MATHÉMATIQUES - Edhec E 2001

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

E désigne un espace vectoriel réel sur $\mathbb{R}$, rapporté à sa base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$$f_a(e_2) = 0, \ \ f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. a) La définition des trois images par f des vecteurs de la base (e_1, e_2, e_3) permet d'en déduire la matrice de l'endomorphisme dans cette base :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_a(e_1) & f_a(e_2) & f_a(e_3) \end{array} \\ A_a = & \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Le calcul matriciel donne : $A_a^2 = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3.

b) La question précédente montre que $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de A_a. On sait alors que les valeurs propres *possibles* de A_a sont les racines de P, ce qui réduit les candidates à 0.
Et 0 est bien valeur propre de A_a car cette matrice n'est pas inversible, vu qu'elle possède une colonne nulle.
On en conclut que 0 est bien la seule valeur propre de A_a.

c) Comme on l'a déjà dit, A_a n'est pas inversible. Mais A_a n'est pas la matrice nulle, donc $\text{Ker}(A_a)$ n'est pas l'ensemble E tout entier, c'est-à-dire que le sous-espace propre associé à la seule valeur propre de A_a n'est pas de dimension 3, celle de E. Par conséquent, A_a n'est pas diagonalisable.

2. On pose $u_1 = a.e_1 + e_2 - a.e_3$.

a) La famille $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est consituée de 3 vecteurs dans un espace E de dimension 3 : il suffit donc de montrer que c'est une famille libre pour que ce soit une base de E.

On pose donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.e_2 + \lambda_3.e_3 = 0_E \iff a.\lambda_1.e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2).e_2 + (\lambda_3 - a.\lambda_1).e_3 = 0_E$$

On s'est donc ramené à une combinaison linéaire nulle de la base $\mathcal{B}$, la liberté de $\mathcal{B}$ implique donc :

$$\begin{cases} a.\lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - a.\lambda_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \text{ (car } a \neq 0) \\ \lambda_2 & = -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 & = \lambda_1/a = 0 \end{cases}$$

On a bien montré que : $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.e_2 + \lambda_3.e_3 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre, et c'est une base de E.

b) Les trois images suivantes permettent de déduire la matrice de f dans cette nouvelle base :

$$\begin{cases} f_a(u_1) &= a.f_a(e_1) + f_a(e_2) - a.f_a(e_3) = 0 \quad \text{car } f_a(e_1) = f_a(e_3) \text{ et } f_a(e_2) = 0 \\ f_a(e_2) &= 0 \\ f_a(e_3) &= a.e_1 + e_2 - a.e_3 = u_1 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = K = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_a(u_1) & f_a(e_2) & f_a(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$.

a) L'égalité d'endomorphismes est équivalente à l'égalité de leurs matrices dans une même base donnée, ici en se plaçant dans la base $\mathcal{B}'$:

$$g \circ g = f_a \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_a) \iff M^2 = K$$

On a alors :

$$MK = MM^2 = M^3 = M^2M = KM$$

Une matrice commute toujours avec toutes ses puissances !

b) La question précédente montre que M doit commuter avec K (condition nécessaire). On cherche donc de façon générale, toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que :

$$\begin{aligned} MK = KM &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a &= i \\ d &= 0 = g = h \end{cases} \text{ par identification des coefficients} \end{aligned}$$

On se restreint donc déjà aux matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b, c, e, f sont des réels choisis a priori de façon indépendante.

Il reste alors à exprimer la condition : $M^2 = K$, qui n'est pas équivalente à $MK = KM$!
Toujours par identification des coefficients, en repartant de la dernière forme obtenue de M :

$$M^2 = K \iff \begin{pmatrix} a^2 & (a+e)b & 2ac + bf \\ 0 & e^2 & (a+e)f \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 &= 0 \\ e^2 &= 0 \\ (a+e)b &= 0 \\ (a+e)f &= 0 \\ 2ac + bf &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ e &= 0 \\ bf &= 1 \end{cases}$$

En renommant respectivement x, y, z les coefficients b, c, f, on obtient bien que $M^2 = K$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où x, y, z sont trois réels tels que $xz = 1$.

4. On a précédemment raisonné par condition *nécessaire*, c'est-à-dire que les différentes étapes nous ont conduites à écrire l'*implication* :

$$g \circ g = f_a \Longrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ xz = 1 \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions maintenant la *réciproque* : soient donc x, y, z trois réels tels que $xz = 1$ et g l'endomorphisme de E tel que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K \quad \text{vu que} \quad xz = 1$$

L'égalité des matrices représentatives dans une même base donne bien l'égalité d'endomorphismes :

$$g \circ g = f_a$$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents $R_1,\ R_2$ et R_3 de probabilités respectives $P_1,\ P_2$ et P_3. On a donc $P_1+P_2+P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1,2,3\},\ 0 < P_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1,2,3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. a) Par définition : chaque variable aléatoire X_i contribue d'une unité $(X_i = 1)$ au décompte du nombre d'événements R_i qui ne sont pas sortis au bout de n épreuves, si c'est le cas, et n'en a aucune $(X_i = 0)$ sinon. C'est bien en faisant la somme $X = X_1+X_2+X_3$ qu'on obtient le nombre total d'événements R_i qui ne sont toujours pas obtenus au bout de n épreuves.

   b) Soit $i \in \{1,2,3\}$: l'événement $[X_i = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement R_i n'est toujours pas réalisé après n épreuves indépendantes.
   Par conséquent : $P(X_i = 1) = (1 - P_i)^n$ et $P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - (1 - P_i)^n$ sont les deux probabilités de la loi de X_i.

   c) La linéarité de l'espérance donne tout simplement :

   $$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n$$

   puisque X_i, en tant que variable de Bernoulli, a pour espérance : $E(X_i) = P(X_i = 1)$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n.$$

2. a) On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$: alors puisque $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, on a $1 - P_3 = x + y$, et en effet :

   $$E(X) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n = f(x,y)$$

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[\times]0,1[$ puisque c'est une fonction polynômiale en les deux variables x et y.

1. a) Calcul des dérivées partielles d'ordre 1 : pour tout couple (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$,

$$\partial_1(f)(x,y) = -n(1-x)^{n-1} + n(x+y)^{n-1} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = -n(1-y)^{n-1} + n(x+y)^{n-1}$$

b) Les points critiques de f sont les solutions sur $]0,1[\times]0,1[$ du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -n(1-x)^{n-1} + n(x+y)^{n-1} = 0 \\ -n(1-y)^{n-1} + n(x+y)^{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-x)^{n-1} = (x+y)^{n-1} \\ (1-y)^{n-1} = (x+y)^{n-1} \end{cases}$$

Or ici, x et y sont éléments de $]0,1[$, donc $1-x$, $1-y$ et $x+y$ sont strictement positifs : comme la fonction puissance $t \mapsto t^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le système est par conséquent équivalent à :

$$\begin{cases} 1-x = x+y \\ 1-y = x+y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1-2x \\ 1-1+2x = x+1-2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1-2x = 1/3 \\ 3x = 1 \iff x = 1/3 \end{cases}$$

La fonction f admet bien un unique point critique, à savoir $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2. a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\times]0,1[$, son unique point critique est aussi le seul point de ce domaine ouvert où elle peut admettre un extrémum local.
Pour le vérifier, f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[\times]0,1[$, on y calcule ses dérivées partielles d'ordre 2 ; pour tout couple (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = (n-1)n(1-x)^{n-2} + (n-1)n(x+y)^{n-2}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = (n-1)n(1-y)^{n-2} + (n-1)n(x+y)^{n-2}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = (n-1)n(x+y)^{n-2} = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) \qquad \text{d'après le théorème de Schwarz}$$

On obtient ainsi, la matrice hessienne de f au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) & \partial^2_{1,2}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\ \partial^2_{2,1}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) & \partial^2_{2,2}(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & (n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ (n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & 2(n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \end{pmatrix}$$

Notons ici : $\quad A = (n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$, les valeurs propres de $H = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ sont les réels λ tels que :

$$\begin{aligned} H - \lambda.I_2 \text{ est non-inversible } &\iff \det\begin{pmatrix} 2A-\lambda & A \\ A & 2A-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (2A-\lambda)^2 - A^2 = 0 \iff (2A-\lambda-A)(2A-\lambda+A) = 0 \\ &\iff (A-\lambda)(3A-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de H sont sont A et $3A$. Or, puisque $n \geqslant 2$ d'après l'énoncé,
$A = (n-1)n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ est strictement positif, donc les deux valeurs propres de H sont strictement positives :

on en déduit qu'au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, la fonction f admet un extrémum local, et que c'est un minimul local.

b) Lorsque $x = P_1 = \frac{1}{3}$ et $y = P_2 = \frac{1}{3}$, alors $P_3 = 1 - P_1 - P_2 = \frac{1}{3}$ aussi, et dans ce cas :

$$E(X) = 3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. La fonction f est continue et positive sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, elle est positive sur $[0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions positives ($x \geqslant 0$ et $e^{-x^2/2} > 0$), et continue sur $]0, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues sur cet intervalle.
   La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (il n'est pas difficile de vérifier qu'elle l'est).
   De plus, pour tout réel $A > 0$:
   $$\int_0^A x.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \left[e^{-x^2/2}\right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$$
   donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1$,
   donc f est bien une densité de probabilité.

La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.

2. a) La fonction de répartition F de X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$;
   deux cas évidents sont à distinguer :
   - Si $x < 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$
   - Si $x \geqslant 0$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1 - e^{-x^2/2}$.

   b) Il est évident que μ ne peut être négatif vu que F est nulle sur $]-\infty, 0[$, on cherche donc μ positif tel que :
   $$P(X \leqslant \mu) = F(\mu) = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{-\mu^2/2} = \frac{1}{2} \iff e^{-\mu^2/2} = \frac{1}{2} \iff -\mu^2/2 = -\ln(2) \iff \mu = \sqrt{2\ln(2)}$$

3. On appelle *mode* de la variable aléatoire X, tout réel x en lequel f atteint son maximum.
   La fonction f est nulle sur $]-\infty, 0]$, donc ne peut pas atteindre un maximum sur cet intervalle.
   Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable et :
   $$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1.e^{-x^2/2} + x.(-x).e^{-x^2/2} = (1 - x^2).e^{-x^2/2}$$
   Comme pour $x > 0$: $1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x < 1$, la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, donc admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$ en $M_0 = 1$, le mode de X.

4. a) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x.f(x)$ est nulle (car f l'est) sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x.f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

Or on sait, d'après le cours sur la loi normale, que : si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors Y admet une espérance et une variance, valant $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$, qui est aussi égale à $E(Y^2)$ d'après la formule de Koenig-Huygens $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$.

Cela signifie que l'intégrale : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1, d'après le théorème de transfert.

La fonction $x \mapsto x^2.e^{-x^2/2}$ étant paire, on peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty} x^2.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

On a bien démontré ainsi que X admet une espérance, valant $E(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

b) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, donc si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, d'après le théorème de transfert.

Comme la fonction $x \mapsto x^2.f(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2.f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

Soit A un réel strictement positif, dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} x^3.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$, on pose :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^2 & \longrightarrow & u'(x) = 2x \\ v'(x) = x.e^{-x^2/2} & \longrightarrow & v(x) = -e^{-x^2/2} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\forall A > 0, \quad \int_0^{A} x^3.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \left[-x^2.e^{-x^2/2}\right]_0^A + 2\int_0^{A} x.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = -A^2.e^{-A^2/2} + 2.\left(1 - e^{-A^2/2}\right)$$

Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^2.e^{-A^2/2} = 0 = \lim_{A\to+\infty} e^{-A^2/2}$,

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 qui vaut $E(X^2) = 2$, et donc une variance qui vaut, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{2\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

PROBLÈME

Partie 1

On définit la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t}$$

La fonction inverse étant également continue sur $]0, +\infty[$, donc sur $[k, k+1]$ pour tout entier naturel k non nul, la croissance de l'intégrale ($k < k+1$) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1}.(k+1-k) = \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (et même : $n \geqslant 2$) ; le passage à la somme dans cette inégalité lorsque k varie de 1 à $n-1$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \iff \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Par le changement d'indice $j = k+1$ dans la somme de gauche, et d'après la relation de Chasles dans le membre de droite. L'inégalité se réécrit encore :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leqslant \Big[\ln(t)\Big]_1^n \iff v_n - 1 \leqslant \ln(n) \iff v_n \leqslant \ln(n) + 1$$

Inégalité valable pour tout entier $n \geqslant 2$, et dont on vérifie facilement qu'elle est aussi vraie pour $n = 1$ (cas d'égalité).

Partie 2

1. a) On souhaite ici démontrer que la suite (u_n) est bien définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

Soit donc $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$".

$\boxed{\text{I.}}$ $\mathcal{P}(0)$ est évidemment vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n > 0$:

dans ce cas, $\frac{1}{u_n}$ existe et est strictement positif : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est donc bien défini et strictement positif (somme de deux réels strictement positifs) : ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée à $n = 0$, et elle est héréditaire : d'après le théorème de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite dans son ensemble est donc parfaitement définie, et à termes tous strictement positifs.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ d'après ce que l'on vient de voir.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}.$$

b) Soit maintenant n un entier naturel non nul, par sommation de la relation précédente pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(2 + \frac{1}{u_k^2})$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

ce qui donne bien la relation demandée par l'énoncé, puisque $u_0 = 1$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \geqslant 0$, ce qui donne bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 \geqslant 2n+1$, ou encore (puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant \sqrt{2n+1}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $\lim\limits_{n+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$, on conclut grâce au théorème de comparaison des limites que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

3. a) Le résultat précédent dit que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k^2 \geqslant 2k+1 > 0$, donc par inverse :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{u_k^2} \leqslant \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k}$$

Par sommation pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}$$

Pour faire apparaître u_n^2 dans le membre de gauche de l'inégalité, il faut ajouter aux deux membres : $2n + 1 + \dfrac{1}{u_0^2} = 2n+2$, ce qui donne, étant donné que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} v_{n-1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2}.v_{n-1}$$

ce qui est bien la relation demandée par l'énoncé.

b) Comme, d'après la question 2. de la partie 1. : pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_{n-1} \leqslant \ln(n-1) + 1$, on a :

$$2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1} \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1)+1) = 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

ce qui, compte tenu de la relation de la question précédente, donne bien :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1).$$

c) Les questions 2.c) et 3.b) de cette partie permettent ainsi d'écrire l'encadrement suivant, vrai pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$2n+1 \leqslant u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

D'où (division membre à membre par $2n > 0$) :

$$\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{u_n^2}{2n} \leqslant 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{2n} = 1$, et puisque : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(n-1)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$ (par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$) avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées), on en déduit (par le théorème d'encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n-1)}{n} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{5}{4n} + \dfrac{\ln(n-1)}{4n} = 1 + 0 + 0 = 1$.

Le théorème d'encadrement permet ainsi de conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n^2}{2n}\right)$ est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{2n} = 1$.

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{u_n^2}{2n}} = \sqrt{1}$, soit ($\sqrt{u_n^2} = |u_n| = u_n$ car $u_n > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$, ce qui exprime que u_n est *équivalent* à $\sqrt{2n}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$

Partie 3

1.
```
function y=suite(n)
     u=1
     for i=1:n
          u = u+1/u
     end
y=u
endfunction
```

2. a)
```
u=1; n=0;
while u < 100
     u = u+1/u
     n = n+1
end
disp(n)
```

À l'exécution, le programme renvoie la valeur $n = 4998$, ce qu'on ne pouvait pas vérifier sans la machine, et justifie donc l'étude ci-dessous !

b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$.

D'après les propriétés du logarithme népérien, et puisque $5000 = 5 \times (10)^3 = 5^4 \times 2^3$:

$$\ln(5000) = \ln(5^4) + \ln(2^3) = 4\ln(5) + 3\ln(2) < 4 \times 1,61 + 3 \times 0,70 = 8,54$$

c) si $n \leqslant 4995$: d'après la question 3.b) de la Partie 2., on a alors :
$u_n^2 \leqslant u_{4995}^2$ (car la suite (u_n) est croissante et positive), et

$$u_{4995} \leqslant 2 \times 4995 + 2,5 + 0,5.\ln(4994) \leqslant 9992,5 + 0,5.\ln(5000)$$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, ce qui donne :

si $n \leqslant 4995$, alors $u_n^2 \leqslant 9992,5 + 4,27 = 9996,77 < 10000$, ce qui implique : $u_n < 100$.

Donc , pour avoir $u_n \geqslant 100$, puisque la suite est croissante, il faut que n soit supérieur à 4995.

Maintenant, pour $n = 5000$: $u_{5000} \geqslant \sqrt{2.5000+1} > \sqrt{10000} = 100$.

Donc le premier entier tel que $u_n \geqslant 100$ est au plus égale à $n = 5000$.

On peut donc affirmer que l'entier n cherché est compris entre 4995 et 5000.