MATHÉMATIQUES III - HEC E 2004

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

1. Étude d'une suite et programmation

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout réel $x \in [0,1]$, on dispose des inégalités successives :

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x^n \leqslant x^{n-1} \\ \Longrightarrow\ &0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant \frac{x^{n-1}}{1+x} \text{ car sur } [0,1],\ 1+x>0 \end{aligned}$$

Les fonctions concernées étant positives et continues, les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale (sachant que $0<1$) permettent d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n$, ce qui prouve bien que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} c_{n+1}+c_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n+x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

c) Une utilisation judicieuse des deux résultats précédents est à faire ici : pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut écrire :

$\frac{1}{n} = c_{n+1}+c_n \leqslant 2c_n$ puisque $c_{n+1} \leqslant c_n$ (la suite est décroissante)

$2c_n \leqslant c_n + c_{n-1} = \frac{1}{n-1}$ par décalage d'incide dans la relation obtenue en b)

Ce qui donne bien l'encadrement : pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$.

On peut donc facilement en déduire une suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n}{u_n} = 1$: il suffit en effet de diviser par $n \geqslant 2$ les membres de la double inégalité précédente pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 1 \leqslant 2nc_n \leqslant \frac{n}{n-1}$$

où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nc_n = 1$, ce qui donne l'équivalent : $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

d) Calcul de c_1 : $c_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(|1+x|)]_0^1 = \ln(2)$.

Montrons ensuite par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ c_n = (-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 2$: on sait que $c_2 = 1 - c_1 = 1 - \ln(2)$ d'après la relation obtenue en b), et par ailleurs : $(-1)^2 \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) = \frac{(-1)^2}{1} - \ln(2) = 1 - \ln(2)$, donc la propriété est vraie au rang 2.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$, et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$:

$$c_{n+1} \overset{b)}{=} \frac{1}{n} - c_n \overset{H.R.}{=} \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)$$

$$= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{n}}_{=0 \text{ car } (-1)^{2n+1} = -1}$$

vu que $2n+1$ est toujours un entier impair. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ si elle l'est au rang n.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété étant initialisée à $n = 2$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2$ d'après le principe de récurrence.

e) On donne ici la programmation en Turbo-Pascal et en Scilab du calcul de c_n via l'expression sommatoire qu'on vient de démontrer :

Turbo-Pascal :

```
program HEC2004;
var s : real;
    n,k,e : integer;
Begin
s:=1; e:=1; {* e représente l'exposant de (-1) *}
for k:=2 to (n-1) do
    Begin
    e:=-e;
    s:=s+e/k;
    end;
s := e*(s-ln(2)); write('c_',n,' = ',s);
end.
```

Scilab :

```
function y=c(n)
    s=1; e=1;
    for k=1:n
        e=-e;
        s=s+e/k
    end
    y=e*(s-log(2))
endfunction
```

Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n t^n (1+t)} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et x un réel supérieur ou égal à 1 : le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 et bijectif de $[1, x]$ dans $[1/x, 1]$, avec $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, d'où

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{1}{t^{n-1}(1+\frac{1}{t})}.(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = -\int_1^{1/x} \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u$$

b) La fonction f_n est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction nulle sur $]-\infty, 1[$ et comme fonction rationnelle bien définie sur $]1; +\infty[$. Elle est bien positive sur $\mathbb{R}$ au vu de l'expression choisie sur

$[1, +\infty[$ (avec $c_n > 0$).
De plus :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}t + \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{c_n}\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{c_n}\lim_{x\to+\infty}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{c_n}\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{c_n}{c_n} = 1 \text{ (l'intégrale est bien convergente sur } [0,1])\end{aligned}$$

Ainsi les trois conditions sont vérifiées, et f_n est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

c) Par définition, la variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_n(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. La fonction concernée étant nulle sur $]-\infty, 1[$ et continue, positive sur $]1, +\infty[$, cela revient à étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{c_n.t^n(1+t)}\mathrm{d}t$.
Or au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\frac{t}{t^n(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$, et on sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $n > 1$. Comme n est entier, le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives permet de conclure que :

X_n admet une espérance si et seulement si n est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut alors écrire :
$$E(X_n) = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{c_{n-1}t^{n-1}(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t,$$
soit :
$$\forall n \geqslant 2,\ E(X_n) = \frac{c_{n-1}}{c_n}$$

d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que $n = 1$. La fontion F_1 est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_1(t)\mathrm{d}t$. On distingue alors deux cas :
$\star$ Si $x < 1$, alors $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x 0\mathrm{d}t = 0$.
$\star$ Si $x \geqslant 1$, alors $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^1 0\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{c_1.t(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{c_1}.\int_{1/x}^1 \frac{u^{1-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(|1+u|)\right]_{1/x}^1$
$\displaystyle = 1 - \frac{1}{\ln(2)}.\ln(1+\frac{1}{x})$.

L'inégalité $P([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2} \iff F_1(y) \geqslant \frac{1}{2}$ n'est donc vraie pour aucun réel $y < 1$ car la fonction de répartition est nulle sur $]-\infty, 1[$, et sur $[1, +\infty[$:
$\displaystyle P([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+\frac{1}{y}) \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+\frac{1}{y}) \iff \frac{\ln(2)}{2} \geqslant \ln(1+\frac{1}{y})$
$\displaystyle \iff e^{\frac{1}{2}\ln(2)} \geqslant 1 + \frac{1}{y} \iff 2^{1/2} - 1 \geqslant \frac{1}{y} \iff \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leqslant y.$
Ce résultat exprime que X_1 admet pour *médiane* le réel $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Comme l'univers-image de la variable aléatoire X_1 est $[1, +\infty[$, on définit bien une variable aléatoire en posant $Z = \ln(X_1)$, à valeurs dans $[0, +\infty[$.
$\forall x \in \mathbb{R} :\ F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(\ln(X_1) \leqslant x) = P(X_1 \leqslant e^x) = F_1(e^x)$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
On retrouve deux cas :
$\star$ Lorsque $e^x < 1 \iff x < 0$, alors $F_1(e^x) = 0 = F_Z(x)$.

$\star$ Lorsque $e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$, alors $F_Z(x) = F_1(e^x) = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ln(1+\dfrac{1}{e^x}) = 1 - \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}$.

La fonction F_Z est bien continue et même de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle, et sur $]0,+\infty[$ comme composée de fonctions de classe C^1.

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}\ln(1+e^{-x}) = 1 - \dfrac{1}{\ln(2)}.\ln(1+1) = 1-1 = 0$.

La fonction F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : la v.a.r. Z admet donc une densité, définie par :

$\star$ $f_Z(x) = F_Z'(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$, on pose arbitrairement $f_Z(0) = 0$.

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_Z(x) = -\dfrac{1}{\ln(2)}.\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{\ln(2).(1+e^x)}$.

e) Soit x un réel strictement supérieur à 1 (et donc : $0 < \dfrac{1}{x} < 1$). Il est clair que : $\forall u \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{u^n}{(1+u)^2} \leqslant u^n$.

Les fonctions concernées sont continues et positives, $0 < 1$ donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{1/x} \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u + \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^n \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}.$$

Le théorème d'encadrement permet bien sûr de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u\right) = 0$.

Dans l'intégrale $F_n(x) = \dfrac{1}{c_n}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{c_n}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} f(u) = \dfrac{1}{1+u} & \to & f'(u) = -\dfrac{1}{(1+u)^2} \\ g'(u) = u^{n-1} & \to & g(u) = \dfrac{u^n}{n} \end{array}$$

Les fonctions concernées sont bien de classe C^1 sur $[0,1]$, donc par intégration par parties :

$$F_n(x) = \frac{1}{c_n}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{1}{c_n}\left[\frac{u^n}{n(1+u)}\right]_{1/x}^1 + \frac{1}{nc_n}\int_{1/x}^1 \frac{1}{u^n}(1+u)^2\mathrm{d}u = \frac{1}{2nc_n} - \frac{(1/x)^n}{nc_n(1+1/x)} + \frac{1}{nc_n}\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u.$$

Comme on l'a vu précédemment : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nc_n = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nc_n}\displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\times 0 = 0$.

Enfin : $\dfrac{(1/x)^n}{nc_n.(1+1/x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2(1/x)^n}{(1+1/x)}$; comme $1/x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/x)^n = 0$.

Tous comptes faits, on peut conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

f) Si x est un réel inférieur ou égal à 1, $F_n(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note F la "fonction limite" ainsi définie : elle correspond à la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à 1, et la relation :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$, exprime que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à 1.

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ et une base de E.

Si $a_0,\ a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sr $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^k$,

on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q)(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en « inversant l'ordre des coefficients ».
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.

Les trois parties du problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. Linéarité de s

Soient $P:\ x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k.x^k$ et $Q:\ x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{2n} b_k.x^k$ deux polynômes de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire quelconque : le polynôme $\lambda.P + Q$ est la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{2n} (\lambda.a_k + b_k).x^k$, et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ s(\lambda.P + Q)(x) &= \sum_{k=0}^{2n} (\lambda.a_{2n-k} + b_{2n-k}).x^k = \sum_{k=0}^{2n} \lambda.a_{2n-k}x^k + b_{2n-k}.x_k \\ &= \lambda.\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}.x^k + \sum_{k=0}^{2n} b_{2n-k}.x^k = \lambda.s(P)(x) + s(Q)(x) \end{aligned}$$

Ainsi $s(\lambda.P + Q) = \lambda.s(P) + s(Q)$ (égalité d'appplications), ce qui prouve la linéarité de l'application s.

2. Diagonalisation dans un cas particulier

a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle, le théorème admis du cours de ECE2 permet donc directement de conclure qu'elle est diagonalisable.
Un réel λ est valeur propre de M si et seulement si le système $MX = \lambda.X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas de Cramer :

$$MX = \lambda.X \iff (M - \lambda.I_3)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccl} -\lambda x & & + z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ x & & -\lambda z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccl} x & & -\lambda z & = & 0\ L_1 \leftrightarrow L_3 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -\lambda x & & + z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccl} x & & -\lambda z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ & & (1-\lambda^2)z & = & 0\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda.L_1 \end{array} \right.$$

Le système admet une infinité de solutions si et seulement si λ prend l'une des deux valeurs -1 ou 1, qui sont donc les valeurs propres de M : $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}$.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre, on finit dans les deux cas la résolution du système :

$\star$ Pour $\lambda = 1$, le système se réduit à l'équation : $x - z = 0 \iff x = z$, et le sous-espace propre associé est donc : $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Les deux vecteurs de la famille génératrice obtenue sont non-nuls et non-colinéaires, on peut donc en déduire qu'ils forment aussi une famille libre, donc une base du sous-espace propre $E_1(M)$.

$\star$ Pour $\lambda = -1$, le système se réduit à :

$\begin{cases} x \quad + \quad z = 0 \\ \quad 2y \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$, donc : $E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, sous-espace engendré par un seul vecteur non-nul : ce dernier forme aussi à lui seul une famille libre, donc une base du sous-espace.

b) Dans le cas particulier où $n = 1$, l'espace vectoriel E considéré est bien $\mathbb{R}_2[X]$, de dimension 3 et de base canonique $(1, X, X^2)$.
La matrice de s dans cette base est obtenue en calculant :
$s(1) = s(1.1 + 0.X + 0.X^2) = 0.1 + 0.X + 1.X^2 = X^2$

$s(X) = s(0.1 + 1.X + 0.X^2) = 0.1 + 1.X + 0.X^2 = X$

$s(X^2) = s(0.1 + 0.X + 1.X^2) = 1.1 + 0.X + 1.X^2 = 1$, donc : $\text{Mat}_{(1,X,X^2)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$ effectivement.

Le travail fait à la question *a*) permet alors de retrouver les sous-espaces propres de s, en effet :
$\star$ l'endomorphisme s a le même spectre que sa matrice représentative M, à savoir $\{-1, 1\}$.
$\star$ les vecteurs propres de M peuvent être vus comme les représentations matricielles dans la base canonique de E, de ceux de s.
Ainsi : $E_1(s)$ a pour base $(1 + X^2, X)$, et $E_{-1}(s)$ a pour base $(1 - X^2)$. La concaténation de ces deux bases forme alors une base $(1 + X^2, X, 1 - X^2)$ de vecteurs propres de l'espace global E.

3. Étude du cas général

On définit la famille de polynômes $(A_0, \ldots, A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \begin{cases} A_k(x) = x^{2n-k} + x^k & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = x^n \\ A_k(x) = x^k - x^{2n-k} & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

a) Comme l'endomorphisme s a pour effet d'inverser les coefficients d'un polynôme P de $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, il est clair que : $\forall P \in E,\ s(s(P)) = P$, c'est-à-dire que : $s \circ s = \text{Id}_E$ [1].
(On remarque notamment au niveau des coefficients de P, que : $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ a_{2n-(2n-k)} = a_k$).

b) Soit P un polynôme non nul, et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda.P$ (en clair, on prend un vecteur propre P pour la valeur propre λ).
Alors : $s \circ s(P) = s(s(P)) = s(\lambda.P) = \lambda.s(P) = \lambda^2.P$ en utilisant deux fois la linéarité de l'application P. La question précédente fournit donc l'égalité : $\lambda^2.P = P \iff (\lambda^2 - 1).P = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0$, puisqu'on a dit que P était un polynôme non nul.
Une valeur propre λ de s, en donc nécessairement une racine de l'équation $\lambda^2 - 1 = 0$, donc :

$$\text{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}.$$

Remarque : il s'agit bien d'une *inclusion*, on n'a pas encore vérifié la réciproque.

c) Pour tout entier $k \in [\![0, n-1$: $s(A_k) = s(1.x^{2n-k} + 1.x^k) = 1.x^{2n-(2n-k)} + 1.x^{2n-k} = x^{2n-k} + x^k$ (seuls deux coefficients sont non nuls dans ce polynôme, d'indices "symétriques" au vu du principe de calcul de l'image par s), soit : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ s(A_k) = A_k}$.

$s(A_n) = s(1.A_n) = 1.A_{2n-n}$, donc : $\boxed{s(A_n) = A_n}$.

Pour tout entier $k \in [\![n+1, 2n]\!]$: $s(A_{2n-k}) = s(1.x^k + (-1).x^{2n-k}) = 1.x^{2n-k} + (-1).x^{2n-(2n-k)}$ $= -x^k + x^{2n-k}$, soit : $\boxed{\forall k \in [\![n+1, 2n]\!],\ s(A_k) = -A_k}$.

1. on appelle ce type d'endomorphismes, une *symétrie vectorielle*, à cause de l'interprétation géométrique qu'on pourrait en faire

d) Montrons que la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_{2n})$ est libre, pour cela on considère une combinaison linéaire nulle de ces polynômes :
$\lambda_0.A_0 + \lambda_1.A_1 + \ldots + \lambda_{2n}.A_{2n} = 0_E$ (polynôme nul) où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ sont des réels.
Cela se réécrit :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.(x^{2n-k} + x^k) + \lambda_n.x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k.(x^k - x^{2n-k}) = 0$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.x^k + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_{2n-j}.x^j + \lambda_n.x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k.x^k - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{2n-j}.x^j = 0$ avec $[j = 2n-k]$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_{2n-k}).x^k + \lambda_n.x^n + \sum_{j=n+1}^{2n} (\lambda_j + \lambda_{2n-j}).x^j = 0$
Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc :
$\lambda_n = 0$, et : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k + \lambda_{2n-k} = 0 \iff \lambda_k = -\lambda_{2n-k}$, ainsi que :
$\forall j \in [\![n+1, 2n]\!],\ \lambda_j - \lambda_{2n-j} = 0 \iff \lambda_j = \lambda_{2n-j}$, ce qui redonne, via le changement d'indice $j = 2n-k$:
$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = \lambda_{2n-k}$.
Ainsi : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \begin{cases} \lambda_k &= \lambda_{2n-k} \\ \lambda_k &= -\lambda_{2n-k} \end{cases} \implies \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = \lambda_{2n-k} = 0 \iff \begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = 0 \\ \forall j \in [\![n+1, 2n]\!],\ \lambda_j = 0 \end{cases}$.
Finalement, tous les réels λ_k sont bien nuls, et la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_{2n})$ est libre.

e) La famille libre précédente est constituée de $2n+1$ vecteurs, or $\dim(E) = 2n+1$, c'est donc une base de cet espace. Les calculs effectués à la question c) montrent que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ sont en fait vecteurs propres de s pour la valeur propre 1, tandis que $(A_{n+1}, \ldots, A_{2n})$ sont, eux, vecteurs propres de s pour la valeur propre -1.
On dispose donc d'une base de E constituée de vecteurs propres pour s , qui permet de conclure directement que :
⋆ l'endomorphisme s est donc diagonalisable.
⋆ ses valeurs propres sont bien -1 et 1.
⋆ le sous-espace propre $E_1(s)$ a pour base $(A_0, \ldots, A_n)$ et $\dim(E_1(s)) = n+1$, tandis que le sous-espace propre $E_{-1}(s)$ a pour base $(A_{n+1}, \ldots, A_{2n})$ et $\dim(E_{-1}(s)) = n$.

PARTIE B

1. Préliminaires

On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par :

$$\text{Pour tout réel } x,\ R_1(x) = x,\ R_2(x) = x^2 - 2$$
$$\text{et pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à 2, } R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x).$$

a) Par application de la relation de récurrence :
$\forall x \in \mathbb{R},\ R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x^3 - 2x - x = x^3 - 3x$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ R_4(x) = xR_3(x) - R_2(x) = x^4 - 3x^2 - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2$.

b) On démontre par récurrence *double* que la propriété $\mathcal{P}(k)$: « R_k est un polynôme de degré k vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$ » est vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: R_1 est bien un polynôme de degré 1,et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_1(x + \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} = x^1 + \frac{1}{x^1}$
Pour $n = 2$: R_2 est bien un polynôme de degré 2, et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_2(x + \frac{1}{x}) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
$\boxed{\text{H.}}$ Supposons, pour un certain entier $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n-1)$ et $P(n)$ vraies. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : R_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$, et $R_{n+1}(x + \frac{1}{x}) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ pour tout réel x non nul.

D'abord, $R_{n+1} = XR_n(X) - R_{n-1}(X)$ est bien un polynôme comme somme et produit de polynômes.
Toujours par hypothèse de récurrence, et d'après les règles sur les degrés, on sait que :

$\deg(x.R_n(x)) = \deg(x) + \deg(R_n(x)) = 1 + n = n + 1$.
Comme $\deg(R_{n-1}) = n - 1$, alors : $\deg(x.R_n(x) - R_{n-1}(x)) = n + 1 = \deg(R_{n+1})$.

Maintenant, pour tout réel x non nul :

$$\begin{aligned} R_{n+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x + \frac{1}{x}\right).R_n\left(x + \frac{1}{x}\right) - R_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &\overset{H.R.}{=} \left(x + \frac{1}{x}\right).\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \\ &= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} \\ &= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ le sont.
$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée à $n = 1$ et héréditaire ; elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence double.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$, on résout l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:
$$x + \frac{1}{x} = a \iff \frac{x^2 + 1 - ax}{x} = 0 \iff x^2 - ax + 1 = 0 \ (x \neq 0).$$
Cette équation du second degré a pour discriminant : $\Delta = a^2 - 4$, qui n'est pas forcément positif.
On distingue en fait 3 cas :
$\star$ $\Delta = a^2 - 4 < 0 \iff a^2 < 4 \iff -2 < a < 2$: dans ce cas l'équation n'a pas de solution réelle.
$\star$ $\Delta = 0 \iff a^2 = 4 \iff a = 2$ ou $a = -2$: dans ce cas l'équation admet une unique solution, $x_0 = \dfrac{a}{2}$ qui vaut 1 si $a = 2$, et -1 si $a = -2$.
$\star$ $\Delta > 0 \iff a^2 > 4 \iff a < -2$ ou $a > 2$: dans ce cas l'équation admet deux solutions distinctes, à savoir : $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

2. Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini pat : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k.x^k$, tel que a_{2n} soit non nul (ce qui assure que $\deg(Q) = 2n$) et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, on ait : $a_k = a_{2n-k}$.
Remarque : cette propriété implique notamment que $s(Q) = Q$: on parle de *polynôme symétrique* à cause de cette symétrie des coefficients.

On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par : $\widetilde{Q}(x) = a_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x)$.

a) Il est facile de vérifier si 0 est racine de Q ou pas, puisque $Q(0) = a_0$ est toujours le temre constant du polynôme. Or par symétrie des coefficients de Q : $a_0 = a_{2n} \neq 0$ par hypothèse.
Le polynôme Q n'admet donc pas 0 pour racine.

b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$. Au vu des définitions précédentes :

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(y) = 0 &\iff a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(y) = 0 \iff a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}.\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = 0 \text{ d'après 1.b)} \\ &\iff \frac{a_n.x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}.x^{n+k} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}.x^{n-k}}{x^n} = 0 \\ &\iff \frac{a_n.x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n+k}.x^{n+k} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}.x^{n-k}}{x^n} = 0 \quad \text{car } a_{n-k} = a_{2n-(n-k)} = a_{n+k} \text{ par symétrie des coefficients} \\ &\iff \frac{a_n.x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i.x^i + \sum_{j=n+1}^{2n} a_j.x^j}{x^n} = 0 \text{ avec } \begin{cases} i = n-k \\ j = n+k \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \frac{\sum_{k=0}^{2n} a_k.x^k}{x^n} = 0 \iff \frac{Q(x)}{x^n} = 0$$

Vu que 0 n'est pas racine de Q, le résultat précédent exprime donc que : $x \in \mathbb{R}^*$ est racine de Q si et seulement si $y = x + \frac{1}{x}$ est racine de $\widetilde{Q}$, dont on remarque qu'il est de degré n seulement (donc : deux fois moindre que $\deg(Q)$) au vu de sa définition et des propriétés des polynômes R_k.
Il suffit donc de trouver les racines y de $\widetilde{Q}$, qui en a au plus n, puis de calculer pour chacune d'elles, les solutions de l'équation $x + \frac{1}{x} = y$ tel que cela a été fait à la question 1.c) de cette partie.

c) On suppose ici que n est égal à 3 et que Q est défini par : $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.
Le polynôme $\widetilde{Q}$ est donc défini par :

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}(x) &= a_3 + \sum_{k=1}^{3} a_{3-k}R_k(x) = 2 - 9.R_1(x) + 1.R_2(x) + 1.R_3(x) = 2 - 9x + x^2 - 2 + x^3 - 3x \\ &= x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12).\end{aligned}$$

Ainsi $y_0 = 0$ est racine évidente de $\widetilde{Q}$, les autres sont les racines du trinôme $x^2 + x - 12$:
$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$, il y a donc deux racines : $y_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$, et $y_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$.

On se réfère alors à la question 1.c) pour résoudre directement les trois équations :

$\star$ $x + \frac{1}{x} = y_0$: $y_0 = 0 \in]-2, 2[$, donc dans ce cas l'équation n'a pas de solution réelle.

$\star$ $x + \frac{1}{x} = y_1$: $y_1 = -4 < -2$, donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{16-4}}{2} = -2 - \sqrt{3}, \text{ et } x_2 = -2 + \sqrt{3}.$$

$\star$ $x + \frac{1}{x} = y_2$: $y_2 = 3 > 2$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1' = \frac{3 - \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ et } x_2' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, le polynôme Q admet quatre racines réelles x_1, x_2, x_1' et x_2'.
La factorisation de Q (qui n'était pas demandée) est en fait :

$$Q(x) = (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x^2 + 1)$$

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1, p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par P la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que, pour tout polynôme Q de Ω, on a : $P(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.
Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entier k qui vérifient $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n = 2$, *si* $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, *on a* $Z(Q) = 3$.
Il faut bien remarquer ici que l'égalité $a_0 = a_{4-0}$ est comptée deux fois puisqu'elle s'écrit aussi $a_4 = a_{4-4}$, et $a_2 = a_{4-2}$ compte toujours pour une coïncidence.

1. Description d'un cas simple

Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
Ω est donc l'ensemble de tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, dont les coefficients sont tous entiers et pris parmi les deux valeurs $\{1, 2\}$: il y a trois coefficients à choisir pour construire chaque polynôme, donc $2^3 = 8$ polynômes possibles :

$\Omega = \{P_1(x) = x^2 + x + 1, P_2(x) = x^2 + x + 2, P_3(x) = x^2 + 2x + 1, P_4(x) = x^2 + 2x + 2,$
$P_5(x) = 2x^2 + x + 1, P_6(x) = 2x^2 + x + 2, P_7(x) = 2x^2 + 2x + 1, P_8(x) = 2x^2 + 2x + 2\}$.

On a alors $Z(\Omega) = \{1, 3\}$, avec : $[Z = 1] = \{P_2, P_4, P_5, P_7\}$ et $[Z = 3] = \{P_1, P_3, P_6, P_8\}$, la probabilité uniforme assurant alors que :

$$P(Z = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = P(Z = 3)$$

On a alors : $E(Z) = 1.P(Z = 1) + 3.P(Z = 3) = \frac{4}{2} = 2$, $E(Z^2) = 1^2.P(Z = 1) + 3^2.P(Z = 3) = \frac{10}{2} = 5$, et $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 5 - 4 = 1$ d'après la formule de Koenig-Huygens.

2. Étude générale de la variable aléatoire Z

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

a) En généralisant le raisonnement mené plus haut : Ω est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n$ dont les coefficients sont tous entiers et compris dans $[\![1, p]\!]$. Aucun coefficients ne pouvant par conséquent être nul, les polynômes de Ω sont en fait tous de degré exactement $2n$, il y a $2n+1$ coefficients à choisir, avec p valeurs possibles pour chacun : $\boxed{\text{Card}(\Omega) = p^{2n+1}}$.

b) Comme on l'a remarqué en préambule de cette partie : le fait que pour un polynôme $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k.x^k$ donné, $a_n = a_{2n-n}$ implique que ce coefficient "central" compte toujours pour une coïncidence dans le calcul de la valeur de la v.a.r. Z. S'il n'y a pas d'autre coïncidence, Z prend bien sa valeur minimale 1.
On peut même, selon ce qu'on vient d'expliquer, dénombrer simplement les cas favorables à l'événement $[Z = 1]$:
⋆ On choisit les $n + 1$ premiers coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et a_n de Q : il y a p possibilités pour chacun.
⋆ On choisit ensuite les coefficients $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ parmi $[\![1, p]\!]$, en excluant pour chacun la valeur choisie pour le coefficient "symétrique" précédemment choisi (c'est-à-dire que pour tout entier k de $[\![n + 1, 2n]\!]$, $a_k \neq a_{2n-k}$ où $2n - k \in [\![0, n - 1]\!]$) : il ne reste donc que $(p - 1)$ possibilités pour chacun de ces n coefficients.
Ainsi : $\text{Card}([Z = 1]) = p^{n+1}.(p - 1)^n$, et d'après la probabilité uniforme :

$$P(Z = 1) = \frac{p^{n+1}(p-1)^n}{p^{2n+1}} = \frac{(p-1)^n}{p^n} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n.$$

c) Le nombre maximal de coïncidences est obtenu si et seulement si le polynôme Q est symétrique, c'est-à-dire : $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ a_k = a_{2n-k}$. Il y a alors bien $2n + 1$ coïncidences (on rappelle qu'à part $a_n = a_{2n-n}$, toutes les autres sont comptées deux fois), qui est la valeur maximale de Z.
Pour contruire les cas favorables à l'événement $[Z = 2n + 1]$, on peut :
⋆ Choisir les $n + 1$ premiers coefficients de Q parmi $[\![1, p]\!]$.
⋆ Dans ce cas, la relation $a_k = a_{2n-k}$ qui doit être vraie pour tout entier k compris notamment entre $n + 1$ et $2n$, ne laisse plus qu'une valeur possible pour chacun des coefficients $a_{n+1} = a_{n-1}, \ldots, a_{2n} = a_0$.
Ainsi : $\text{Card}([Z = 2n + 1]) = p^{n+1}$ et la probabilité uniforme donne bien :

$$P([Z = 2n + 1]) = \frac{p^{n+1}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^n}$$

d) On l'a déjà dit : toute coïncidence entre deux coefficients de Q est comptée deux foix, sauf $a_n = a_{2n-n}$ qui est systématiquement comptée une fois.
La variable aléatoire Z ne prend donc effectivement que les valeurs impaires de la forme $2j + 1$ avec $0 \leqslant j \leqslant n$, et pour obtenir les cas favorables à l'événement $[Z = 2j + 1]$, on choisit :
⋆ les j coefficients a_k avec $k \in [\![0, n - 1]\!]$ pour lesquels on aura $a_k = a_{2n-k}$: il y a j indices à choisir parmi n sans idée d'ordre et sans répétitions, ce qui donne $\binom{n}{j}$ possibilités.
⋆ Pour chacun de ces j coefficients, il faut choisir la valeur parmi $[\![1, p]\!]$.
⋆ Pour les $n - j$ coefficients a_k restants d'indices compris entre 0 et $n - 1$, il n'y a pas coïncidence avec a_{2n-k}, il y a donc p choix pour a_k, et $p - 1$ choix seulement pour a_{2n-k}.
⋆ On n'oublie pas de choisir le coefficient a_n, il y a p possibilités.

Finalement : $\text{Card}([Z=2j+1]) = \binom{n}{j} p^j.p^{n-j}.(p-1)^{n-j}.p = \binom{n}{j} p^{n+1}.(p-1)^{n-j}$, et :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ P([Z=2j+1]) = \frac{\binom{n}{j} p^{n+1}(p-1)^{n-j}}{p^{2n+1}} = \binom{n}{j} \frac{(p-1)^{n-j}}{p^n}$$

e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Puisque Z ne prend que des valeurs du type $2j+1$ avec $0 \leqslant j \leqslant n$, Y prend les valeurs $\dfrac{2j+1-1}{2} = j$, c'est-à-dire que : $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Pour tout entier $j \in [\![0,n]\!]$:
$P([Y=j]) = P([Z=2j+1]) = \binom{n}{j} \dfrac{(p-1)^{n-j}}{p^n}$ dont on réalise qu'on peut l'écrire sous la forme :
$P([Y=j]) = \binom{n}{j} \dfrac{(p-1)^n - j}{p^{j+n-j}} = \binom{n}{j} \left(\dfrac{1}{p}\right)^j . \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{n-j}$, ce qui fait apparaître que :

$$Y \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (n, \frac{1}{p}).$$

Le cours donne alors : $E(Y) = n \times \dfrac{1}{p} = \dfrac{n}{p}$, et $V(Y) = n \times \dfrac{1}{p} \times \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{n(p-1)}{p^2}$.
La relation $Y = \dfrac{Z-1}{2}$ se réécrivant : $Z = 2Y+1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent alors :

$$E(Z) = 2E(Y) + 1 = \frac{2n}{p} + 1, \text{ et } V(Z) = 2^2 V(Y) = \frac{4n(p-1)}{p^2}$$