MATHÉMATIQUES - Edhec E 2008

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx.$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. a) La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (avec $1+e^x > 0$ pour tout réel x).

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f_n''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 - (-e^x).2e^x.(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

b) Les calculs précédents prouvent que $f_n'(x)$ a le même signe que $e^x - 1$.
Comme $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, la fonction f_n' est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Ainsi, f_n' admet un minimum en $x = 0$ qui vaut : $f_n'(0) = \dfrac{-1}{(1+1)^2} + n = n - \dfrac{1}{4} > 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$.
On a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1+0$, et $n \in \mathbb{N}^*$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ (de la forme "$1-\infty$").
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^x = +\infty$, donc par inverse et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b) Il est immédiat d'écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - nx = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$,

donc (C_n) admet une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = nx}$ en $+\infty$.

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) - nx = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$,

donc (C_n) admet une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = nx+1}$ en $-\infty$.

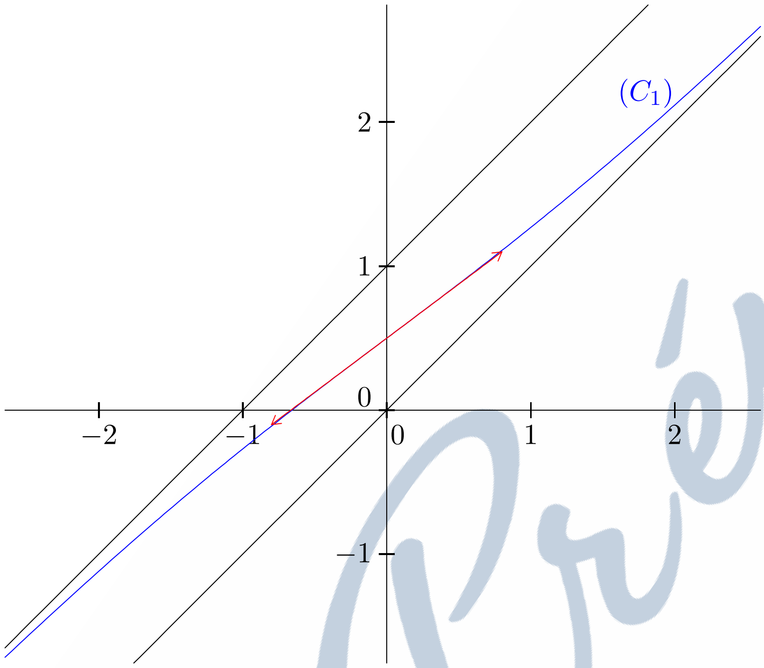
c) La courbe (C_n) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 si et seulement si f_n'' s'annule et change de signe en x_0 (f_n étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$).
Au vu des calculs précédents, $f_n''(x)$ est du même signe que $e^x - 1$, qui s'annule et change de signe en $x_0 = 0$.
On peut donc conclure que (C_n) admet un unique point d'inflexion A_n, de coordonnées :

$$(0, f_n(0)) = (0, \frac{1}{2})$$

On peut aussi dire que f_n est concave sur $]-\infty; 0]$ (car $e^x - 1 \leqslant 0$ sur cet intervalle), et convexe sur $[0; +\infty[$.
Au point d'inflexion, la courbe *traverse* sa tangente.

d) Équation de la tangente à (C_1) au point d'inflexion, d'abscisse 0 :

$$y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0) \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$



3. a) La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$ qui contient 0. Le théorème de la bijection assure donc que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n \in \mathbb{R}$.

b) Montrons l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
On ne connaît pas explicitement u_n et la seule information exacte connue est : $f_n(u_n) = 0$, on compare donc les images :
$f_n(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} + n(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0$ car $1 + e^{-1/n} > 1$, et $f_n(0) = \frac{1}{2}$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(-\frac{1}{n}) < 0 = f_n(u_n) < f_n(0)$. La stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}$ permet bien de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

c) L'encadrement précédent donne, selon le théorème du même nom : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) Par définition, u_n est le seul réel qui vérifie la relation :

$$f_n(u_n) = 0 \iff \frac{1}{1+e^{u_n}} + n.u_n = 0 \iff n.u_n = -\frac{1}{1+e^{u_n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{1+e^{u_n}} = -\frac{1}{1+e^0} = -\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} n.u_n$$

Cela donne en particulier l'équivalence : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n.u_n = 1 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

1. a) Les calculs matriciels donnent :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}, \qquad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -16 \\ -4 & -4 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}, \qquad A(A-2I)^2 = 0_3$$

On en déduit que le polynôme $P(X) = X(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Les valeurs propres *possibles* de A sont donc les racines de P, à savoir 0 et 2 :

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 2\}.$$

b) On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $f(u)$ est représenté par : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

De même : $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donc : $f(v) = 2v$.

Les deux vecteurs u et v étant non nuls, ces résultats prouvent que 0 et 2 sont bien valeurs propres de f, u et v étant des vecteurs propres respectivement associés.

Finalement : $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}$, c'est-à-dire que 0 et 2 sont les seules valeurs propres de f.

c) Le fait que 0 est valeur propre de f suffit pour conclure que f n'est pas injective, donc pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On considère le vecteur $w = (-2, 0, 1)$.

a) La famille (u, v, w) est constituée de trois vecteurs : comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit donc de prouver que c'est une famille libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient donc a, b, c trois réels tels que :

$$a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff a.(2,1,-2) + b.(3,1,-2) + c.(-2,0,1) = (0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 3b & - & 2c & = & 0 \\ a & + & b & & & = & 0 \\ -2a & - & 2b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 3b & - & 2c & = & 0 \\ & & 2b & - & c & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & & b & - & c & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & 3b & - & 2c & = & 0 \\ & & 2b & - & c & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & & & & c & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. \iff a = b = c = 0$$

La famille (u, v, w) est bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Le calcul matriciel $A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ montre que : $f(w) = (-1, 1, 0)$.

Un coup d'oeil à l'énoncé incite à vérifier que : $1.v + 2.w = (-1, 1, 0) = f(w)$.

La matrice représentative de f dans la base (u, v, w) est bien :

$$\begin{array}{cccc} f(u) & f(v) & f(w) & \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \end{array}$$

c) Comme $\text{Card}\big(\text{Sp}(f)\big) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, la seule façon de conclure ici est de raisonner sur la dimension des deux sous-espaces propres. Le calcul de T permet l'argumentation efficace suivante :

- D'après le théorème du rang :
$\dim E_0(f) = \dim \text{Ker}(f) = 3 - \text{rg}(f) = 3 - \text{rg}(T) = 3 - 2 = 1$ puisque T a une colonne nulle, les deux autres étant non proportionnelles.

- De même :

$$\dim E_2(f) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \text{rg}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \text{rg}(T - 2I) = 3 - \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1,$$

toujours parce que cette matrice a une colonne nulle et les deux autres sont non-proportionnelles.

Ainsi : $\dim E_0(f) + \dim E_2(f) = 1 + 1 = 2 < 3$, **donc f n'est pas diagonalisable.**

3. a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul matriciel donne : $N^2 = 0_3$, et par conséquent, $N^k = 0_3$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Les calculs donnent aussi : $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = DN$, donc N et D commutent, et on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nD^{n-1}N$$

b) Comme la matrice D est diagonale : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$,

et $n.D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On peut donc conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c) On a réalisé à la question 2. un changement de base qui implique, via la formule associée, la relation matricielle : $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w).

La matrice P est bien sûr inversible comme matrice de passage, et la méthode de Gauss donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On peut ici rédiger la récurrence habituelle, mais on doit savoir également donner les arguments suivants, finalement bien plus efficaces !

Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $T = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)$, d'après les propriétés de la représentation matricielle :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^n)$ et $T^n = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^n)$, c'est-à-dire que A^n et T^n représentent le même endomorphisme f^n dans des bases différentes.

Et comme P est la matrice de passage entre ces deux bases, la formule de changement de base donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PT^nP^{-1}$$

e) Il suffit donc de terminer le calcul explicite en multipliant trois matrices maintenant connues :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad PT^n = \begin{pmatrix} 0 & 3.2^n & 3n.2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ -2^{n+1} & (-n+1)2^n & \end{pmatrix}$$

$$\text{et : } \quad A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3.2^n & 3.2^{n+1} + 2(3n2^{n-1} - 2^{n+1}) & 3.2^{n+1} + 3n2^{n-1} - 2^{n+1} \\ 2^n & 2^{n+1} + n2^n & 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ -2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^{n+1} + 2^{n+1} & -2^{n+2} - n2^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Soit, en regoupant les termes : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n & (3n+2).2^n & (4+\frac{3}{2}n).2^n \\ 2^n & (n+2).2^n & (2+\frac{1}{2}n).2^n \\ -2^{n+1} & -(n+1).2^{n+1} & -(n+3).2^n \end{pmatrix}.$

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout réel $A \in \mathbb{R}^+$:

$\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1.$ Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 1 - \frac{1}{1+A} = 1$, on en conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ converge, et vaut 1.

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

   a) La fonction f est tout d'abord bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque :

   $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 1+|x| \geqslant 1 > 0.$

   La parité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ donne :

   $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{1}{2(1+|-x|)^2} = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2} = f(x)$, donc f est bien une fonction paire.

b) On vérifie les trois conditions pour que f soit une densité de probabilité :

- $\star$ Comme on l'a vu, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, elle est également continue sur cet intervalle comme quotient, somme et produit de fonctions continues.
- $\star$ Il est aussi évident que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ par positivité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$.
- $\star$ La parité de f sur $\mathbb{R}$ permet de dire que l'intégrale (doublement) impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

  Or : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$ au vu du calcul réalisé à la question 1 (ici $x \geqslant 0$ donc $|x| = x$).

  On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\times\frac{1}{2} = 1$.

Les trois conditions sont vérifiées : f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est elle aussi une variable aléatoire à densité, définie sur le même espace probabilisé.

a) La densité f ne s'annulant jamais sur '$\mathbb{R}$, on en déduit les intervalles/univers-images successifs :

$$X(\Omega) = \mathbb{R} \Longrightarrow |X|(\Omega) = \mathbb{R}^+ \Longrightarrow (1+|X|)(\Omega) = [1,+\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = \ln(1+|X|)(\Omega) = [0,+\infty[.$$

b) Conséquence directe du résultat précédent : pour tout réel $x \in]-\infty, 0[,\ G(x) = P(Y \leqslant x) = 0$.
Soit donc x un réel positif quelconque :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leqslant x) = P(\ln(1+|X|) \leqslant x) = P(1+|X| \leqslant e^x) \quad \text{par croissance stricte de exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(|X| \leqslant e^x - 1) = P(1-e^x \leqslant X \leqslant e^x - 1) \quad \text{puisque } e^x - 1 \geqslant 0 \text{ lorsque } x \geqslant 0 \\ G(x) &= F(e^x - 1) - F(1 - e^x) \end{aligned}$$

Et l'énoncé nous dit de ne pas aller plus loin...

c) On a admis que Y est une v.a.r. à densité, ce qu'il est facile de vérifier ici : f étant continue sur tout $\mathbb{R}$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et G est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et composée de fonctions de classe C^1, et sur $\mathbb{R}^{-*}$ comme fonction constante, avec enfin : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) - F(0) = 0 = G(0)$, donc G est bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier...

Bref, pour répondre à la question posée : on obtient une densité g de Y, par dérivation de G sauf en 0 où on choisit une valeur arbitraire positive.

Pour tout $x > 0$:

$$G'(x) = e^x.F'(e^x - 1) - (-e^x).F'(1-e^x) = e^x.[f(e^x-1) + f(1-e^x)] = 2e^x f(e^x - 1)$$

puisque f est une fonction paire.

$$\text{Bilan :} \quad g : x \mapsto \begin{cases} 2e^x.f(e^x-1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{est une densité de } Y.$$

d) En finissant de simplifier l'expression de $g(x)$ pour $x \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall x \geqslant 0,\ g(x) = 2e^x.f(e^x - 1) = 2e^x.\frac{1}{2(1+|e^x-1|)^2} = \frac{2e^x}{2(1+e^x-1)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}.$$

La densité $g: \ x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ caractérise la loi de Y :

Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

PROBLÈME

Partie 1 : Préliminaires

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   a) La fonction f a donc une dérivée f' continue sur $[0,1]$: par composition avec la valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$, $|f'|$ est une fonction continue et positive sur le segment $[0,1]$.
   À ce titre, elle admet un maximum positive sur $[0,1]$: on le note M si ce maximum est strictement positif, et sinon on prend n'importe quel réel $M > 0$: dans tous les cas, l'inégalité des accroissements finis permet d'écrire :
   $$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

   b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ quelconques : alors $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$ sont compris entre 0 et 1,
   et l'inégalité précédente s'applique avec $x = t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$ et $y = \dfrac{k}{n}$:
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$
   La valeur absolue dans le membre de droite, a été remplacée par une paire de parenthèses car $\dfrac{k}{n} \leqslant t \iff t - \dfrac{k}{n} \geqslant 0$.

   c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. L'inégalité précédente concerne des fonctions continues sur $[0,1]$, donc sur $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, donc par croissance de l'intégrale :
   $$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t$$
   L'intégrale de droite vaut : $\left[\dfrac{M}{2}\left(t - \dfrac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{M}{2n^2}$;
   par ailleurs, l'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne également :
   $$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| t - \frac{k}{n} \right| \mathrm{d}t$$
   où cette fois, l'intégrale du membre de gauche vaut : $\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t - \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{=1/n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   Par transitivité de l'inégalité, on a bien :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la somme dans l'inégalité précédente, pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Big| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2}$$

La somme de droite a un terme général constant, elle vaut : $\quad n \times \dfrac{M}{2n^2} = \dfrac{M}{2n}$.

Par ailleurs, l'inégalité triangulaire, pour les sommes cette fois, donne :

$$\Big| \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big) \Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big|$$

où la somme de gauche vaut cette fois : $\Big| \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big|$ d'après la relation de Chasles.

Ainsi, toujours par transitivité de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \Big| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big| \leqslant \frac{M}{2n}$$

e) D'après ce qui précède, et puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{2n} = 0$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \Big| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) \Big| = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$.

a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$: dans l'intégrale $I(p,q)$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= (1-x)^q &\longrightarrow\quad& -q(1-x)^{q-1} \\ v'(x) &= x^p &\longrightarrow\quad& v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc :

$$I(p,q) = \Big[\frac{1}{p+1} x^{p+1}(1-x)^q \Big] + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x = \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1)$$

puisque le crochet est nul : à chaque fois, l'un des deux facteurs est nul en $x=0$ et en $x=1$.

b) Par itération du processus précédent, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{q}{p+1} \times I_{p+1,q-1} \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times I_{p+2,q-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-2}{p+3} \times \dots \times \frac{1}{p+q} \times I_{p+q,0} \end{aligned}$$

Le deuxième indice a diminué q fois de suite d'une unité, tandis que le premier indice augmentait d'autant.

c) On a : $I_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$, et ainsi :

$$I(p,q) = \frac{q\times(q-1)\times(q-2)\times\ldots\times 1}{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times(p+q)\times(p+q+1)} = \frac{q!}{\dfrac{(p+q+1)!}{p!}} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

3. La notion de fonction *récursive* (basiquement : fonction qui s'appelle elle-même) n'est plus au programme depuis la dernière réforme de 2013, et d'intérêt limité dans le nouveau langage `Scilab` puisque celui-ci connaît la fonction `factorial`.

   On donne tout de même ici, par acquis de conscience, ladite fonction récursive demandée (tout à fait reconnue par `Scilab`), qui se contente de reprendre la relation obtenue à la question 2.a) :

```
function res = i(p,q)
    if q == 0 then
        res = 1/(p+1)
    else
        res = q/(p+1)*i(p+1,q-1)
    end
endfunction
```

   Sachant qu'un calcul direct avec des factorielles (non optimal cependant car ne tenant pas compte des simplifications possibles dans cette expression) de $I(p,q)$ est bien sûr, d'après 2.c) :

```
function res =i(p,q)
    res = factorial(p) * factorial(q)/factorial(p+q+1)
endfunction
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left[U_n = \dfrac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \dfrac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.

   On sait d'après le cours que : $E(X) = mp$, et aussi que $V(Y) = mp(1-p)$.

   Or d'après la formule de Koenig-Huygens :
$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \iff E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2,$$
   ce qui permet de calculer, grâce à la linéarité de l'espérance :
$$E\big(Y(Y-1)\big) = E(Y^2) - E(Y) = V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) = mp(1-p) + m^2p^2 - mp$$
$$= mp(1-p+mp-1) = mp(mp-p) = m(m-1)p^2$$

2. Lorsque $n=1$: U_1 est la variable certaine égale à 0, et la loi de X_1 conditionnellement à l'événement $[U_1 = 0]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m,0)$; cela signifie que : $P(X_1 = 0) = P_{[U_1=0]}(X_1 = 0) = 1$ et que pour tout $k > 0$, $P(X_1 = k) = P_{[U_1=0]}(X_1 = k) = 0$.

   La variable X_1 est donc certaine égale à 0.

   Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. a) Quel que soit l'événement $[U_n = \frac{k}{n}]$ réalisé, l'univers-image conditionnel de X_n est égal à $[\![0, m]\!]$.
Ainsi, dans l'absolu, $X_n(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
Pour tout $i \in [\![0, m]\!]$: on obtient la valeur de $P(X_n = i)$ via la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\left([U_n = \frac{k}{n}]\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$:

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = \frac{k}{n}) \times P_{[U_n = \frac{k}{n}]}(X_n = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

b) La somme $\sum_{i=1}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$ correspond à l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $(m, \frac{k}{n})$ (le terme pour $i = 0$ étant nul, il est ignoré dans la somme). Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = \frac{mk}{n}$$

La variable aléatoire X_n étant finie, elle admet une espérance qui vaut :

$$E(X_n) = \sum_{i=\cancel{0}1}^{m} i P(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \quad \text{interversion des symboles } \sum$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mk}{n} = \frac{m}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{m}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{m(n-1)}{2n}$$

c) Toujours d'après la première question de cette partie :
$\sum_{i=1}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$ correspond à la valeur de $E\big(Y(Y-1)\big)$ où Y suit la loi $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$: ainsi,

$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = m(m-1)\frac{k^2}{n^2}$$

L'espérance de $X_n(X_n - 1)$ est donnée, elle, par :

$$E\big(X_n(X_n-1)\big) = \sum_{i=\cancel{0}1}^{m} i(i-1) P(X_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(m-1) \frac{k^2}{n^2} = \frac{m(m-1)}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{m(m-1)}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

d) La variance de X_n est alors donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E\big(X_n(X_n-1)+X_n\big) - E(X_n)^2 = E\big(X_n(X_n-1)\big) + E(X_n) - E(X_n)^2 \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \frac{m^2(n-1)^2}{4n^2} \\
&= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1)+6mn(n-1)-3m^2(n-1)^2}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)}{12n^2} \times \big(2(m-1)(2n-1)+6n-3m(n-1)\big) \\
&= \frac{m(n-1)}{12n^2} \times \big(4mn-4n-2m+2+6n-3mn+3m\big) = \frac{m(n-1)}{12n^2} \times (mn+2n+m+2) \\
&= \frac{m(n-1)(m+2)(n+1)}{12n^2} = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}
\end{aligned}$$

puisqu'en effet, $(m+2)(n+1) = mn+2n+m+2$.

4. a) Pour tout entier $i \in [\![0,m]\!]$: $P(X_n = i) = \dfrac{1}{n}\dbinom{m}{i}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$ s'écrit sous la forme :

$\dbinom{m}{i} \times \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f :\ x \mapsto x^i(1-x)^{m-i}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Le résultat de la question 1.e) de la première partie, donne alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) &= \binom{m}{i}\int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}\,\mathrm{d}x \\
&= \binom{m}{i} I_{i,m-i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} \times \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} \quad \text{d'après 2.c), partie 1}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = \frac{1}{m+1}$$

Le résultat s'écrit : $\forall i \in [\![0,m]\!],\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = \frac{1}{m+1} = P(X = i)$ où X suit la loi uniforme discrète sur $[\![0,m]\!]$: la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers X.

b) Lorsque n tend vers $+\infty$: $(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{m\times n}{2n} = \dfrac{m}{2}$, ce qui signifie :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{m}{2}$, qui correspond bien à l'espérance $E(X)$ de la loi uniforme sur $[\![0,m]\!]$.

De même : $V(X_n) = \dfrac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{m(m+2)\times n^2}{12n^2} = \dfrac{m(m+2)}{12}$, donc :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = \frac{m(m+2)}{12}$, qui correspond bien à la variance $V(X)$ (rappelons que la variance de la loi uniforme générale sur $[\![a,b]\!]$ est : $\dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$, où $a=0$ et $b=m$).