MATHÉMATIQUES III - HEC E 2004

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

1. a) On rappelle que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 3+1 = 4$, la base canonique de cet espace vectoriel réel étant $(1, X, X^2, X^3)$.

b) On commence par vérifier ici la linéarité de f :
$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda.P+Q)(X) &= -3X(\lambda.P(X)+Q(X)) + X^2.(\lambda.P+Q)'(X) \\ &= \lambda.(-3X.P(X)) - 3X.Q(X) + X^2.(\lambda.P'(X)+Q'(X)) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda.(-3X.P(X)+X^2.P'(X)) + (-3X.Q(X)+X^2.Q'(X)) = \lambda.f(P)(X)+f(Q)(X) \end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que f est linéaire. Pour vérifier que cet un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$, il faut maintenant justifier que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Or tout polynôme P de E admet une écriture de la forme : $P(X) = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d.1$, donc par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= a.f(X^3) + b.f(X^2) + c.f(X) + d.f(1) \\ &= a.(-3X^4 + X^2.(3X^2)) + b.(-3X^3 + X^2.(2X)) + c.(-3X^2 + X^2.1) + d.(-3X + X^2.0) \\ f(P)(X) &= a.0 + b.(-X^3) + c.(-2X^2) + d.(-3X) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$, et donc que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

c) On a précédemment, en fait, déjà calculé les images par f des quatres vecteurs de la base canonique de E ! La matrice M de f dans cette base est donc immédiate :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

d) La matrice M est triangulaire inférieure et ses éléments diagonaux sont nuls, donc elle n'est pas inversible.
De plus, les valeurs propres d'une telle matrice sont ses éléments diagonaux, donc 0 est sa seule valeur propre.
Mais comme M n'est malgré tout pas la matrice nulle, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, à savoir $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas égal à E tout entier et M n'est donc pas diagonalisable.

En fait, ce type de matrice *strictement triangulaire* est toujours *nilpotente* !

On calcule : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^4 = 0_4$ et donc : $\forall n \geqslant 4,\ M^n = 0_4$.

e) Avec les calculs déjà faits :
$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \iff -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$
$\iff b = c = d = 0$ car un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Par conséquent :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a.X^3 |\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^3).$$

Comme (X^3) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ constituée d'un seul vecteur non nul, elle est libre et c'est donc une base du noyau.

f) On utilise aussi la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ pour obtenir une description de l'image :

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(-3X, -2X^2, -X^3, 0) = \mathrm{Vect}(X, X^2, X^3)$.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme de nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$. On veut montrer que $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E. Comme on l'a rappelé, $\dim(E) = 4$ et il s'agit bien d'une famille de 4 vecteurs de E, donc il suffit de démontrer que c'est une famille libre.
Soient donc a, b, c, d des réels tels que :
$$a.P + b.u(P) + c.u^2(P) + d.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$
En composant 3 fois de suite cette relation par l'application linéaire u, on obtient :
$$a.u(P) + b.u^2(P) + c.u^3(P) + d.u^4(P) = u(0_{\mathbb{R}_3[X]}) \iff a.u(P) + b.u^2(P) + c.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \quad (1)$$
$$a.u^2(P) + b.u^3(P) + c.u^4(P) = u(0_{\mathbb{R}_3[X]}) \iff a.u^2(P) + b.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \quad (2)$$
$$a.u^3(P) + b.u^4(P) = u(0_{\mathbb{R}_3[X]}) \iff a.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \quad (3)$$
Puisqu'on a pris $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$, $u^3(P) \neq 0_{\mathbb{R}_3[X]}$ et (3) donne donc : $a = 0$.
Mais alors (2) devient : $b.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \Longrightarrow b = 0$ pour la même raison.
La relation (1) se réduit alors à $c.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \Longrightarrow c = 0$,
et l'équation initiale devient enfin : $d.u^3(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \Longrightarrow d = 0$.
Finalement, la seule combinaison linéaire nulle de la famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est celle où $a = b = c = d = 0$: la famille est donc libre, et c'est bien une base de E.

b) Il y a bien des façons de rédiger cette question, suivant le degré de connaissance des endomorphismes *nilpotents*...

► Une façon possible est celle-ci : la base obtenue à la question précédente suggère d'écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$, qui est très simple puisque l'image de chacun des trois premiers vecteurs de cette base, est toujours le suivant, l'image du dernier est $u(u^3(P)) = u^4(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$! Donc :
$$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(P) & u(u(P)) & u(u^2(P)) & u(u^3(P)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P \\ u(P) \\ u^2(P) \\ u^3(P) \end{array} \end{array}$$
Les règles d'opérations sur les matrices représentatives des endomorphismes de E donnent alors :
$G = Mat_{\mathcal{B}}(g) = Mat_{\mathcal{B}}(id_E + u + u^2 + u^3) = I_4 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ après calculs des puissances de A.
On vérifie très facilement que c'est une matrice inversible, puisqu'elle est triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux tous non nuls. L'endomorphisme g qu'elle représente, est par conséquent bijectif, c'est bien un automorphisme de E.
Le calcul explicite de G^{-1} permettra peut-être d'identifier l'automorphisme réciproque g^{-1}, puisque toujours d'après les propriétés de la représentation matricielle : $Mat_{\mathcal{B}}(g^{-1}) = G^{-1}$.
Pour $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on résout le système : $GX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
$$GX = Y \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & & & & & = & a \\ x & + & y & & & & & = & b \\ x & + & y & + & z & & & = & c \\ x & + & y & + & z & + & t & = & d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = a \\ y & = b - x = b - a \\ z & = c - x - y = c - b \\ t & = d - x - y - z = d - c \end{array} \right.$$

$\iff X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{G^{-1}} Y$. On remarque donc que : $G^{-1} = I_4 - A$, ce qui exprime matriciellement et dans la base $\mathcal{B}$, l'égalité d'endomorphismes : $\boxed{g^{-1} = id_E - u}$.

► Si on est déjà au point sur ce type de questions, on peut se souvenir d'une démonstration de première année (!) sur la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, qui incite à calculer ici par analogie :

$$(id_E - u) \circ (id_E + u + u^2 + u^3) = id_E + u + u^2 + u^3 - u - u^2 - u^3 - u^4 = id_E - u^4 = id_E$$

ce qui suffit pour prouvert que g est un automorphisme de réciproque $g^{-1} = id_E - u$.

c) On démontre l'égalité d'ensembles : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(g - id_E)$ par double inclusion.

⋆ Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$ quelconque : alors $u(P) = 0_E$, ce qui implique : $u^2(P) = u(u(P)) = (0_E) = 0_E$, puis $u^3(P) = u^2(u(P)) = 0_E$ également, et donc :

$g(P) = id_E(P) + u(P) + u^2(P) + u^3(P) = id_E(P) \iff (g - id_E)(P) = 0_E$, donc : $P \in \mathrm{Ker}(g - id_E)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - id_E)$.

⋆ Soit $P \in \mathrm{Ker}(g - id_E)$: alors $(g - id_E)(P) = 0_E \iff g(P) - P = 0_E \iff g(P) = P \Longrightarrow P = g^{-1}(P)$ par bijectivité de P, se qui se réécrit au vu de la question précédente :

$P = (id_E - u)(P) \iff P = P - u(P) \iff u(P) = 0_E$, et par conséquent on a bien $P \in \mathrm{Ker}(u)$.

L'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}(g - id_E) \subset \mathrm{Ker}(u)$ est donc démontrée, ce qui achève de prouver l'égalité de ces deux noyaux.

d) La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ obtenue à la question 2.b) permet de répondre facilement à la question : G est en effet une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres (qui sont celles de g) sont ses éléments diagonaux, on vérifie don immédiatement que 1 est en effet la seule valeur propre de g.

► **Commentaire** : on ne peut pas inventer ce type de raisonnements, et toutes les initiatives que l'énoncé oblige à prendre - avec très peu d'indications - pour résoudre cet exercice... Il y a donc quelques incontournables à avoir régulièrement pratiqués, et l'étude des endomorphismes nilpotents est manifestement à ranger dans cette catégorie !

PROBLÈME

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction d'offre globale (des entreprises), et p le prix de vente du bien.
On suppose habituellement que la fonction $D:\ p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles est décroissante, et que la fonction $O:\ p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, est croissante.

Si l'équation : $O(p) = D(p)$ admet une solution p^*, on dit que p^* est un *prix d'équilibre du marché.*

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre ($O(p) > D(p)$) ou des excès de demande ($D(p) > O(p)$) au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n.
On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation : $D_n = D(p_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à l'instant n à un *prix anticipé à l'instant* $(n-1)$, noté $\widehat{p}_n$, selon la relation : $O_n = O(\widehat{p}_n)$, où p_0 peut être interprété comme un prix d'étude de marché.

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ D_n = O_n.$$

Dans toute cette partie, on considérera quatre paramètres réels strictement positifs a, b, c et d avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.
Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $D_n = a - bp_n$ et $O_n = c\widehat{p}_n + d$.

1. Dans cette question *uniquement*, les réels a, b, c et d ont les valeurs suivantes : $a = 40, b = 8, c = 2$ et $d = 20$.
   On suppose que p_0 et p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\widehat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.

   a) La condition d'existence d'un prix d'équilibre se traduit ainsi, très simplement et d'après l'énoncé, par l'équation : $a - bp = cp + d$, d'inconnue $p > 0$.
   Ici l'équation se réécrit : $40 - 8p = 2p + 20 \iff 20 = 10p \iff p = 2$, ce qui signifie bien qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^* = 2$.

   b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'énoncé donne : $\widehat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$, donc :

   $$\forall n \geqslant 2,\ p_n = \frac{1}{b}(a - d - c\widehat{p}_n) = \frac{1}{8}\left(20 - 2.(2p_{n-1} - p_{n-2})\right) = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2} \quad : \text{c'est tout !}$$

   c) La notion de fonction récursive n'étant plus explicitement au programme avec le nouveau langage `Scilab`, on propose ici deux scripts possibles pour le calcul de p_n :

```
function y=prix(p0,p1,n)
    if n==0 then
        y = p0
    elseif n==1 then
        y = p1
    else
        u=p0; v=p1;
        for k=2:n
            t = -v/2+u/4+5/2
            u=v
            v=t
        end
    end
    y=t
endfunction
```

```
function y=prix(p0,p1,n)
    P = zeros(1,n+1)
    P(1)=p0
    P(2)=p1
    for k=3:(n+1)
        p(k) = -p(k-1)/2+p(k-2)/4+5/2
    end
    y=P(n+1)
endfunction
```

d) On pose maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^* = p_n - 2$, ce qui s'écrit aussi : $p_n = v_n + 2$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n = p_n - 2 = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2} - 2 = -\frac{1}{2}(v_{n-1}+2) + \frac{1}{4}(v_{n-2}+2) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}$$

ce qui fait bien apparaître $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

e) L'équation caractéristique associée à cette suite est : $r^2 = -\frac{1}{2}r + \frac{1}{4} \iff r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$.
$\Delta = (\frac{1}{2})^2 - 4.(-\frac{1}{4}).1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0$, il y a donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{-1/2 - \sqrt{5}/2}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \text{ et } r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

f) On sait qu'alors la forme générale de v_n est : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \alpha.(r_1)^n + \beta.(r_2)^n$.
Les réels α et β sont alors solutions du système suivant, obtenu en écrivant les relations pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} \alpha.(r_1)^0 + \beta.(r_2)^0 = v_0 \\ \alpha.(r_1)^1 + \beta.(r_2)^1 = v_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = p_0 - 2 \\ \alpha.r_1 + \beta.r_2 = p_1 - 2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - r_1.L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha + \beta = p_0 - 2 \\ \beta(r_2 - r_1) = p_1 - r_1.p_0 + 2r_1 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = p_0 - \beta \\ \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.(p_1 - r_1.p_0 + 2r_1 - 2) \end{cases}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\quad p_n = v_n + p^* = \left[p_0 - \frac{2}{\sqrt{5}}.(p_1 - r_1.p_0 + 2r_1 - 2)\right].(r_1)^n + \frac{2}{\sqrt{5}}.(p_1 - r_1.p_0 + 2r_1 - 2).(r_2)^n + p^*$

g) Comme : $2 < \sqrt{5} < 3 \iff 1 < -1+\sqrt{5} < 2 \iff \frac{1}{4} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1}{2}$

et $-2 > -\sqrt{5} > -3 \iff -3 > -1-\sqrt{5} > -4 \iff -\frac{3}{4} > \frac{-1-\sqrt{5}}{4} > -1$, alors :

$-1 < r_1 < r_2 < 1$, et par conséquent, selon le cours sur les suites géométriques :

$\lim_{n\to+\infty} \alpha.(r_1)^n = 0 = \lim_{n\to+\infty} \beta.(r_2)^n = 0$, ce qui permet de conclure sans calcul supplémentaire :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 + 0 = 0, \text{ soit : } \quad \lim_{n\to+\infty} p_n = p^* = 2.$$

Cela signifie qu'au fil du temps, le prix de marché finit par se stabiliser autour du prix d'équilibre p^* (le bien nommé !). Attention, la suite (p_n) n'est pas forcément croissante, et le prix p_n peut dépasser p^* à certains instants n.

2. Soit β un paramètre constant vérifiant : $0 < \beta \leqslant 1$. On suppose dans cette question, que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont *adaptatives*, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\widehat{p}_n = \widehat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1}).$$

a) La relation qui lie p_n et $\widehat{p}_n$ exprime que l'offre est à tout instant égale à la demande :

$\forall n \in \mathbb{N},\ O_n = D_n \iff a - bp_n = c\widehat{p}_n + d \iff \boxed{p_n = \frac{1}{b}(a - d - c\widehat{p}_n)}$

b) On peut alors réécrire la relation de l'énoncé de cette question 3., en fonction de p_n et p_{n-1} seulement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{c}(a-d-bp_n) = \frac{1}{c}(a-d-bp_{n-1}) + \beta(p_{n-1} - \frac{1}{c}(a-d-bp_{n-1}))$$

$$\iff \cancel{\frac{a-d}{c}} - \frac{b}{c}p_n = \left(-\frac{b}{c} + \beta(1+\frac{b}{c})\right).p_{n-1} + \cancel{\frac{a-d}{c}} - \beta.\frac{a-d}{c}$$

$$\iff p_n = -\frac{c}{b} \times \left(-\frac{b}{c} + \beta.\frac{b+c}{c}\right).p_{n-1} + \beta.\frac{c}{b}.\frac{a-d}{c}$$

$$\iff p_n = \left(1 - \beta.\frac{b+c}{b}\right).p_{n-1} + \beta.\frac{a-d}{b}$$

c) On reprend la condition d'existence d'un prix d'équilibre, traduite par l'équation : $a - bp = cp + d$, d'inconnue $p > 0$.

$a - bp = cp + d \iff a - d = (c+b)p \iff p = \dfrac{a-d}{c+d}$; il y a donc une solution unique $p^* = \dfrac{a-d}{c+b}$, bien définie car on sait que $c > 0$ et $b > 0$, et strictement positive car $a > d$.

Le résultat de la question précédente exprime maintenant que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Pour calculer son expression explicite, on commence par résoudre l'équation :

$$\ell = \left(1 - \beta.\frac{b+c}{b}\right).\ell + \beta.\frac{a-d}{b} \iff \beta.\frac{b+c}{b}.\ell = \beta.\frac{a-d}{b} \iff \ell = \frac{b}{b+c} \times \frac{a-d}{b} \iff \ell = \frac{a-d}{b+c}$$

C'est-à-dire que $\ell = p^*$... ! On définit alors la suite auxiliaire $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = p_n - \ell$, et :

$$\begin{array}{lrclcll}
\forall n \in \mathbb{N}^*, & p_n & = & \left(1 - \beta.\dfrac{b+c}{b}\right).p_{n-1} & + & \beta.\dfrac{a-d}{b} & L_1 \\
 & \ell & = & \left(1 - \beta.\dfrac{b+c}{b}\right).\ell & + & \beta.\dfrac{a-d}{b} & L_2 \\
\hline
\forall n \in \mathbb{N}^*, & p_n - \ell & = & \left(1 - \beta.\dfrac{b+c}{b}\right).(p_{n-1} - \ell) & & & L_1 - L_2
\end{array}$$

La suite (w_n) est donc géométrique, de raison $\left(1 - \beta.\dfrac{b+c}{b}\right)$ et de premier terme $w_0 = p_0 - p^*$.

Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = (p_0 - p^*).\left(1 - \beta.\frac{b+c}{b}\right)^n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ p_n = w_n + p^* \boxed{= (p_0 - p^*).\left(1 - \beta.\frac{b+c}{b}\right)^n + p^*}$$

d) L'énoncé suppose ici que $p_0 \neq p^*$, sinon $w_0 = 0$, ce qui entraîne que $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que $p_n = p^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: si on choisit d'emblée le prix d'équilibre, il ne variera jamais ! (C'est donc un équilibre *stable*).

Dans le cas où $p_0 \neq p^*$, la suite (p_n) converge si et seulement si la suite (w_n) converge également (ces deux suites ne diffèrent tque d'une constante). Comme (w_n) est géométrique, elle converge si et seulement si sa raison $q = 1 - \beta.\dfrac{b+c}{b}$: $-1 < q < 1$ (dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$), ou $q = 1$ (cas exclu car $\beta > 0$, de même pour b et c). On cherche donc à transformer la condition :

$$-1 < 1 - \beta.\frac{b+c}{b} < 1 \iff -2 < -\beta.(1 + \frac{c}{b}) < 0 \iff \frac{2}{\beta} > \underbrace{1 + \frac{c}{b} > 0}_{\text{toujours vrai !}} \iff \boxed{\frac{2}{\beta} - 1 > \frac{c}{b}}$$

On a dit dans ce cas que : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n + p^* = p^*$.

Dans ce modèle également, les prix successifs convergent vers le prix d'équilibre p^*.

e) Lorsque $c < b$: $0 < \dfrac{c}{b} < 1$, or comme $0 < \beta \leqslant 1$: $\dfrac{2}{\beta} \geqslant 2$, et $\dfrac{2}{\beta} - 1 \geqslant 1 > \dfrac{c}{b}$, donc la condition de la question précédente est vérifiée et la suite (p_n) converge bien (vers p^*) dans ce cas.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$h_p(x) = px - \frac{x^3}{3}.$$

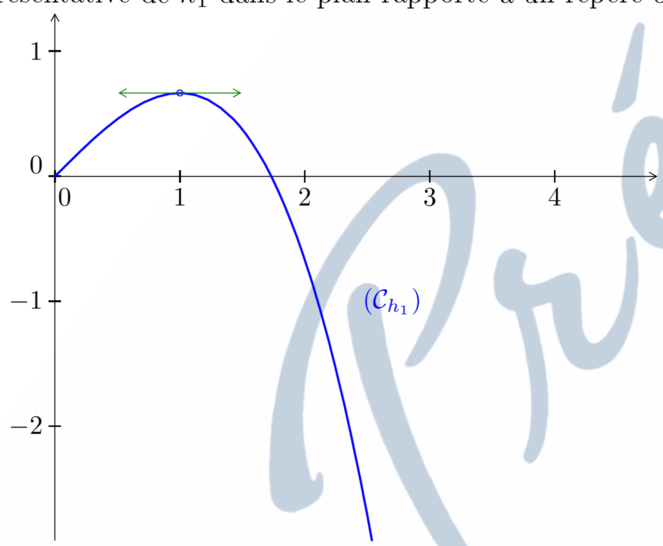
a) La fonction polynômiale h_p est bien sûr de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h_p'(x) = p - x^2$, et : $p - x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant p \iff 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{p}$ puisqu'on travaille ici sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction h_p sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\sqrt{p}$		$+\infty$
$h'_p(x)$		$+$	0	$-$	
h_p	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}.p\sqrt{p}$	$\searrow$	$-\infty$

$h_p(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^3}{3} = -\infty$.
De plus, la fonction h_p admet un maximum en $x = \sqrt{p}$, qui vaut :
$h_p(\sqrt{p}) = p.\sqrt{p} - \dfrac{p\sqrt{p}}{3} = \dfrac{2}{3}.p\sqrt{p}$.

b) Tracé de la courbe représentative de h_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé :



On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).
On modélise le *coût total de l'entrepris* par une fonction F définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F', telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x)$ équivalent à $s.x^r$ avec $s > 0$ et $r > 1$, lorsque x tend vers $+\infty$. On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F''(x) > 0$.
Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $\Pi_p(x) = px - F(x)$.

4. a) Au vu des hypothèses faites sur F : cette fonction est convexe, donc F' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Le théorème de limite monotone implique alors que F admet une limite quand x tend vers $+\infty$, soit finie, soit égale à $+\infty$.
Supposons que F' admette une limite finie L en $+\infty$; alors par croissance de F' sur $\mathbb{R}_+$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 = F'(0) \leqslant F'(x) \leqslant L.$$
On peut alors invoquer l'*Inégalité des Accroissements Finis*, qui donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0.(x-0) \leqslant F(x) - F(0) \leqslant L.(x-0) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant L.x$$
Mais alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{F(x)}{x^r} \leqslant L.x^{1-r}$. Puisque $r > 1$, alors $1 - r < 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} L.x^{1-r} = 0$,
et donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x^r} = 0$, ce qui contredit bien sûr l'équivalence $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} s.x^r$.
On a bien démontré que la seule possibilité est : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$.
Ainsi : la fonction F est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $F(0) = 0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} s.x^r = +\infty$ par équivalence.
Ainsi, F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans l'intervalle-image $[0, +\infty[$. On note S la bijection réciproque (appelée *fonction d'offre de l'entreprise*).

b) La fonction Π_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions qui ont cette propriété, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \Pi_p'(x) = p - F'(x),\ \text{puis}\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \Pi_p''(x) = -F''(x) < 0$$

puisque F est convexe. La fonction Π_p est bien concave sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que sa dérivée Π_p est strictement décroissante sur cet intervalle.

On sait aussi que : $\Pi_p'(0) = p - F'(0) = p > 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Pi_p'(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$.

Par conséquent : la fonction Π_p' est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $]-\infty, p]$ qui contient 0 : il existe donc, d'après le théorème de la bijection, un unique réel x_0 tel que : $\Pi_p'(x_0) = 0$.

La stricte décroissance de Π_p' implique alors que Π_p' s'annule en changeant de signe en x_0, et que la fonction Π_p est strictement croissante sur $[0, x_0]$, puis strictement décroissante sur $[x_0, +\infty[$: Π_p admet bien sur $\mathbb{R}_+$, un maximum atteint en un seul point.

5. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $M(p) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$ (la fonction M est la fonction de profit de l'entreprise).

a) On peut en fait donner une expression du réel x_0 évoqué plus haut, unique réel positif vérifiant : $\Pi_p'(x_0) = 0 \iff p - F'(x_0) = 0 \iff F'(x_0) = p \iff x_0 = S(p)$ par définition de la bijection réciproque S.

Mais alors : $M(p) = \Pi_p(x_0) = \Pi_p(S(p)) = p.S(p) - F(S(p))$.

b) On sait que la fonction F' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F''(x) > 0$. Le théorème de dérivabilité de la réciproque assure alors que la bijection réciproque S est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+,\ M'(p) = S(p) + p.S'(p) - S'(p).F'(S(p)) = S(p) + p.S'(p) - S'(p).p = S(p)$$

puisque S est la bijection réciproque de F'.

c) Le résultat précédent signifie que S est la fonction dérivée de M. Mais S est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme bijection réciproque de F' qui a les mêmes propriétés.

La fonction M est donc de classe C^1, de dérivée $M' = S$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: M est donc convexe sur $\mathbb{R}_+$.

De plus : $F'(0) = 0 \iff 0 = S(0)$, donc : $\forall p \in \mathbb{R}_+,\ M'(p) = S(p) \geqslant S(0) = 0$, ce qui signifie que M est également croissante sur $\mathbb{R}_+$.

6. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a) Soit i un entier de $[\![1, k]\!]$, et y un réel de $\mathbb{R}_+$: come la fonction M est convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, ce qui donne lieu à l'inégalité :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad M(x) \geqslant M'(y).(x - y) + M(y) \iff M(x) - M(y) \geqslant M'(y).(x - y)$$

Il suffit alors de remplacer x par $p^{(i)} \in \mathbb{R}_+$, et on a bien :

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad M(p^{(i)}) - M(y) \geqslant M'(y).(p^{(i)} - y).$$

b) De l'inégalité précédemment obtenue, on déduit :
$\forall i \in [\![1, k]\!], \forall y \in \mathbb{R}_+,\ M(p^{(i)}) \geqslant M'(y).(p^{(i)} - y) + M(y)$, et après multiplication par $P(p = p^{(i)}) \geqslant 0$:

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ M(p^{(i)}).P(p = p^{(i)}) \geqslant \Big[M'(y).(p^{(i)} - y) + M(y)\Big].P(p = p^{(i)})$$

L'inégalité est conservée par passage à la somme quand i varie de 1 à k, et le théorème de transfert permet d'écrire :

$$E\left(M(p)\right) = \sum_{i=1}^{k} M(p^{(i)}).P(p = p^{(i)})$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{k}\left[M'(y).(p^{(i)}-y)+M(y)\right].P(p=p^{(i)})$$

$$\geqslant M'(y).\sum_{i=1}^{k}p^{(i)}.P(p=p^{(i)})+[M(y)-y.M'(y)].\sum_{i=1}^{k}P(p=p^{(i)})$$

$$\forall y\in\mathbb{R}_+,\ E\left(M(p)\right)\geqslant M'(y).E(p)+[M(y)-y.M'(y)].1$$

$$\forall y\in\mathbb{R}_+,\ E\left(M(p)\right)\geqslant M(y)+M'(y).\left(E(p)-y\right)$$

c) L'inégalité précédente est en particulier vraie pour $y=E(p)$, bien définie et positive comme espérance d'une variable aléatoire finie, à valeurs positive ; on obtient directement :

$$E(M(p))\geqslant M(E(p))$$

Ce résultat exprime que le profit moyen obtenu en laissant le prix p varier aléatoirement parmi ses k valeurs possibles, est toujours supérieur au profit obtenu en fixant d'emblée à sa valeur moyenne $E(p)$: laissez faire le marché !

7. On suppose que le prix p est une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose aussi l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}M(x)f(x)\mathrm{d}x$.

La variable aléatoire p admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme $x\mapsto xf(x)$ est nulle sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$.

On reprend globalement le raisonnement fait à la question 6. : la convexité de la fonction M permet d'écrire, pour tous réels positifs x et y :

$$M(x)\geqslant M'(y).(x-y)+M(y)\iff x\leqslant\frac{M(x)-M(y)}{M'(y)}+y\Longrightarrow 0\leqslant xf(x)\leqslant\frac{1}{M'(y)}.M(x)f(x)+\frac{y.M'(y)-M(y)}{M'(y)}f(x)$$

On a notamment divisé par $M'(y)>0$ et multiplié par $f(x)\geqslant 0$ les deux membres.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}M(x)f(x)\mathrm{d}x$ converge par hypothèse, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ converge (et vaut d'ailleurs 1) puisque f est une densité de probabilité.

On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{M'(y)}\int_0^{+\infty}M(x)f(x)\mathrm{d}x+\frac{y.M'(y)-M(y)}{M'(y)}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ converge ; le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives affirme alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ converge aussi. La variable aléatoire p admet donc une espérance qui vérifie :

$$\forall y\in\mathbb{R}_+,\quad E(p)=\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{M'(y)}\int_0^{+\infty}M(x)f(x)\mathrm{d}x+\frac{y.M'(y)-M(y)}{M'(y)}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\iff E(p)\leqslant\frac{1}{M'(y)}.E\big(M(p)\big)+\frac{y.M'(y)-M(y)}{M'(y)}$$

$$\iff M'(y).\big(E(p)-y\big)+M(y)\leqslant E\big(M(p)\big)$$

Il suffit là encore de remplacer y par $E(p)$ qui est bien un réel positif, et on obtient à nouveau

$$M\big(E(p)\big)\leqslant E\big(M(p)\big)$$

Partie III. Espérance conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\} \subset \mathbb{R}$ et $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\} \subset \mathbb{R}$, respectivement ($q \geqslant 2$ et $r \geqslant 2$).
On suppose que pour tout $i \in [\![1, q]\!]$: $P(X = x_i) > 0$.
Soit φ la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \ \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} y_j P_{[X=x_i]}(Y = y_j).$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\varphi(x_i)$ est *l'espérance conditionnelle de Y sachant l'événement* $[X = x_i]$, notée également $E\left(Y|[X = x_i]\right)$.
On définit alors une variable aléatoire Z sur Ω en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = E\left(Y[X = X(\omega)]\right)$ et on note $Z = E(Y|X) = \varphi(X)$.

8. a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors pour tout $\omega \in \Omega$:

$$E(Y|X)(\omega) = \varphi(X(\omega)) = \sum_{j=1}^{r} y_j.P_{[X=X(\omega)]}([Y = y_j]) = \sum_{j=1}^{r} y_j.P([Y = y_j]) = E(Y)$$

C'est-à-dire que $E(Y|X)$ est la variable aléatoire constante égale à $E(Y)$.

b) Soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$: il existe $s \in [\![1, q]\!]$ tel que $X(\omega) = x_s$ et alors :

$$E(X|X)(\omega) = \sum_{j=1}^{q} x_j P_{[X=x_s]}([X = x_j])$$

Dans cette somme, $P_{[X=x_s]}([X = x_j])$ est nulle pour tout $j \neq s$, et vaut 1 si $j = s$, donc :

$E(X|X)(\omega) = x_s = X(\omega)$, égalité vraie pour tout $\omega \in \Omega$, ce qui signifie que les variables aléatoires $E(X|X)$ et X sont égales.

c) On suppose que les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts; la restriction de φ à $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ est *injective*, et pour $\omega \in \Omega$ et $i \in [\![1, q]\!]$: $\varphi(X(\omega)) = \varphi(x_j) \iff X(\omega) = x_j$, donc :

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \ P([E(X|Y) = \varphi(x_i)]) = P([\varphi(X) = \varphi(x_i)]) = P([X = x_i])$$

d) Les variables aléatoires considérées étant finies, le théorème de transfert s'applique pour donner :

$$\begin{aligned}
E(E(X|Y)) = E(\varphi(X)) &= \sum_{i=1}^{q} \varphi(x_i).P([X = x_i]) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} y_j.P_{[X=x_i]}([Y = y_j]).P([X = x_i]) \quad \text{par définition des } \varphi(x_i) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{q} y_j.P_{[X=x_i]}([Y = y_j]).P([X = x_i]) \quad \text{interversion des symboles sommes} \\
&= \sum_{j=1}^{r} y_j.\sum_{i=1}^{q} P_{[X=x_i]}([Y = y_j]).P([X = x_i]) \\
&= \sum_{j=1}^{r} y_j.P([Y = y_j]) \qquad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\
E(E(X|Y)) &= E(Y)
\end{aligned}$$

e) Soient des réels λ, ρ et μ. Par définition, la variable aléatoire $Z(\omega) = E(\lambda Y + \rho X + \mu|X)$ est définie par : $\forall \omega \in \Omega, \ Z(\omega) = E(\lambda Y + \rho X + \mu|X = X(\omega))$, l'espérance de $\lambda Y + \rho X + \mu$ pour la probabilité conditionnelle sachant $[X = X(\omega)]$.
La linéarité de l'espérance s'applique avec cette probabilité, qui donne :

$$Z(\omega) = E(\lambda Y + \rho X + \mu|X = X(\omega)) = \lambda E(Y|X = X(\omega)) + \rho E(X|X = X(\omega)) + \mu$$

Cette relation étant vraie pour tout $\omega \in \Omega$, on en déduit l'égalité des variables aléatoires :

$$Z = \lambda E(Y|X) + \rho E(X|X) + \mu \iff E(\lambda Y + \rho X + \mu|X) = \lambda E(Y|X) + \rho X + \mu.$$

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Dans cette partie, on suppose qu'à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, le prix p_n d'un certain bien est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de variables aléatoires de même loi, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a : $P([p_n = p^{(1)}]) > 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes finies indépendantes et de même loi, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(u_n) = 0$ et $V(u_n) = \sigma^2 > 0$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires u_n et p_{n-1} sont indépendantes.
Soit θ et p^* deux paramètres réels vérifiant $-1 < \theta < 1$ et $p^* \geqslant 0$.
On suppose que p_0 est de la forme $p_0 = \ell u_0 + m$, où ℓ et m sont des constantes réelles, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n$ (1).

9. a) Toutes les variables aléatoires considérées dans cette question étant finies, elles admettent une espérance, et par linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(p_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* + E(u_n) \iff E(p_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^*$$

Or par hypothèse, p_n et p_{n-1} ont même loi, donc ont la même espérance μ, et la relation précédente se réécrit : $\mu = \theta.\mu + (1-\theta).p^* \iff (1-\theta).\mu = (1-\theta).p^* \iff \mu = p^*$ puisque $1-\theta \neq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(p_n) = p^*$$

Ensuite, l'indépendance de p_{n-1} et u_n et les propriétés de la variance donnent la relation :
$V(p_n) = \theta^2 V(p_{n-1}) + V(u_n) = \theta^2 V(p_{n-1}) + \sigma^2$.

À nouveau, puisque les variables p_n suivent la même loi, elles ont la même variance V et la relation précédente se réécrit : $V = \theta^2 V + \sigma^2 \iff (1-\theta^2)V = \sigma^2$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V(p_n) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$$

On peut alors réévaluer : $E(p_0) = E(\ell u_0 + m) = \ell E(u_0) + m = m$, donc $\boxed{m = p^*}$.

De même : $V(p_0) = V(\ell u_0 + m) = \ell^2 V(u_0) = \ell^2\sigma^2$, donc : $\ell^2 = \dfrac{1}{1-\theta^2} \iff \boxed{\ell = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Cov}(p_n, p_{n-1}) = \text{Cov}(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n, p_{n-1}) = \theta\text{Cov}(p_{n-1}, p_{n-1}) + 0 + \text{Cov}(u_n, p_{n-1})$$

D'après les propriétés de la covariance (linéarité par rapport à la première variable).
Comme u_n et p_{n-1} sont supposées indépendantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{Cov}(p_n, p_{n-1}) = \theta.V(p_{n-1}) + 0 = \frac{\theta.\sigma^2}{1-\theta^2}$$

On remarque ainsi que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \theta = \dfrac{\text{Cov}(p_n, p_{n-1})}{V(p_{n-1})} = \dfrac{\text{Cov}(p_n, p_{n-1})}{\sqrt{V(p_{n-1}) \times V(p_n)}}$

puisque $V(p_n) = V(p_{n-1})$. On en conclut que θ est le coefficient de corrélation linéaire du couple (p_n, p_{n-1}).

10. D'après la relation établie à la question 8.e) :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(p_n|p_{n-1}) &= E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n|p_{n-1}) = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n|p_{n-1})\\ &= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n)\\ &= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* \quad (= p_n - u_n)\end{aligned}$$

11. On rappelle que l'on note $\widehat{p_n}$ l'anticipation de p_n faite à l'instant $(n-1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $e_n = p_n - \widehat{p_n}$ (*erreur d'anticipation à l'instant* n).

a) On suppose dans cette question que les anticipations sont *naïves*, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\widehat{p_n} = p_{n-1}$.

Comme on l'a alors vu à la question 8.b) : $E(\widehat{p_n}|p_{n-1}) = p_{n-1}$.

$$E(\widehat{p_n}) = E(p_{n-1}) = p^*, \quad V(\widehat{p_n}) = V(p_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}, \quad E(e_n) = E(p_n) - E(\widehat{p_n}) = p^* - p^* = 0$$

$$\begin{aligned} V(e_n) &= V(p_n - \widehat{p_n}) = V(p_n - p_{n-1}) = V(p_n) + V(p_{n-1}) - 2\mathrm{Cov}(p_n, p_{n-1}) \\ &= \frac{2\sigma^2}{1-\theta^2} - \frac{2\sigma^2.\theta}{1-\theta^2} = \frac{2\sigma^2.(1-\theta)}{(1-\theta)(1+\theta)} = \frac{2\sigma^2}{1+\theta} \end{aligned}$$

b) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont *rationnelles*, ce qui se traduit dans le cadre du modèle (1) par : $\widehat{p_n} = E(p_n|p_{n-1})$. Alors d'après le résultat de la question 10. :

$$E(\widehat{p_n}) = E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*) = \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* = \theta p^* + (1-\theta)p^* = p^*$$

$$V(\widehat{p_n}) = V(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*) = \theta^2 V(p_{n-1}) = \frac{\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2}$$

$$E(e_n) = E(p_n - \widehat{p_n}) = E(p_n) - E(\widehat{p_n}) = p^* - p^* = 0$$

$$\begin{aligned} V(e_n) &= V(p_n - \theta p_{n-1} - (1-\theta)p^*) = V(p_n - \theta p_{n-1}) = V(p_n) + \theta^2 V(p_{n-1}) - 2\theta\mathrm{Cov}(p_n, p_{n-1}) \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} + \frac{\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\sigma^2\theta^2}{1-\theta^2} = \frac{\sigma^2(1-\theta^2)}{1-\theta^2} = \sigma^2 \end{aligned}$$

c) Dans chacun des deux types d'anticipation, naïve et rationnelle : l'erreur d'anticipation est d'espérance nulle (à rapprocher de la définition d'un estimateur sans biais).

Comme $-1 < \theta < 1$: alors $0 < 1+\theta < 2$ et donc $\dfrac{2}{1+\theta} > 1 \iff \dfrac{2\sigma^2}{1+\theta} > \sigma^2$, ce qui signifie que l'erreur d'anticipation naïve a une variance, une dispersion supérieure à celle de l'anticipation rationnelle, ce qui incite logiquement à choisir la deuxième.