milieu du dernier intervalle de recherche : la solution sera mécaniquement plus proche encore de la valeur α, mais sans qu'on puisse déterminer pour le coup (puisqu'on ne fait plus de test sur son image par g) s'il s'agit d'une valeur approchée par défaut ou par excès de α.

1. Rappelons qu'étymologiquement, *dicho-tomie* signigie : "couper en deux" !