N3-00120
362654
Maths T

Code épreuve : 285	**Nombre de pages :** 12
Session : 2020	

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

$\boxed{1}$ a. $\cancel{(A^3 = A)}$ Calculons A^2 : $A^2 = A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 3 & 3 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{4} & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 3 & 3 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{4} & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9+\frac{9}{4} & \frac{27}{2} & 18 \\ 9 & 9+\frac{9}{4} & 9+\frac{9}{2} \\ \frac{27}{4} & 9 & \frac{9}{4}+9 \end{pmatrix}$$

D'où $A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 9+\frac{9}{4} & \frac{27}{2} & 18 \\ 9 & 9+\frac{9}{4} & 9+\frac{9}{2} \\ \frac{27}{4} & 9 & \frac{9}{4}+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ 3 & 3 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{4} & 3 & 3 \end{pmatrix} \times 3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

$= \frac{9}{4} \times I$ donc $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b. On a $A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4} I$

D'où $A(A^2 - 3A) = \frac{9}{4} I$ et $A . \frac{4}{9}(A^2 - 3A) = I$

Donc A est inversible avec $A^{-1} = \frac{4}{9}(A^2 - 3A)$

c. 1. A = [1 1/2 1 ; 2 1 1/2 ; 1 2 1]
2. Disp(A)

d. Inv(A)

e.

$\boxed{2}$ ~~Mo~~ ⟶ Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 3$: $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4} A^{n-3}$

* Initialisation : Pour $n = 3$, on a $A^3 = 3A^2 + \frac{9}{4} I$. Donc la propriété est vraie pour $n = 3$ selon la réponse trouvée dans 1) a.

* Hérédité : Supposons que $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4} A^{n-3}$ pour $n \geqslant 3$, et montrons que c'est vrai pour $(n+1)$:

On a d'après l'hypothèse de récurrence : $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4} A^{n-3}$

Donc : $A . A^n = 3 A . A^{n-1} + \frac{9}{4} A . A^{n-3}$

est équivalent à : $A^{n+1} = 3A^n + \frac{9}{4} A^{n-2}$

D'où propriété vraie pour $(n+1)$

* Conclusion : Pour tout $n \geqslant 3$, $A^n = 3 A^{n-1} + \frac{9}{4} A^{n-3}$

→ Complétons le script Scilab :

3. A = [1/2 1 ; 2 1 1/2 ; 1 2 1]

7. I = A
8. A = B
9. B = C

3] a. Considérons ~~(Pour)~~ un polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4}$. Si A admet au moins une valeur propre, alors elle ou elles seront la racine(s) de son polynôme annulateur.

Or on remarque bien que P est un polynôme annulateur de A, car :

$$A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4} I \iff A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4} I = 0$$

D'où, si λ est une valeur propre de A, elle sera la racine de P et ainsi on aura : $X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4} = 0$

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$. Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}\right)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Donc $f'(x)$ s'annule en 0 et 2.
D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{9}{4}$	↘	$-\frac{25}{4}$	↗ 0 ↗	$+\infty$

(*) Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisse une seule fois entre 2 et $+\infty$.

Et puisque $f(3) > 0$

Alors on peut en déduire que sa racine est entre 2 et 3

D'après le tableau de variation de f et (*), alors $P(X)$ admet une seule racine comprise entre 2 et 3, qui est λ_0, valeur propre unique de A

4 a. → Montrons que $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4} I = O$:

On a $A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4} I = O$.

Donc $P^{-1}.A^3 - 3P^{-1}.A^2 - \frac{9}{4} P^{-1} = O$

et $P^{-1}.A^3.P - 3P^{-1}.A^2.P - \frac{9}{4} P^{-1}.P = O$

équivalent à . $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4} I = O$ (car $D^n = P^{-1}A^nP$ et démontrable par récurrence triviale)

→ Nous en déduisons que $D = A$

a. Si $D = A$, alors A devra être matrice diagonale avec λ_0 comme valeur diagonale.
Or on a bien $A \neq D$

Donc, par l'absurde, nous concluons que A n'est pas diagonalisable

Exercice 2 :

1 Les variables aléatoires X et Y suivent la loi géométrique car on répète l'épreuve de Bernoulli, dont le succès et l'apparition de "pile" ou "face", respectivement, jusqu'à l'apparition du premier succès.

Ainsi, le paramètre de leur loi géométrique est $\frac{1}{2}$.

D'où : $P(X=k) = P(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

et : $E(X) = E(Y) = 2$; $V(X) = V(Y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

Code épreuve : 285 **Nombre de pages :** 12 **Session :** 2020

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) $P([X=1]\cap[Y=1])$ correspond à la probabilité qu'on ait "pile" et "face" en même temps au premier lancer, donc évènement impossible.
Ainsi $P([X=1]\cap[Y=1])=0$

Or $P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$ d'où $P(X=1)\times P(Y=1)=\frac{1}{4}$

Donc $P([X=1]\cap[Y=1])\neq P(X=1)\times P(Y=1)$

Les deux variables aléatoires sont indépendantes.

3) a) $P([X=1]\cap[Y=j])$ pour tout $j\geqslant 2$ correspond à la probabilité d'avoir "face" au deuxième, ou troisième ... tirages avec "pile" au premier tirage.
Or $P(Y=j)$ est aussi la probabilité d'avoir "face" une première fois qu'à partir du deuxième tirage, et donc qu'au premier on a eu "pile".
Ainsi : $P([X=1]\cap[Y=j])=P(Y=j)$ pour tout $j\geqslant 2$.

b) Pour tout $i\geqslant 2$, $P([X=i]\cap[Y=1])$ est la probabilité d'avoir "pile" une première fois qu'au deuxième, troisième ... tirage après avoir eu "face" au premier.
Or $P(X=i)$ est aussi la probabilité d'avoir "pile" une première fois qu'à partir du deuxième tirage (car $i\geqslant 2$), et donc on aura eu "face" au premier.
D'où $P([X=i]\cap[Y=1])=P(X=i)$ pour tout $j\geqslant 2$.

c. D'après les deux question précédentes : $\cancel{P}$ $P([X=i] \cap (Y=j)] = P(Y=j)$
$= P(X=i)$

	1		i
1	0		

$(XY)(\Omega) = [1, \max(i,j)]$

d. $\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m} \left(P(X=i \cap Y=j)\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m} P(X=i) = \sum P(Y=j) = E(X) = E(Y) = 2$
$x \, i \times j$

Donc $E(XY) = 2$

e. $cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 2 - 4 = -2$

On a $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

$\boxed{5}$ 1. X = 0,
2. Y = 0 ;

7. Y = Y + 1

12. X = X + 1

Exercice 3.

1) a- $\frac{1}{t} > \frac{1}{t+1}$

b- On a $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d- $f''(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \cdot \frac{(x-1)}{x^2} > 0$ sur $[1, +\infty[$, donc f est convexe sur $[1, +\infty[$

e- L'équation de la tangente est : $y = f'(x) \cdot (x-1) + f(1)$

$= \frac{e^x}{x} \cdot (x-1) + e$

2) a- Calculons $g'(t) = \left(\frac{e^t}{t^3}\right)' = \frac{e^t t^3 - 3t^2 e^t}{t^6} = \frac{e^t(t-3)}{t^4}$

t	1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	e	$\searrow$	$\frac{e^3}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a. $f(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x}\, dx$

Intégration par parties : $f(x) = \left[\frac{e^t}{x}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{x^2}\, dx$

$= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{x^2}\, dx$

b. $f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\, dt$

Intégration par parties : $f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \left[\frac{e^t}{x^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{2}{x^{-3}} e^x\, dx$

$= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(x)\, dx$

4) a. On a $0 \leq \int_1^3 g(t) \leq 2e$

et $0 \leq \int_3^x g(t)\, dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x$

Donc $0 \leq \int_1^x g(t)\, dt + \int_3^x g(t)\, dt \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x$

Ainsi $0 \leq \int_1^x g(t)\, dt \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x$

équivaut à $0 \leq 2\int_1^x g(t)\, dt \leq 4e + \frac{x-3}{x^2} 2e^x$

puis $\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq 4e - 2e + \frac{x-3}{x^3} 2e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}$

Finalement $\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq 2e + \frac{x-3}{x^3} e^x \cdot 2 + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}$

b. Selon la question précédente : $\frac{1}{x} - \frac{2x}{e^{x-1}} \leq \frac{x}{e^x} f(x) \leq \frac{2x}{e^{x-1}} + \frac{x-3}{x^2} + \frac{1}{x}$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} f(x) = 1$

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 12

Session : 2020

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 4 :

1) a - Selon la règle donnée, si le mobile est au point $k-1$ à l'instant $(n-1)$ alors il sera en k à l'instant n avec une probabilité de $\frac{k}{k+1}$.

Ainsi cela se resume en $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i=i)=\frac{i}{i+1}$

La règle nous donne aussi le protocole à suivre pour passer de $k-1$ à 0 entre $(n-1)$ et n.
D'où :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i=0)=\frac{1}{i+1}$$

b - $(U=k)$ correspond au mouvement du mobile vers 0 à l'instant k pour la première fois. Donc :

$$(U=k)=(A_1=0)\cap(A_2=1)\cap(A_3=2)\ldots\cap(A_{k-1}=k-1)\cap(A_k=0)$$

c - $\{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ est un système complet d'événements.

donc $P(U=n)=\sum_{k=1}^{n} P_{A_{i-1}=i-1}(A_i=0)\times P(A_{i-1}=i-1)+P_{A_{i-1}=0}(A_i=0)\,P(A_{i-1}=0)$

$$=\frac{1}{k(k+1)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d. Simplifions $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

et ona

$$\sum_{k=1}^{N} P(U=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} P(U=k) = \lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$

e. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U=k) = 1$ alors $P(U=0) = 0$ (car les bornes de la somme qui vaut 1)

Ce qui est aussi logique car U ne correspond pas à l'instant initial 0.

$\boxed{3}$ 3. while hasard == 0
5. hasard = grand(1, 1, 'uin', 1, k+1)

$\underline{2}$ $P(U \geq n)$ correspond à ce que le mobile ne change pas sa place 0 après l'avoir prise à l'instant n, et ce jusqu'à l'infini. Donc selon la règle, le mobile fera cela avec une probabilité $\frac{1}{n+1}$

D'où $P(U \geq n) = \frac{1}{n+1}$

4 a. → f est positive sur $[0,+\infty[$ car elle est le quotient de deux fonctions positive, Et elle est constante sur $]-\infty,0[$.
Donc f est positive ou constante sur $\mathbb{R}$.

→ f est continue sur $]0,+\infty[$ car c'est le rapport entre deux fonction continues, Et elle est constante donc continue sur $]-\infty,0[$

On a $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \end{cases}$ sont des limites réelles

Donc f est continue par morceaux

→ Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{+\infty}$$

Et pour A réel : $\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1$

D'où $\lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = 1$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Donc f est bien une densité de probabilité.

b. Pour $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0$$

Pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Bilan :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} \text{ sinon} \end{cases}$$

5 a- $\lfloor T \rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ car c'est la partie entière de réels. Donc avec $\lfloor T \rfloor + 1$, N prendra ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Si $N = n$, alors $T < \lfloor T \rfloor + 1 = n$

et $\lfloor T \rfloor = n - 1 \leqslant T$

D'où pour $N = n$, on a $n - 1 \leqslant T < n$

Ainsi $P(N=n) = P(n-1 \leqslant T < n)$

b- $P(N=n) = P(n-1 \leqslant T < n) = F(n) - F(n-1)$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c- Puisque $P(U=k) = \frac{1}{k(k+1)}$ et $P(N=k) = \frac{1}{k(k+1)}$, donc U et N suivent la même loi. La commande scilab simulant la loi U, elle peut aussi simuler celle de N.