MATHÉMATIQUES I - HEC E 2018

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose : $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) La matrice M est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, donc : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.
   Il est également clair que $\mathrm{rg}(M) = 2 = \mathrm{rg}(f)$, donc d'après le théorème du rang :
   $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2 = \dim E_0(f) \neq 4$, donc f n'est pas diagonalisable.

   b) On a déjà vu que $\mathrm{rg}(M) = 2$; de plus, $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1.

   c) On cherche ici tous les polynômes de degré 3, donc de la forme : $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, vérifiant $P(M) = 0$.
   Faisons le bilan des contraintes qui s'exercent sur les coefficients de P :

   - On sait tout d'abord que $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ doit être inclus dans l'ensemble des racines de P, donc 0 est racine de P, soit : $P(0) = 0 \iff d = 0$.
   - $P(M) = 0_4 \iff a.M^3 + b.M^2 + c.M = 0 \iff b.M^2 + c.M = 0_4$ puisque $M^3 = 0_4$.
   Or cette dernière égalité apparaît comme une combinaison linéaire nulle de M^2 et M : ces deux matrices étant évidemment non-colinéaires, elles forment donc une famille libre, et $b.M^2 + c.M = 0_4 \Longrightarrow b = c = 0$.

   Bref : les seuls polynômes annulateurs possibles de degré 3 de M sont de la forme : $P(X) = aX^3$, et réciproquement, pour tout réel $a \neq 0$, on a bien : $a.M^3 = 0_4$, donc $P(X) = a.X^3$ est bien un polynôme annulateur de M pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note $F_j = \mathrm{Im}(f^j)$, et $r_j = dim(F_j)$.

   a) Comme $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, $F_0 = \mathbb{R}^n$ et $r_0 = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
   Comme $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ est l'application nulle, $F_n = \mathrm{Im}(f^n) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $r_n = \dim(F_n) = 0$.

   b) *À partir de cette question l'exercice part dans des considérations totalement hors-programme, donc inintéressantes stratégiquement pour le/la candidat(e) avisé(e) qui se sera reporté sur le problème...*

PROBLÈME

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P([X_k = 1]) = p \quad \text{et} \quad P([X_k = 1]) = 1 - p.$$

On suppose que pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et X_ℓ est le même : on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

1. a) Dans chacun des deux cas suivants :

   (i) Lorsque les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on sait que :
   $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, $\quad \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ donc $r = 0$, et par ailleurs :

   $$V\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(1-p)$$

   On retrouve la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ce qui est bien naturel puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la somme de n v.a.r. de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p.

   (ii) Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales, alors on peut écrire :
   $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, $\quad \mathrm{Cov}(\mathrm{X_k}, \mathrm{X_\ell}) = \mathrm{Cov}(X_1, X_1) = V(X_1)$, donc $r = 1$.

   Par ailleurs, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = n.X_1$, donc $V\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = V(nX_1) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)$.

   La loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1$ est par ailleurs donnée par :

   $$nX_1(\Omega) = \{0, n\}, \quad P([nX_1 = 0]) = P([X_1 = 0]) = 1-p \quad \text{et} \quad P([nX_1 = n]) = P([X_1 = 1]) = p$$

   b) Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule générale :

   $$V\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,k]\!]^2 \\ i\neq j}} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

   Chacune des variances de la première somme vaut $p(1-p)$, et pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = r \times \sqrt{V(X_i)V(X_j)} = rp(1-p)$;
   il y a k^2 couples (i,j) dans $[\![1,k]\!]^2$, et $k^2 - k$ couples tels que $i \neq j$, donc :

   $$V\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\Big) = kp(1-p) + (k^2 - k).rp(1-p) = kp(1-p)\big(1 + (k-1)r\big)$$

c) On sait que $1 \leqslant k \leqslant n$ et qu'une variance est toujours positive ; dans l'expression précédente, $kp(1-p)$ est un facteur strictement positif, donc pour $k = n$ on obtient l'inégalité :

$$V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \geqslant 0 \iff 1 + (n-1)r \geqslant 0 \iff (n-1)r \geqslant -1 \iff r \geqslant -\frac{1}{n-1}$$

2. On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Comme X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli, on sait que leur covariance est donnée par la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert pour les couples de variables aléatoires :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) &= \sum_{(x,y)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)} xy.P([X_1 = x] \cap [X_2 = y]) - p^2 \\ &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - p^2\end{aligned}$$

puisque les produits xy pour $(x, y) \in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega) = \{0, 1\}^2$ sont tous nuls, sauf pour $x = y = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}r = -1 &\iff \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\sqrt{V(X_1)V(X_2)} \iff P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - p^2 = -p(1-p) \\ &\iff P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = -p + p^2 + p^2 = p(2p-1)\end{aligned}$$

b) Il faut ici penser à un principe de symétrie : puisque X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors les variables $Y_1 = 1 - X_1$ et $Y_2 = 1 - X_2$ suivent aussi des lois de Bernoulli, de paramètre $q = 1 - p$ cette fois.

Les propriétés de la covariance et de la variance donnent :

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(1 - X_1, 1 - X_2) = (-1)^2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

puisque $\mathrm{Cov}(aX + b, cX + d) = ac.\mathrm{Cov}(X, Y)$, et :

$$V(Y_1) = V(1 - X_1) = (-1)^2V(X_1) = V(X_1) = V(X_2) = V(Y_2)$$

Bref, le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 est le même que celui de Y_1 et Y_2.

On peut donc appliquer au couple (Y_1, Y_2) le même raisonnement que celui mené à la question précédente avec le couple (X_1, X_2) en échangeant simplement les rôles de p et $q = 1 - p$, de sorte que :

$$r = -1 \iff P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = q(2q-1) \iff P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1-p)(1-2p)$$

puisque bien sûr, on a l'égalité d'événements $[Y_i = 1] = [X_i = 0]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

c) Une probabilité étant toujours positive, et puisque $0 < p < 1$, les deux conditions précédentes, équivalentes à $r = -1$ donnent les implications :

$$r = -1 \Longrightarrow p(2p-1) \geqslant 0 \Longrightarrow 2p - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow p \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\text{et } r = -1 \Longrightarrow (1-p)(1-2p) \geqslant 0 \Longrightarrow 1 - 2p \geqslant 0 \Longrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi, $r = -1$ implique $p = \frac{1}{2}$, mais dans ce cas les deux probabilités $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ et $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$ sont nulles au vu de leurs expressions en fonction de p !

On en déduit que la somme des probabilités des deux seules autres valeurs du couple (X_1, X_2) est égale à 1 :

$$r = -1 \Longrightarrow p = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = 1$$

ce qui donne bien l'implication demandée, puisque :

$$[X_1 + X_2 = 1] = \big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]\big) \cap \big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]\big) \quad \text{(union disjointe).}$$

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a) Cette dernière condition signifie que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est presque-sûrement égale à 1 : elle est donc de variance nulle ! Et on peut écrire :

$$np(1-p)\big(1+(n-1)r\big) = 0 \iff 1+(n-1)r = 0 \iff r = -\frac{1}{n-1}$$

et par ailleurs : $\quad r = \dfrac{\operatorname{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \dfrac{P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - p^2}{p(1-p)}$,

Mais : $\quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ est négligeable, car cet événement implique $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]$!

D'où la relation :

$$r = \frac{0-p^2}{p(1-p)} \iff r = -\frac{p}{1-p} \iff (1-p)r = -p \iff r = pr - p \iff r = p(r-1)$$

$$\iff p = \frac{r}{r-1} = \frac{-\frac{1}{n-1}}{-\frac{1}{n-1} - 1} = \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

b) D'après ce qui précède : pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\{0,1\}^n$ tel que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 1$, l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]$ est inclus dans $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k > 1\right]$, donc est négligeable.

Les seuls n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est potentiellement non nuls, sont tous ceux dont la somme est égale à 1, ce qui n'est possible que si un et un seul des x_i est égal à 1, les autres étant égaux à 0.

Le nombre de ces n-uplets est égal à n : $\quad (1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, tout comme les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ en fait !

Il convient enfin de remarquer que puisque les variables aléatoires X_k suivent toutes la même loi, on peut considérer que les événements $\bigcap_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} [X_k = 0] \cap [X_i = 1] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ ont tous la même probabilité ; leur union disjointe est égale à l'événement $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]$ qui est de probabilité 1, ce qui permet d'en déduire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P\left(\bigcap_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} [X_k = 0] \cap [X_i = 1]\right) = \frac{1}{n}$$

Ces n-uplets étant les seuls pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est non nulle.

Partie II. Lois bêta-binomiales

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)+(y-1)\ln(1-t)}$ est définie, positive et continue sur $]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est impropre en 0 seulement.

   Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}(1-t)^{y-1} = 1$, alors $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, et on sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $1-x<1 \iff x>0$.

   D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues positives : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\mathrm{d}t$, donc convergente si et seulement si $x>0$.

   b) Pour tout réel ε tel que $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$: le changement de variable affine $u = 1-t$ donne bien, avec $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$:

   $$\int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_{u=\frac{1}{2}}^{u=\varepsilon} (1-u)^{x-1}\big(1-(1-u)\big)^{y-1}(-\mathrm{d}u) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\mathrm{d}u$$

   c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est doublement impropre, en 0 et en 1, elle est donc convergente si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ le sont.

   On a vu que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$; $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand ε tend vers 0^+, ce qui est le cas si et seulement si $y>0$, d'après a).

   On a bien démontré que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x>0$ **et** $y>0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \quad B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$

5. Soient x et y des réels strictement positifs.

   a) Soient a et b deux réels tels que $0<a<b<1$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ en posant :

   $$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^x & \longrightarrow & u'(t) & = & x.t^{x-1} \\ v'(t) & = & (1-t)^{y-1} & \longrightarrow & v(t) & = & -\dfrac{1}{y}(1-t)^y \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, donc :

$$\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{y}t^x(1-t)^y\right]_a^b + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = -\frac{1}{y}b^x(1-b)^y + \frac{1}{y}a^x(1-a)^y + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t$$

   où : $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} \int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = B(x,y+1)$, cette intégrale étant bien convergente puisque $x>0$ et $y>0 \Longrightarrow y+1>0$.

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, $\lim\limits_{a \to 0^+} a^x = 0$ et $\lim\limits_{a \to 0^+} (1-a)^y = 1$ donc $\lim\limits_{a \to 0^+} \dfrac{1}{y} a^x (1-a)^y = 0$;

Puisque $x > 0$, $y > 0$ et $\lim\limits_{b \to 1^-} 1-b = 0^+$, $\lim\limits_{b \to 1^-} (1-b)^y = 0$ et $\lim\limits_{b \to 1^-} b^x = 1$ donc $\lim\limits_{b \to 1^-} -\dfrac{1}{y} b^x (1-b)^y = 0$;

en faisant tendre a vers 0^+ et b vers 1^-, on obtient bien la relation :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x,y+1)$$

b) Avec de la pratique, on apprend à chercher d'autres relations entre les objets manipulés ; en écrivant :

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\right)\mathrm{d}t = B(x,y) - B(x+1,y) \end{aligned}$$

Et la relation précédente donne donc :

$$B(x,y+1) = B(x,y) - \frac{x}{y} B(x,y+1) \iff \left(1+\frac{x}{y}\right) B(x,y+1) = B(x,y) \iff B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y)$$

6. Pour tout réel z, soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}$$

ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(1)^{[m+1]} = (m+1) \times (1)^{[m]}$, relation de récurrence qui donne par récurrence immédiate : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(1)^{[m]} = m!$.

Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et tout couple d'entier (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned} B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{x+k-1}{x+\ell-k} \times B(x+k-1, y+\ell-(k-1)) \\ &= \frac{x+k-1}{y+\ell-k} \times \frac{x+k-2}{y+\ell-(k-2)} \times B(x+k-2, y+\ell-(k-2)) \\ &= \ldots \quad (k \text{ itérations du processus}) \\ &= \frac{(x+k-1)(x+k-2)\ldots(x+1)x}{(y+\ell-k)(y+\ell-(k-1))\ldots(y+\ell-1)} \times B(x,y+\ell) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} B(x,y+\ell) &= \frac{y+\ell-1}{x+y+\ell-1} \times B(x,y+\ell-1) \\ &= \frac{(y+\ell-1)(y+\ell-2)}{(x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)} \times B(x,y+\ell-2) \\ &\ldots \quad (\ell \text{ itérations du processus}) \\ &= \frac{(y+\ell-1)(y+\ell-2)\ldots(y+1)y}{(x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y)} \times B(x,y) \end{aligned}$$

En simplifiant les produits $(y+\ell-1)(y+\ell-2)\ldots(y+1)y$ et $(y+\ell-k)(y+\ell-(k-1))\ldots(y+\ell-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} B(x+k,y+\ell-k) &= \frac{x(x+1)\ldots(x+k-2)(x+k-1) \times y(y+1)\ldots(y+\ell-k-1)}{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+\ell-2)(x+y+\ell-1)} \times B(x,y) \\ &= \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y) \end{aligned}$$

7. Soient a et b des réels strictement positifs.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $\quad p_k = \binom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) D'après la relation précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)} = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\mathrm{d}t \qquad \text{on reconnaît le binôme de Newton}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t \qquad \text{puisque } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}\mathrm{d}t = (t+1-t)^n = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \frac{B(a,b)}{B(a,b)} = 1$$

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P([S=k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}.$$

b) Lorsque $a = b = 1$: pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P([S=k]) = \binom{n}{k} \frac{(1)^{[k]} \times (1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{2 \times 3 \times \ldots \times (2+n-1)} = \frac{n!}{2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

ce qui permet de conclure que la loi $\mathcal{B}(n;1,1)$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

c) Une variable S suivant la loi $\mathcal{B}(n;a,b)$ est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$E(S) = \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} kP(S=k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \times \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)} \qquad \text{formule sans nom}$$

$$= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(a+j+1,b+n-j-1) \qquad [j=k-1]$$

$$= \frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{a+j}(1-t)^{b+n-j-2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 t^a(1-t)^{b-1} \times \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j}\mathrm{d}t}_{=(t+1-t)^{n-1}=1}$$

$$= \frac{n.B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{n \times \frac{a}{b} B(a,b+1)}{B(a,b)} = \frac{n \times \frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{a+b} B(a,b)}{B(a,b)} \qquad \text{d'après 5.a) et 5.b)}$$

$$E(S) = \frac{na}{a+b}$$

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soient a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1,x_2) \in \{0,1\}^2, \quad P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}.$$

8. a) La définition générale précédente se décline de la façon suivante :

$$P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{B(a+1,b+1)}{B(a,b)} \quad \text{et} \quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)}$$

où, d'après les relations de la Partie II :

$$B(a+1,b+1) = \frac{a}{b+1} B(a,b+2) = \frac{a}{\cancel{b+1}} \times \frac{\cancel{b+1}}{a+b+1} B(a,b+1) = \frac{a}{a+b+1} \times \frac{b}{a+b} B(a,b),$$

donc : $\quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$.

De même : $\quad B(a+2,b) = \dfrac{a+1}{b} B(a+1,b+1) = \dfrac{a+1}{\cancel{b}} \times \dfrac{a \times \cancel{b}}{(a+b)(a+b+1)} B(a,b),$

Donc : $\quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$. On en déduit :

$$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{a}{(a+b)\cancel{(a+b+1)}} \times \cancel{(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}$$

La variable X_1 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$. Les rôles de X_1 et X_2, x_1 et x_2 étant symétriques dans la définition générale au début de cette partie, c'est aussi la loi de X_2.

b) La variable aléatoire $X_1 + X_2$ a pour univers-image $\{0,1,2\}$ et :

- $P([X_1 + X_2 = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{B(a,b+2)}{B(a,b)} = \dfrac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$ puisque :

$$B(a,b+2) = \frac{b+1}{a+b+1} B(a,b+1) = \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} B(a,b)$$

- $P([X_1 + X_2 = 2]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$ comme on l'a déjà vu.
- $P([X_1 + X_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \dfrac{2ab}{(a+b)(a+b+1)}$ toujours d'après a), les deux probabilités dont on fait la somme étant égales.

On vérifie que les valeurs obtenues correspondent à celles de la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(2; a, b)$:

- $\dbinom{2}{0} \dfrac{(a)^{[0]} \times (b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \dfrac{1 \times b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 0)$.
- $\dbinom{2}{1} \dfrac{(a)^{[1]} \times (b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \dfrac{2ab}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 1)$
- $\dbinom{2}{2} \dfrac{(a)^{[2]} \times (b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} = \dfrac{a(a+1) \times 1}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 2)$.

c) $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])}{P([X_2 = 1]} = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \times \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

9. La fonction suivante effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes :

```
1 function x = randbetabin(a,b)
2     x = zeros(1,2);
3     u = (a+b)*rand();
4     v = (a+b+1)*rand();
5         if (u<a) then x(1,1)=1; if (v<a+1) then x(1,2)=1; end;
6             else if (v<a) then x(1,2)=1; end;
7         end;
8 endfunction
```

a) L'appel à la fonction `rand()` simule la loi uniforme sur $[0,1]$; d'après le cours sur la loi uniforme, `(a+b)*rand()` simule donc la loi uniforme sur $[0, a+b]$, de fonction de répartition

$$F_U \,:\, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a+b} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a+b \\ 1 & \text{si } x \geqslant a+b \end{cases}$$

Si U est une variable aléatoire suivant cette loi : $0 < a < a+b$, donc :
$P([U < a]) = F_U(a) = \dfrac{a}{a+b} = P([X_1 = 1])$, ce qui explique la partie du test :

`if (u<a) then x(1,1)=1`.

b) Puisque $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$ correspond aussi à la probabilité $P([V < a+1])$ lorsque $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a+b+1])$, la condition du deuxième test est bien : `if (v<a+1) then x(1,2)=1`.

Le `else` de la ligne 6 signifie que `(u<a)` n'est pas réalisé, c'est donc le contraire qui l'est, et `x(1,1)` reste égal à 0 comme défini initialement à la ligne 2.
On utilise dans ce cas la relation :

$$P_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) = \frac{P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1])}{P(X_1 = 0)} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \times \frac{a+b}{b} = \frac{a}{a+b+1} = P(V < a)$$

pour définir la condition du dernier test (voir ci-dessus).

10. a) La covariance des deux variables de Bernoulli est, comme on l'a rappelé au début de la Partie I :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - P([X_1 = 1]) \times P([X_2 = 1]) \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b} \times \left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b} \right) \\
&= \frac{a}{a+b} \times \frac{a^2 + ab + a + b - a^2 - ab - a}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}$$

$V(X_1) = \dfrac{a}{a+b} \times \left(1 - \dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$, donc le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 est :

$$r_{X_1,X_2} = \frac{\operatorname{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \times \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{1}{a+b+1}$$

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.
La fonction `randbetabin(a,b)` simule, d'après les calculs précédents, deux variables de Bernoulli de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$ et de coefficient de corrélation linéaire $\dfrac{1}{a+b+1}$.

On cherche donc à exprimer a et b en fonction de p et r tels que :
$r = \dfrac{1}{a+b+1} \iff a+b+1 = \dfrac{1}{r} \iff a+b = \dfrac{1}{r} - 1 = \dfrac{1-r}{r}$,
et $p = \dfrac{a}{a+b} \iff a = (a+b)p = \dfrac{p(1-r)}{r}$, d'où : $\quad b = \dfrac{1-r}{r} - a = \dfrac{(1-p)(1-r)}{r}$.
Pour p et r donnés, on simule donc deux variables aléatoires X_1 et X_2 de loi de Bernoulli de paramètre p et de coefficient de corrélation linéaire r via l'appel :

`randbetabin(p*(1-r)/r,(1-p)*(1-r)/r)`.