MATHÉMATIQUES III - HEC E 2007

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de t sont les réels λ tels que $T - \lambda.I_3$ est non-inversible. On échelonne cette matrice :

$$T - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3-(1-\lambda).L_2} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss obtenue est non-inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, donc : $\boxed{\mathrm{Sp}(t) = \{0, 1\}}$.

On calcule ensuite les sous-espaces propres en résolvant le système : $(T - \lambda.I_3)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour les deux valeurs propres obtenues :

- Pour $\lambda = 0$: $(T - \lambda.I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -z \\ y & = 0 \end{cases}$.

  Donc : $E_0(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et $E_0(t) = \mathrm{Vect}(-e_1 + e_3)$.

  On a obtenu une famille génératrice du sous-espace propre constituée d'un seul vecteur non-nul : il s'agit également d'une famille libre, donc d'une base de $E_0(t)$.

- Pour $\lambda = 1$: $(T - \lambda.I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y+z & = 0 \\ y-z & = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$

  Donc : $E_1(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}$, et $E_1(t) = \{x.e_1 | \; x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1)$.

  On a obtenu une famille génératrice d'un seul vecteur non-nul du sous-espace propre : c'est aussi une famille libre, donc une base de $E_1(t)$.

On peut alors conclure :
- ⋆ Puisque 0 est valeur propre, t n'est pas bijectif.
- ⋆ $\dim E_0(t) + \dim E_1(t) = 1 + 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc t n'est *pas* diagonalisable.

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :
   - pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
   - $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \ldots + e_{2n+1}$.

a) La matrice T canoniquement associée à l'endomorphisme généralisé t est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où la colonne centrale est d'indice $j = n+1$.

b) La matrice T possède $2n$ colonnes identiques, donc : $\mathrm{rg}(t) = \mathrm{rg}(T) = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right) = 2$ puisqu'il reste deux vecteurs non colinéaires. Le *théorème du rang* donne alors :

$$\dim \mathrm{Ker}(t) = \dim \mathbb{R}^{2n+1} - \mathrm{rg}(t) = 2n+1-2 = 2n-1$$

c) Le noyau de t étant de dimension non nulle ($n \in \mathbb{N}^*$ donc $2n-1 > 0$), 0 est bien valeur propre de t ; $\mathrm{Ker}(t)$ est d'ailleurs le sous-espace propre associé à cette valeur propre, de dimension $2n-1$.

Pour trouver une base du noyau, il suffit donc de trouver une famille libre de $2n+1$ vecteurs de ce sous-espace.

On peut remarquer ici que : $\forall j \in [\![2, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\}$: $t(e_1 - e_i) = t(e_1) - t(e_i) = e_1 - e_1 = 0$, ce qui donne bien une famille de $2n-1$ vecteurs $\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n, e_1 - e_{n+2}, \dots, e_1 - e_{2n+1})$ du noyau.

Il reste à vérifier que la famille est libre : soient $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n+1}$ des réels tels que :

$$\sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ i \neq n+1}} \lambda_i.(e_1 - e_i) = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}} \iff \sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ i \neq n+1}} \lambda_i.e_1 - \sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ i \neq n+1}} \lambda_i.e_i = 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$$

$$\iff \left(\sum_{\substack{2 \leqslant i \leqslant 2n+1 \\ i \neq n+1}} \lambda_i, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n, -\lambda_{n+2}, \dots, -\lambda_{2n+1} \right) = (0, 0, \dots, 0)$$

Cela implique bien : $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_{2n+1} = 0$, donc la famille $\mathcal{C}$ est libre : c'est bien une base de $\mathrm{Ker}(t)$.

3. On montre l'inclusion demandée[1] en partant d'un vecteur quelconque x de $\mathrm{Im}(t \circ t)$: par définition, cela signifie qu'il existe un vecteur y de $\mathbb{R}^{2n+1}$ tel que : $x = t \circ t(y) = t(t(y))$.

   Il suffit alors de poser $z = t(y) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ pour pouvoir écrire : $x = t(z)$, ce qui prouve que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

4. Soit $\widetilde{t}$ l'endomorphisme défini[2] sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\widetilde{t}(x) = t(x)$.

   On sait par définition de t, que : $e_1 = t(e_1)$ et $\sum_{i=1}^{2n+1} e_i = t(e_{n+1})$, ce qui suffit pour justifier que ces deux vecteurs appartiennent à $\mathrm{Im}(t)$, puisqu'on leur a trouvé (au moins) un antécédent par t dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

   Comme ils sont clairement non-colinéaires, ils forment une famille libre de deux vecteurs.

   Il suffit alors de rappeler que $\dim \mathrm{Im}(t) = \mathrm{rg}(t) = 2$ pour en conclure que ces deux vecteurs forment une *base* de $\mathrm{Im}(t)$, notée $\mathcal{B}$.

   Le calcul des images par $\widetilde{t}$ des deux vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(t)$, permet d'en déduire la matrice de cet endomorphisme :

$$\widetilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1 \text{ et } \widetilde{t}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} t(e_i) = 2n.e_1 + t(e_{n+1}) = 2n.e_1 + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i$$

1. vérifiée en fait par n'importe quel endomorphisme !
2. On parle de façon savante, d'endomorphisme *induit* par t sur $\mathrm{Im}(t)$

$$\text{Donc : } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\widetilde{t}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t(e_1) & t(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \end{array} \end{array}$$

5. a) Une question de cours bien classique, et importante ! Soit λ une valeur propre **non-nulle** de t, et x un vecteur propre associé à λ.

Ces deux objets sont donc liés par la relation : $t(x) = \lambda.x$ qui peut aussi se réécrire, vu que $\lambda \neq 0$:

$$x = \frac{1}{\lambda}.t(x) \text{ et même : } x = t(\frac{1}{\lambda}.x) \text{ par linéarité de } t$$

On vient donc de trouver à x un antécédent par t dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, ce qui prouve par définition que $x \in \mathrm{Im}(t)$.

b) Conséquence de la question précédente : tout vecteur propre x associé à une valeur propre non-nulle λ de t, appartient à $\mathrm{Im}(t)$, et vérifie : $t(x) = \lambda.x \iff \widetilde{t}(x) = \lambda.x$, c'est-à-dire que λ est également valeur propre de $\widetilde{t}$ et x un vecteur propre associé.

Or la matrice de cet endomorphisme, obtenue à la question 4., est triangulaire supérieure : sa seule valeur propre est donc $\lambda = 1$, élément diagonal présent deux fois.

On en conclut que les valeurs propres de t sont 0 et 1.

La matrice de $\widetilde{t}$ nous permet également de trouver tous les vecteurs x tels que : $t(x) = 1.x \iff \widetilde{t}(x) = x$.

On les cherche sous la forme : $x = a.e_1 + b.\sum_{i=1}^{2n+1} e_i$, et la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$ permet de poser le problème sous la forme :

$$\widetilde{t}(x) = x \iff \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + 2n.b & = a \\ \quad b & = b \end{cases} \iff 2n.b = 0 \iff b = 0 \quad (n > 0)$$

Il n'y a pas de contrainte sur a, donc : $E_1(\widetilde{t}) = \{a.e_1 |\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Et comme $E_1(\widetilde{t}) = \{x \in \mathrm{Im}(t) |\ \widetilde{t}(x) = x\} = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} |\ t(x) = x\} = E_1(t)$ d'après la question 5.a), on peut conclure :

- ⋆ $\dim E_1(t) = 1$ (sous-espace propre engendré par un seul vecteur non nul).
- ⋆ Ainsi, $\dim E_1(t) + \dim E_0(t) = 1 + 2n - 1 = 2n \neq 2n + 1 = \dim \mathbb{R}^{2n+1}$, donc

L'endomorphisme t n'est jamais diagonalisable

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{-|x|}$.

   a) Soit A un réel positif :
   $\displaystyle\int_0^A g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^A e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\left[-e^{-x}\right]_0^A = \frac{1}{2}.\left(1-e^{-A}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}$,
   ce qui prouve que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

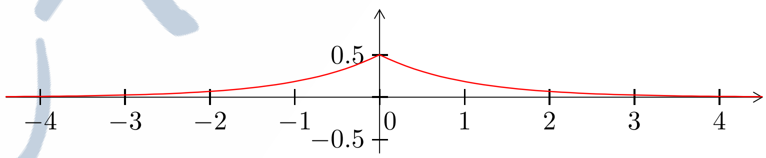
   La parité de la fonction valeur absolue entraîne celle de la fonction g, on peut donc conclure sans calcul supplémentaire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut également $\dfrac{1}{2}$.

   b) La fonction g est clairement positive sur $\mathbb{R}$ comme produit de réels toujours positifs, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur cet intervalle, et :
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} g(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ d'après les calculs précédents, ce qui achève de justifie que g est une densité de probabilité.

   Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. *On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.*

2. Pour tout $x \in]-\infty, 0]$: $g(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{x}$, donc puisque $\dfrac{1}{2} > 0$, g est croissante sur $\mathbb{R}^-$, de plus :
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} \times e^{x} = 0$; la parité de g permet d'en déduire le reste du tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	0 $\nearrow$	$1/2$	$\searrow$ 0



3. a) Soit r un entier naturel quelconque : la fonction $g_r : x \mapsto |x^r.g(x)| = \dfrac{1}{2}|x|^r.e^{-|x|}$ étant continue et toujours paire sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x^r.g(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\int_0^{+\infty} x^r.e^{-x}\mathrm{d}x$ pour obtenir celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r.g(x)|\mathrm{d}x$.

   Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{r+2}.e^{-x} = 0$ par croissances comparées, donc $x^r.e^{-x} = o_{+\infty}(\dfrac{1}{x^2})$.
   Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge $(2>1)$, le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^r.e^{-x}\mathrm{d}x$ converge.
   La continuité de la fonction g_r sur $[0,1]$ assure alors que l'intégrale
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_r(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g_r(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty} x^r.e^{-x}\mathrm{d}x$ est convergente, ce qui équivaut à son absolue convergence.

   Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r.g(x)\mathrm{d}x$ est toujours absolument convergente, ce qui prouve que la variable aléatoire Y admet un moment $m_r(Y)$ à tout ordre $r \in \mathbb{N}$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}$. Notons d'emblée que si r est un entier naturel impair, alors la fonction $g_r : x \mapsto x^r.g(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$, comme produit d'une fonction puissance impaire et d'une fonction paire (g).
L'absolue convergence de l'intégrale ayant déjà été prouvée, on en conclut directement que :

$$\text{Pour tout entier naturel } r \text{ impair, } m_r(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r.g(x)\mathrm{d}x = 0$$

Lorsque r est un entier naturel pair : la fonction g_r est cette fois paire sur $\mathbb{R}$, et toujours par convergence absolue de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r.g(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} x^r.g(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^r.e^{-x}\mathrm{d}x$.

Le calcul explicite ultra-classique de cette intégrale passe par une intégration par parties, en posant (si $r \geqslant 1$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x^r.e^{-x}\mathrm{d}x$ (A réel positif quelconque) :

$$u(x) = x^r \quad \to \quad u'(x) = r.x^{r-1}$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad \to \quad v(x) = -e^{-x}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^A x^r.e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-r.x^{r-1}.e^{-x}\right]_0^A + r.\int_0^A x^{r-1}.e^{-x}\mathrm{d}x = -r.A^{r-1}.e^{-A} + r.\int_0^A x^{r-1}.e^{-x}\mathrm{d}x.$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{r-1}.e^{-A} = 0$ par croissances comparées et toutes les intégrales impropres convergent ; le passage à la limite quand $A \to +\infty$ donne donc la relation :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ m_r(Y) = \int_0^{+\infty} x^r.e^{-x}\mathrm{d}x = r.\int_0^{+\infty} x^{r-1}.e^{-x}\mathrm{d}x = r.m_{r-1}(Y)$$

On a déjà vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1 = m_0(Y)$. La relation de récurrence précédente permettra de retrouver, par récurrence immédiate : $m_r(Y) = r!$.

$$\text{Bilan : } \forall r \in \mathbb{N},\ m_r(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ est impair} \\ r! & \text{si } r \text{ est pair} \end{cases}$$

En particulier : $E(Y) = m_1(Y) = 0$, et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y) = m_2(Y) - 0^2 = 2$ d'après la formule de Koenig-Huygens.

4. a) On distingue deux cas pour le calcul de la fonction de répartition G de Y :
   - Pour tout réel négatif $x \in]-\infty, 0]$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{2}\int_B^x e^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\lim_{B\to-\infty} e^x - e^B = \frac{1}{2}.e^x$$

   - Pour tout réel positif $x \in [0, +\infty[$:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^x g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\int_0^x e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\left(-e^{-x} + 1\right) = 1 - \frac{1}{2}.e^{-x}$$

$$\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}.e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2}.e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Le fait que G soit la fonction de répartition d'une variable à densité comprend déjà le fait que cette fonction soit continue sur $\mathbb{R}$, avec $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$.

La densité g étant continue sur $\mathbb{R}$, G est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier, de dérivée cette même fonction g qui est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Bref, G est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle-image $]0, 1[$.

N.B. : c'est la stricte croissance de G sur $\mathbb{R}$ qui assure que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ne sont jamais atteintes.

c) Le réel $\dfrac{1}{2}$ appartenant bien à l'intervalle-image $]0,1[$, la bijectivité de G assure que l'équation $G(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution réelle (qu'on appelle *médiane* de Y).

Cette solution est en fait évidente puisque $G(0) = \dfrac{1}{2}$, et elle est unique.

d) On effectue la vérification demandée à partir de l'expression obtenue de $G(x)$, en distinguant à nouveau deux cas :

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; -x \in \mathbb{R}^-$ et $G(-x).(1-G(-x)) = \dfrac{1}{2}.e^{-x}.(1-\dfrac{1}{2}.e^{-x}) = (1-G(x)).G(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^-, \; -x \in \mathbb{R}^+$ et $G(-x).(1-G(-x)) = (1-\dfrac{1}{2}.e^{x}).(1-1+\dfrac{1}{2}.e^{x}) = \dfrac{1}{2}.e^{x}.(1-\dfrac{1}{2}.e^{x})$
$= G(x).(1-G(x))$

On a bien vérifié que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; G(-x).(1-G(-x)) = G(x).(1-G(x))$,
donc que la fonction $x \mapsto G(x).(1-G(x))$ est paire sur $\mathbb{R}$.

5. a) Le tableau de variation de G permet d'identifier deux sous-intervalles distincts pour le calcul de sa bijection réciproque :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
G	0 $\nearrow$	$1/2$ $\nearrow$	1

- Pour tout réel $x \in]0,1/2]$: son unique antécédent $y = G^{-1}(x)$ appartient à $]-\infty,0]$, comme unique solution de l'équation :

$$G(y) = x \iff \frac{1}{2}e^{y} = x \iff e^{y} = 2x \iff y = \ln(2x).$$

- Pour tout réel $x \in [1/2,1[$: son unique antécédent $y = G^{-1}(x)$ appartient cette fois à $[0,+\infty[$, comme unique solution de l'équation :

$$G(y) = x \iff 1-\frac{1}{2}.e^{-y} = x \iff 1-x = \frac{1}{2}.e^{-y} \iff 2(1-x) = e^{-y} \iff y = -\ln(2(1-x)).$$

On a bien montré que : $\forall x \in]0,1[, \; G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$

b) Une question difficile à aborder sans indications préliminaires... Il faut connaître en détail le raisonnement ci-dessous !

On sait que G réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$; définissons alors la variable aléatoire $X = G(Y)$: ainsi, $X(\Omega) =]0,1[$ et :

$\forall x \in]0,1[, \; F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(G(Y) \leqslant x) = P(Y \leqslant G^{-1}(x)) = G(G^{-1}(x)) = x$ par définition et stricte croissance de G.
Vu l'univers-image de X, on a bien sûr : $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geqslant 1$,

Donc $X = G(Y)$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Réciproquement, si Z est une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur $]0,1[$,
et si on pose $W = G^{-1}(Z)$:

$\forall x \in \mathbb{R}, \; F_W(x) = P(G^{-1}(Z) \leqslant x) = P(Z \leqslant G(x)) = G(x)$ car G^{-1} est aussi strictement croissante, et car $G(x) \in]0,1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En clair : si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors $G^{-1}(Z) \hookrightarrow \mathcal{L}(0)$ puisque cette v.a.r. a la même fonction de répartition que Y.

On en déduit une simulation simple de la loi $\mathcal{L}(0)$:

```
function y = Laplace()
    Z = rand()
    if Z <= 0.5 then
        y = log(2*Z)
    else
```

```
            y = -log(2*(1-Z))
        end
    endfunction
```

N.B. : le raisonnement développé dans cette question est transposable à toute variable à densité Y dont la fonction de répartition G est strictement croissante, donc bijective, de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$:

dans ce cas, si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors $W = G^{-1}(Z)$ suit la même loi que Y.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = g(x).(1 + xe^{-n|x|})$$

- Il est tout d'abord clair que g_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues.
- La fonction g étant positive sur $\mathbb{R}$, le signe de g_n dépend de celui de la fonction $h_n :\ x \mapsto 1 + x.e^{-n|x|}$. Il est clair que pour tout réel x positif, $h_n(x) > 0$.

  Étudions donc cette fonction sur $]-\infty, 0[$, où : $h_n(x) = 1 + x.e^{nx}$ est l'expression d'une fonction dérivable, avec :

  $\forall x < 0,\ h_n'(x) = e^{nx} + x.n.e^{nx} = (1 + n.x).e^{nx}$.

  $1 + nx > 0 \iff x > -\dfrac{1}{n}$, donc h_n est strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{n}]$, puis strictement croissante sur $[-\frac{1}{n}, 0[$.

  Cette fonction admet donc un minimum en $x = -\frac{1}{n}$, qui vaut : $h_n(-\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}.e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{n.e} > 0$ puisque $n \geqslant 1$ et $e > 1$.

  Ainsi : $\forall x \in]-\infty, 0[,\ h_n(x) \geqslant h_n(-\frac{1}{n}) > 0$. Finalement, la fonction g_n est bien positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Il reste à prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.

  On remarque ici que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = g(x) + g(x).x.e^{-n|x|}$, avec : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ déjà égale à 1.

  Pour tout réel x, on a enfin : $|g(x).x.e^{-n|x|}| = g(x).|x|.e^{-n|x|} \leqslant |x|.g(x)$.

  On a déjà vu que la variable aléatoire Y de densité g admet des moments de tous ordres : l'existence de l'espérance de Y comprend en particulier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|.g(x)\mathrm{d}x$.

  Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives implique donc que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x).x.e^{-n|x|}|\mathrm{d}x$ est convergente.

  L'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).x.e^{-n|x|}\mathrm{d}x$ implique sa convergence ; il reste à remarquer que, g et la fonction valeur absolue étant paires :

  Pour tout réel x, $g(-x).(-x).e^{-n|-x|} = -g(x).x.e^{-n|x|}$, donc la fonction est impaire ; on en déduit sans calcul supplémentaire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).x.e^{-n|x|}\mathrm{d}x = 0$, ce qui permet de conclure :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).(1 + x.e^{-n|x|})\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).x.e^{-n|x|}\mathrm{d}x = 1 + 0 = 1.$$

Les trois propriétés sont vérifiées : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, g_n est une densité de probabilité.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n, et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a) Pour tout réel x : $|G_n(x) - G(x)| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g_n(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t).t.e^{-n|t|}\mathrm{d}t\right|$.

   À l'aide de l'étude de la fonction h_n faite précédemment, on remarque que :
   $\forall t \in]-\infty, 0[,\ 0 \geqslant t.e^{-n|t|} = t.e^{nt} = h_n(t) - 1 \geqslant -\dfrac{1}{n.e}$.

La fonction $t \mapsto t.e^{-n|t|}$ étant impaire, on en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant t.e^{-n|t|} \leqslant \dfrac{1}{n.e}$, et donc :

$\forall t \in \mathbb{R},\ -\dfrac{1}{n.e} \leqslant t.e^{-n|t|} \leqslant \dfrac{1}{n.e} \iff |t|.e^{-n|t|} \leqslant \dfrac{1}{n.e}$.

L'inégalité triangulaire et l'absolue convergence des intégrales impropres concernées permet finalement d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |G_n(x) - G(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} g(t).t.e^{-n|t|}\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\infty}^{x} g(t).|t|.e^{-n|t|}\mathrm{d}t$$

On remarque enfin que : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t).|t|.e^{-n|t|} \leqslant \dfrac{1}{n.e}.g(t)$ puisque $g(t) > 0$.

Les fonctions concernées étant continues, positives sur $\mathbb{R}$, la propriété de croissance de l'intégrale s'applique à l'inégalité précédente et donne, pour tout réel x :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} g(t).|t|.e^{-n|t|}\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{n.e}.g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n.e}.\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n.e}.G(x)$$

$$\text{Et donc : } \forall x \in \mathbb{R},\ |G_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{n.e}.G(x)$$

b) Les fonctions G_n et G sont continues sur $\mathbb{R}$, et d'après l'inégalité précécente, pour tout réel x fixé :

$0 \leqslant |G_n(x) - G(x)| \leqslant \dfrac{1}{n.e}.G(x)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n.e}.G(x) = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} |G_n(x) - G(x)| = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$$

ce qui prouve par définition que : **la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y** (de loi $\mathcal{L}(0)$).

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. *On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$, si une densité f de X est donnée par :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$.

Soit n un entier naturel. On considère un $(2n+1)$-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Pour tout réel x : $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}.e^{-|t-\theta|}\mathrm{d}t$.

On réalise dans cette intégrale le changement de variable affine : $z = t - \theta$, qui donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x-\theta} \frac{1}{2}.e^{-|z|}\mathrm{d}z = G(x-\theta)$ vue la définition de la fonction de répartition G introduite en partie 1.

On en déduit, grâce aux calculs déjà fait en I.4.a) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = G(x-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}.e^{x-\theta} & \text{si } x - \theta \leqslant 0 \iff x \leqslant \theta \\ 1 - \frac{1}{2}.e^{-x+\theta} & \text{si } x - \theta \geqslant 0 \iff x \geqslant \theta \end{cases}$$

b) On aurait pu adopter directement en question a), le point de vue demandé ici :

Pour tout réel x, $P(X - \theta \leqslant x) = P(X \leqslant x + \theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x+\theta} \frac{1}{2}.e^{-|t-\theta|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}.e^{-|z|}\mathrm{d}z = G(x)$, toujours par le même changement de variable affine $z = t - \theta$.

La variable aléatoire $X - \theta$ a la même fonction de répartition que Y, donc suit la même loi $\mathcal{L}(0)$.

c) D'après les résultats obtenus en partie I, on déduit ici que : $E(X - \theta) = V(X - \theta) = 1$.

Comme $X = (X - \theta) + \theta$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance assurent que $E(X)$ et $V(X)$ existent, avec :

$$E(X) = E(X - \theta) + \theta = \theta \text{ et } V(X) = V(X - \theta) = 2$$

d) Toujours grâce au relations qui existent entre les fonctions de répartition F et G :

$$F(x) = \frac{1}{2} \iff G(x-\theta) = \frac{1}{2} \iff x - \theta = 0 \iff x = \theta$$

grâce au résultat de la question I.4.c) en particulier.

2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que : $P([Z_i = 1]) = P([X_i \leqslant x])$.
On considère donc que le "succès" pour la i-ième épreuve de Bernoulli, est le fait que X_i prenne une valeur inférieure ou égale à x.

a) L'indépendance mutuelle des v.a.r. $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n+1}$ provient logiquement de celle des v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$; prouvons-la en revenant à la définition.
S'agissant de variables de Bernoulli, il s'agit de vérifier que :

$$\text{pour toute partie non vide } J \text{ de } [\![1, 2n+1]\!],\ P\left(\bigcap_{i\in J}[Z_i = 1]\right) = \prod_{i\in J} P(Z_i = 1).$$

Or bien sûr : $P\left(\bigcap_{i\in J}[Z_i = 1]\right) = P\left(\bigcap_{i\in J}[X_i \leqslant x]\right) = \prod_{i\in J} P(X_i \leqslant x) = \prod_{i\in J} P(Z_i = 1)$ par indépendance mutuelle des v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$.

b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$.

Il s'agit donc, d'après ce qui précède, de la somme de $2n+1$ variables de Bernoulli indépendantes et de même loi, de probabilité de succès : $P(Z_i = 1) = P(X_i \leqslant x) = F(x)$ (rappelons ici que x est fixé).

La v.a.r. S_{2n+1} suit donc la loi binomiale de paramètres $(2n+1, F(x))$

En particulier : $E(S_{2n+1}) = (2n+1).F(x)$ et $V(S_{2n+1}) = (2n+1).F(x).(1 - F(x))$.

3. On pose $\overline{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.

a) Les calculs faits à la question 1.c) de cette partie, et la linéarité de l'espérance donnent :

$$E(\overline{X}_{2n+1}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} E(X_i) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \theta = \frac{1}{2n+1}.(2n+1).\theta = \theta$$

ce qui prouve bien que $\overline{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais de θ (*moyenne empirique* de l'échantillon).

b) Comme le biais de l'estimateur précédent est nul, son risque quadratique est égal à sa variance. Celle-ci existe bien, vu que les v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ sont mutuellement indépendantes et admettent toutes la même variance 2 :

$$r_\theta(\overline{X}_{2n+1}) = V(\overline{X}_{2n+1}) = \frac{1}{(2n+1)^2}.\sum_{i=1}^{2n+1} V(X_i) = \frac{1}{(2n+1)^2} \times (2n+1) \times 2 = \frac{2}{2n+1}$$

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.
Pour tout ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \dots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X_1}(\omega),\ \widehat{X_2}(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$, les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X_1}(\omega) \leqslant \widehat{X_2}(\omega) \leqslant \dots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$.
On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X_1},\ \widehat{X_2}, \dots, \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X_1} \leqslant \widehat{X_2} \leqslant \dots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}$, qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$, appelées *statistiques d'ordre* de l'échantillon.
On admet que $P([\widehat{X_1} < \widehat{X_2} < \dots < \widehat{X}_{2n+1}]) = 1$.
On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$, c'est-à-dire la statistique d'ordre médiane de l'échantillon.

1. a) Soit x un réel quelconque : l'événement $[\widehat{X}_{n+1} \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si la $(n+1)$-ième plus grande valeur de l'échantillon est inférieure ou égale à x, ce qui est équivalent au fait de trouver, dans l'échantillon, *au moins* $n+1$ variables aléatoires X_i telles que $[X_i \leqslant x]$ soit réalisé.
Comme $[X_i \leqslant x] = [Z_i = 1]$, c'est aussi équivalent au fait qu'il existe au moins $n+1$ indices $i \in [\![1, 2n+1]\!]$ tels que le succès $[Z_i = 1]$ soit réalisé.

Et cela se produit bien si et seulement si le nombre total de succès $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$ est au moins égal à $n+1$:

$$[\widehat{X}_{n+1} \leqslant x] = [S_{2n+1} \geqslant n+1].$$

b) De la relation précédente, et au vu de la loi binomiale suivie par S_{2n+1}, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{F}_{n+1}(x) = P(\widehat{X}_{n+1} \leqslant x) = P(S_{2n+1} \geqslant n+1) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} P(S_{2n+1} = i)$$
$$= \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{2n+1-i}$$

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) Pour tout entier naturel j de $[\![0, 2n]\!]$:

$$(j+1)\binom{2n+1}{j+1} = (j+1)\times\frac{(2n+1)!}{(j+1)!(2n-j)!} = \frac{(2n+1)!}{j!(2n-j)!} = (2n-j+1)\times\frac{(2n+1)!}{j!(2n-j+1)!} = (2n-j+1)\binom{2n+1}{j}.$$

b) Au vu de son expression obtenue en 1.b), la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions ayant cette propriété, puisque c'est le cas de la fonction F.
Cela confirme que $\widehat{X}_{n+1}$ est une variable à densité ; on obtient une expression de $\widehat{f}_{n+1}$ par dérivation de $\widehat{F}_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$; pour tout réel x :

$$(\widehat{F}_{n+1})'(x) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \left[i.f(x).(F(x))^{i-1}.(1-F(x))^{2n+1-i} + (F(x))^i.(2n+1-i).(-f(x)).(1-F(x))^{2n-i}\right]$$

$$[j = i-1] = \sum_{j=n}^{2n} (j+1)\binom{2n+1}{j+1}.f(x).(F(x))^j.(1-F(x))^{2n-j}$$
$$- \sum_{i=n+1}^{2n+1} (2n+1-i).\binom{2n+1}{i}.f(x).(F(x))^i.(1-F(x))^{2n-j}$$

$$[\text{cf. a)}] = \sum_{j=n}^{2n} (2n+1-j)\binom{2n+1}{j}.f(x).(F(x))^j.(1-F(x))^{2n-j}$$
$$- \sum_{i=n+1}^{2n+1} (2n+1-i).\binom{2n+1}{i}.f(x).(F(x))^i.(1-F(x))^{2n-j}$$

$$= (n+1).\binom{2n+1}{n+1}.f(x).(F(x))^n.(1-F(x))^n - 0 \qquad \text{partie commune : } [\![n+1, 2n]\!]$$

$$= (n+1).\frac{(2n+1)!}{(n+1)!.n!}.f(x).(F(x))^n.(1-F(x))^n$$

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.(F(x))^n.(1-F(x))^n.f(x)$$

c) Rappelons ici le résultat de cours sur les *transformées affines* de variables à densité :

Si X est une variable aléatoire à densité, f une densité de X et a, b deux constantes réelles avec $a \neq 0$:
Alors $Y = a.X + b$ est encore une variable à densité, et une densité g de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{|a|}.f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Ici, on cherche une densité $\widehat{g}_{n+1}$ de $(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$, donc $a=1$ et $b=-\theta$.
L'expression de la densité $\widehat{g}_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \widehat{g}_{n+1}(x)=\widehat{f}_{n+1}(x+\theta)&=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.\left(F(x+\theta)\right)^n.\left(1-F(x+\theta)\right)^n.f(x+\theta)\\&=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.\left(G(x)\right)^n.\left(1-G(x)\right)^n.g(x)\end{aligned}$$

Au vu des relations qui lient F et G d'une part, f et g d'autre part (voir le début de la partie II).

(a) Justifions tout d'abord que la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ admet une espérance, et pour cela montrons que c'est le cas de $\widehat{X}_{n+1}-\theta$ qui a pour densité $\widehat{g}_{n+1}$:
Puisque G est une fonction de répartition : $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant G(x)\leqslant 1$, donc :
$\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant |x.\widehat{g}_{n+1}(x)|=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}.\left(G(x)\right)^n.\left(1-G(x)\right)^n.|x|.g(x)\leqslant\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}.|x|.g(x)$.

Comme la v.a.r. Y de la partie I admet une espérance, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.|x|.g(x)\mathrm{d}x$ $=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}.\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|.g(x)\mathrm{d}x$ est convergente ; les fonctions concernées par l'inégalité précédente étant continues, positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit par le théorème de comparaison des intégrales de ce type de fonctions, que $\int_{-\infty}^{+\infty}x.\widehat{g}_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc que $(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$ admet une espérance.
Il reste à remarquer que, puisque la fonction $x\mapsto G(x).(1-G(x))$ est paire (d'après I.4.d)), tout comme la fonction g :
Par produit, la fonction $\widehat{g}_{n+1}$ est paire également, et $x\mapsto x.\widehat{g}_{n+1}(x)$ est, elle, impaire.
La convergence de l'intégrale impropre ayant déjà été démontrée, on en conclut :

$$E(\widehat{X}_{n+1}-\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}x.\widehat{g}_{n+1}(x)\mathrm{d}x=0\iff E(\widehat{X}_{n+1})=\theta$$

par linéarité de l'espérance. On a bien démontré ce faisant que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

3. *Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $(\widehat{X}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque n tend vers $+\infty$.*
On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$.

a) On applique à nouveau le résultat de cours sur les transformées affines de variables à densité, rappelé à la question 2.c) de cette partie ; cette fois, $a=\sqrt{2n+1}>0$ et $b=0$ (puisqu'on part de la v.a.r. $\widehat{X}_{n+1}$), donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \widehat{h}_{n+1}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\widehat{g}\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\times\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\times\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n\times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

b) On rappelle les deux développements limités usuels au voisinage de 0 :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\text{ et }\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Lorsque u tend vers 0, $x=-u$ tend vers 0 donc on peut écrire aussi :

$$e^{-u}=1-u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\text{ et }\ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$$

c) Soit x un réel fixé. La parité de la fonction $x\mapsto G(x).(1-G(x))$ permet d'écrire, quel que soit le signe de x :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2}.\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right).\left(1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{2n+1}} = 0$, le développement limité de e^{-u} rappelé précédemment permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}.\left[1-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right].\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right]\\
&= \left[\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2n+1}}+\frac{x^2}{2(2n+1)}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right].\left[\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{2n+1}}-\frac{x^2}{2(2n+1)}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}-\cancel{\frac{x}{4\sqrt{2n+1}}}+\cancel{\frac{x^2}{4(2n+1)}}+\cancel{\frac{x}{4\sqrt{2n+1}}}-\cancel{\frac{x^2}{4(2n+1)}}-\frac{x^2}{4(2n+1)}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{4}.\left[1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

d) En passant d'emblée à la forme exponentielle des puissances (rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < G(x) < 1$ donc $G(x)(1-G(x)) > 0$) :

$$\begin{aligned}
&4^n.\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\\
&= \exp\left(n\ln(4)+n\ln\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\cancel{n\ln(4)+n\ln(\tfrac{1}{4})}+n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n.\left(-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2+1/n}+o(1)\right)
\end{aligned}$$

Il a suffi ici d'utiliser un développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-u)$, avec $u = \dfrac{x^2}{2n+1}$ qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La dernière expression obtenue permet de conclure, puisque :

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2+1/n}+o(1) = -\dfrac{x^2}{2}+0$, donc par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n.\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n = e^{-x^2/2}$$

e) On admet [3] que lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $\dbinom{2n}{n}\times\dfrac{1}{4^n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

En remarquant que : $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} = \dfrac{2n+1}{\sqrt{2n+1}}\times\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \sqrt{2n+1}\times\dbinom{2n}{n}$, on a alors :

$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\times\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \sim \sqrt{2n}\times\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\times 4^n.$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\dfrac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) = g(0) = \dfrac{1}{2}$ par continuité de g en 0, donc :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\times 4^n\times\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n\times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\widehat{h}_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\times e^{-x^2/2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-x^2/2}$$

Ce qui est bien le résultat attendu dans cette question.

3. Un équivalent qu'on retrouve facilement à partir de la **formule de Stirling** : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2\pi n}$ quand $n\to+\infty$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\left(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta)\right)_n$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite (on a ici prouvé que la suite des fonctions densités $(\widehat{h}_{n+1})_n$ converge en tout réel x, vers la densité de la loi normale centrée, réduite alors que la définition du cours demande de s'intéresser plutôt à la suite des fonctions de répartition).
   Cela s'exprime en particulier en disant :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } a<b\ ,\ \lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant \sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta) \leqslant b) = \Phi(b)-\Phi(a)$$

   où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

   L'intervalle de confiance étant proposé, on vérifie que : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(I_n \leqslant \theta \leqslant J_n) \geqslant 0.95$ (le nouveau programme de ECE2 parle bien, dans ce cas, d'*intervalle de confiance asymptotique*).

$$\begin{aligned}
P(I_n \leqslant \theta \leqslant J_n) &= P\left(\widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \leqslant \theta \leqslant \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}\right) \\
&= P\left(\theta - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \leqslant \widehat{X}_{n+1} \leqslant \theta + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}\right) \\
&= P\left(-1.96 \leqslant \sqrt{2n+1}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right) \leqslant 1.96\right) \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} \Phi(1.96)-\Phi(1.96) = 2\Phi(1.96)-1 \approx 2\times 0.975 - 1 = 0.95
\end{aligned}$$

   D'où le résultat voulu. On a notamment utilisé la propriété[4] : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ de Φ.

4. propriété vérifiée en fait par toute variable à densité dont une densité est paire !