MATHÉMATIQUES I - HEC E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $\quad f(x) = x - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big).v$

1. a) On peut déjà dire que : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\underbrace{x}_{\in\mathbb{R}^n} - \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)}_{\in\mathbb{R}}.\underbrace{v}_{\in\mathbb{R}^n} = f(x) \in \mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire de x et v.

   Pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et pour tous réels λ et μ :
   $$\lambda.x + \mu.y = (\lambda.x_1 + \mu.y_1, \lambda.x_2 + \mu.y_2, \ldots, \lambda.x_n + \mu.y_n),$$
   donc :
   $$\begin{aligned} f(\lambda.x + \mu.y) &= (\lambda.x + \mu.y) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda.x_i + \mu.y_i\Big).v \\ &= \lambda.x + \mu.y - \lambda.\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big).v - \mu.\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big).v \\ &= \lambda.\left[x - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big).v\right] + \mu.\left[y - \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big).v\right] \\ f(\lambda.x + \mu.y) &= \lambda.f(x) + \mu.f(y) \end{aligned}$$
   L'application f est donc bien linéaire, et c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

   b) Pour montrer la relation demandée, on calcule, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:
   $$f \circ f(x) = f\left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).v\right) = f(x) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).f(v) \text{ par linéarité de } f$$
   Or : $\quad f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right).v = v - 1.v = 0_{\mathbb{R}^n} \quad$ vu l'hypothèse de départ faite sur les composantes de v.

   On a donc prouvé que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f \circ f(x) = f(x)$, soit :
   $$f \circ f = f \qquad \text{(égalité d'applications).}$$

2. De la relation : $\quad f\circ f = f \iff f\circ f - f = 0$, on déduit que $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f.

   Les valeurs propres *possibles* de f sont donc les racines de P, à savoir 0 et 1.

   Reste à vérifier si elles sont bien valeurs propres :

   - On a vu que $f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ dans le calcul précédent, or v ne peut pas être le vecteur nul puisque la somme de ses composantes vaut 1.

     Donc v est vecteur propre pour la valeur propre 0, et $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.

   - Un vecteur propre u pour la valeur propre 1 vérifierait :

$$f(x) = x \iff x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).v = x \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).v = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \quad \text{puisque } v \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

     Il n'est ainsi pas difficile de voir par exemple que $e_1 - e_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ vérifie cette condition, donc est un vecteur propre de f pour la valeur propre 1, donc $1 \in \mathrm{Sp}(f)$.

$$\text{Finalement :} \quad \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}.$$

3. a) Par définition de l'image d'un endomorphisme, un vecteur y appartient à $\mathrm{Im}f$ si et seulement si il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = f(z)$.

   Mais on a alors :

$$f(y) = f\circ f(z) = f(z) = y \quad \text{puisque} \quad f\circ f = f.$$

   Réciproquement, si $f(y) = y$, alors y a pour antécédent lui-même par f, donc appartient à $\mathrm{Im}f$...!

   En définitive :

$$\mathrm{Im}f = \{y \in \mathbb{R}^n;\ f(y) = y\},$$

   c'est-à-dire que l'image de f est confondue avec son sous-espace propre pour la valeur propre 1.

   b) Comme 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé qui est $\mathrm{Ker}f$ est non réduit à 0, donc de dimension non-nulle, et : $\quad \dim \mathrm{Ker}f \geqslant 1$.

   Le *théorème du rang* pour f donne :

$$\dim \mathrm{Im}f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Ker}f \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}f \leqslant n-1$$

   c) Pour tout entier $i \in [\![1, n-1]\!]$: $e_i - e_{i+1}$ est le vecteur dont toutes les coorodonnées sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1, et la $(i+1)$-ième qui vaut -1.

   La somme de toutes les coordonnées de ce vecteur est donc nulle, et par conséquent :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad f(e_i - e_{i+1}) = (e_i - e_{i+1}) - 0.v = e_i - e_{i+1}$$

   Tous ces vecteurs sont solutions de : $f(y) = y$, donc appartiennent à $\mathrm{Im}f$ d'après 3.a).

   d) On vient de trouver $n-1$ vecteurs ${}_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n$ appartenant à l'image de f.

   Si cette famille est libre, vu que $\dim \mathrm{Im}f \leqslant n-1$, on a alors $\dim \mathrm{Im}f = n-1$ et ces vecteurs forment une base de l'image.

   Posons donc une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs :

$$\lambda_1.(e_1 - e_2) + \lambda_2.(e_2 - e_3) + \ldots + \lambda_{n-1}.(e_{n-1} - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\iff (\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}, -\lambda_{n-1}) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

   On en déduit successivement : $\quad \lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$.

   La famille $(e_i - e_{i+1})_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ est libre, c'est donc aussi une base de $\mathrm{Im}f$ d'après les raisonnement précédents.

   Le rang de f, c'est-à-dire la dimension de l'image de f, est donc égal à $n-1$.

4. a) Le théorème du rang et le résultat précédent permettent de calculer plus précisément :

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathrm{Im} f = n - (n-1) = 1$$

Il suffit donc de trouver un vecteur non-nul de $\mathrm{Ker} f$ pour qu'il constitue à lui seul, un base du noyau.
Ce vecteur et déjà connu : c'est v, donc (v) est une base de $\mathrm{Ker} f$.

b) L'endomorphisme f a pour seules valeurs propres 0 et 1 :

- Le sous-espace propre $E_0(f)$ pour la valeur propre 0 est le noyau de f.

- Comme on l'a en fait déjà vu plus haut, le sous-espace propre $E_1(f)$ pour la valeur propre 1 est par définition l'ensemble des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y) = y$, c'est donc aussi $\mathrm{Im} f$ d'après 3.a).

c) Les résultats précédents montrent que :

0 et 1 sont les seules valeurs propres de f, et $\dim E_0(f) + \dim E_1(f) = 1 + n - 1 = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc f est bien diagonalisable.

5. Pour écrire la matrice M de f dans la base canonique, il faut d'abord calculer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$f(e_i) = e_i - \left(\sum_{j=1}^{n} (e_i)_j\right).v = e_i - 1.v = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_{i-1}, 1 - v_i, -v_{i+1}, \ldots, -v_n)$$

puisque e_i possède une seule coordonnée non nulle (la i-ième), égale à 1. On en déduit :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & \cdots & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & -v_n & \cdots & 1 - v_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On sait que rassembler une base de chacun des sous-espaces propres de f diagonalisable, donne une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour f.

La famille $\mathcal{B}' = (v, e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une telle base, dans laquelle la matrice de f est tout simplement :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\dfrac{1}{\lambda}$.

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $\dfrac{1}{\lambda}$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{X_n} = \frac{1}{n} Y_n \quad$ et $\quad M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. D'après le cours sur la loi exponentielle :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent toutes la même loi que X : par linéarité de l'espérance, $\overline{X_n}$ admet une espérance qui vaut :

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Comme de plus les n variables aléatoires de l'échantillon sont mutuellement indépendantes, $\overline{X_n}$ admet une variance qui vaut :

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

Mais alors :

$E(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\lambda}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(\overline{X_n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\lambda^2} = 0$ donc $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais convergent de $\dfrac{1}{\lambda}$

3. a) Une question absolument incontournable[1] : la v.a.r. M_n étant le maximum des n v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$, pour tout réel x :

$[M_n \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si *tous* les événements $[X_k \leqslant x]$ sont réalisés, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. et posée dans des termes absolument semblables à l'épreuve EMLyon de la même année !

En clair : $\forall x \in \mathbb{R},\ (M_n \leqslant x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant x)$. Le passage à la probabilité donne alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P(M_n \leqslant x) &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x) \text{ par indépendance mutuelle des } X_k\\ &= \big(P(X \leqslant x)\big)^n \text{ car toutes les v.a.r. } X_k \text{ suivent la même loi que } X\end{aligned}$$

$$P(M_n \leqslant x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il est alors clair que F_{M_n} est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ comme fonction constante nulle, et sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe C^1.

Comme par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_{M_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1-e^{-\lambda x})^n = (1-1)^n = 0 = F_{M_n}(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} F_{M_n}(x)$, la fonction F_{M_n} est donc continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

La variable aléatoire M_n est donc à densité, et on obtient une telle densité f_{M_n} par dérivation de F_{M_n} sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où on définit une valeur arbitraire, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{M_n}(x) = \begin{cases} n.f_X(x).\big(F_X(x)\big)^{n-1} = n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on pose $f_{M_n}(0) = 0$, ce qui correspond à la forme demandée par l'énoncé.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: la v.a.r. M_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x.f_{M_n}(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de : $\displaystyle n.\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $e^{-\lambda x} \in]0,1]$, donc $1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[$ et $0 \leqslant x\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \leqslant x\lambda e^{-\lambda x}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge et est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$ puisqu'elle est égale à l'espérance d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ .

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle n.\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$ est convergente, donc que M_n admet une espérance.

c) L'énoncé demande ici de poser le changement de variable : $z = 1 - e^{-\lambda x}$, qui est bien de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^a xe^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$ où $a > 0$; on étudie successivement :

- L'élément différentiel : $\mathrm{d}z = \lambda.e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
- Le corps de l'intégrale : $x(1-e^{-\lambda x})^{n-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-z).z^{n-1}.\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{d}z$

  puisque : $z = 1 - e^{-\lambda x} \iff e^{-\lambda x} = 1 - z \iff x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-z)$
- Les bornes : $x = 0 \to z = 1 - e^0 = 1$, et $x = a \to z = 1 - e^{-\lambda a}$

Donc, par changement de variable :

$$\int_0^a xe^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1}\ln(1-z)\mathrm{d}z.$$

d) La variable aléatoire M_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente.
Comme la fonction $x \mapsto x f_{M_n}(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, cela revient à prouver la convergence simple de $n\lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$, ce qu'on a fait à la question 2.b).

Le changement de variable réalisé en 2.c) ne change pas la nature de l'intégrale impropre, ici convergente : on peut passer à la limite quand a tend vers $+\infty$ dans la relation de 2.c) ; comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-\lambda a} = 1-0 = 1$, on obtient bien :

$$E(M_n) = n\lambda \times \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\mathrm{d}z = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\mathrm{d}z.$$

e) La fonction $h :\ z \mapsto (1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)$ est bien définie et dérivable sur $[0,1[$ (puisque $1-z>0$ pour tout $z\in[0,1[$), avec :

$$\forall z \in [0,1[,\quad h'(z) = -1.\big(1-\ln(1-z)\big) + (1-z)\left(0-\frac{-1}{1-z}\right) = -1+\ln(1-z)+\frac{1-z}{1-z} = \ln(1-z)$$

ce qui prouve bien que h est une primitive sur $[0,1[$ de $z\mapsto \ln(1-z)$.

Soit alors $b\in[0,1[$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^b z^n\ln(1-z)\mathrm{d}z$, en posant :

$$\begin{aligned} u(z) &= z^n & &\longrightarrow & u'(z) &= nz^{n-1}\\ v'(z) &= \ln(1-z) & &\longrightarrow & v(z) &= (1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1, donc par intégration par parties :

$$\int_0^b z^n\ln(1-z)\mathrm{d}z = \Big[z^n(1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)\Big]_0^b - n\int_0^b z^{n-1}(1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)\mathrm{d}z$$

$$= b^n(1-b) - b^n(1-b)\ln(1-b) - n\int_0^b (z^{n-1}-z^n)\mathrm{d}z + n\int_0^b z^{n-1}\ln(1-z)\mathrm{d}z - n\int_0^b z^n\ln(1-z)\mathrm{d}z$$

Lorsque b tend vers 1^- : $\displaystyle\lim_{b\to1^-} b^n(1-b) = 0$, $\displaystyle\lim_{b\to1^-}(1-b)\ln(1-b) = \lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0$ par croissances comparées.
Les intégrales restantes sont toutes convergentes d'après ce qui précède, le passage à la limite donne donc la relation :

$$\int_0^1 z^n\ln(1-z)\mathrm{d}z = -n\int_0^1 (z^{n-1}-z^n)\mathrm{d}z + n\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\mathrm{d}z - n\int_0^1 z^n\ln(1-z)\mathrm{d}z$$

$$\iff -\frac{\lambda}{n+1}E(M_{n+1}) = -n\left[\frac{z^n}{n}-\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \lambda E(M_n) + \frac{n\lambda}{n+1}E(M_{n+1})$$

$$\iff -\frac{(n+1)\lambda}{n+1}E(M_{n+1}) = -n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \lambda E(M_n)$$

$$\iff -\lambda E(M_{n+1}) = -\frac{n}{n(n+1)} - \lambda E(M_n)$$

$$\iff E(M_{n+1}) = E(M_n) + \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. La relation précédente donne, par itération :

$$E(M_n) = E(M_{n-1}) + \frac{1}{\lambda.n} = E(M_{n-2}) + \frac{1}{\lambda.(n-1)} + \frac{1}{\lambda.n} = \cdots = E(M_1) + \frac{1}{\lambda.2} + \cdots + \frac{1}{\lambda(n-1)} + \frac{1}{\lambda.n}$$

Or : $\quad M_1 = X_1$ car il n'y a alors que X_1 dans l'échantillon, et $E(M_1) = E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$ puisque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On en déduit :

$$E(M_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{\lambda}.u_n$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad M'_n = \frac{M_n}{u_n} \quad$ et $\quad v_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$. *On admet que* $V(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$

(les calculs seraient semblables à ceux effectués pour obtenir $E(M_n)$, mais beaucoup plus lourds.)

a) Par linéarité de l'espérance :

$$E(M'_n) = \frac{1}{u_n} E(M_n) = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{\lambda} u_n = \frac{1}{\lambda}.$$

D'après les propriétés de la variance :

$$V(M'_n) = \frac{1}{(u_n)^2} V(M_n) = \frac{v_n}{(\lambda u_n)^2}.$$

b) La suite de terme général v_n est en fait la *série de Riemann* d'exposant $\alpha = 2 > 1$, elle est donc convergente (et on a peut-être appris que $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6}$).

La suite (u_n) est en fait la *série harmonique*, qui diverge, avec : $\quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) Puisque $E(M'_n) = \frac{1}{\lambda}$, M'_n est bien un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.

Par quotient d'une suite convergente avec une suite qui diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{(\lambda u_n)^2} = 0 = \lim_{n \to +\infty} V(M'_n).$$

L'estimaeur sans biais M'_n de $\frac{1}{\lambda}$, est donc également un estimateur convergent.

d) Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{j}\right)^2$.

- C'est d'abord une fonction polynômiale toujours positive sur $\mathbb{R}$, puisque c'est la somme de carrés de réels.
- La forme développée de $Q(x)$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x^2 - \frac{2}{j}.x + \frac{1}{j^2}\right) = nx^2 - 2x \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = x^2 - 2u_n.x + v_n$$

Mais comme ce trinôme du second degré ne change pas de signe : son discriminant est négatif,

c'est-à-dire : $\quad (-2u_n)^2 - 4nv_n \leqslant 0 \iff 4(u_n)^2 - 4nv_n \leqslant 0 \iff (u_n)^2 \leqslant nv_n$.

e) Les deux estimateurs M'_n et $\overline{X_n}$ de $\frac{1}{\lambda}$, sont tous les deux sans biais. Leurs risques respectifs sont donc égaux à leurs variances, qui valent pour mémoire : $V(M'_n) = \frac{v_n}{\lambda^2(u_n)^2}$, et $V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n\lambda^2}$.

Et comme on l'a vu à la question précédente :

$$(u_n)^2 \leqslant nv_n \iff \frac{1}{n} \leqslant \frac{v_n}{(u_n)^2} \iff \frac{1}{\lambda^2 n} \leqslant \frac{v_n}{\lambda^2(u_n)^2} \iff V(\overline{X_n}) \leqslant V(M'_n)$$

L'estimateur le plus intéressant est donc $\overline{X_n}$, puisque sans biais comme l'autre, il présente le risque quadratique le plus faible.

Partie II. Un exemple.

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I.

Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé pour un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du j-ième composant.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.

On note $(x_, x_2, \ldots, x_n)$ la réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on pose : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

5. a) Le réel $\frac{1}{\lambda}$ est l'espérance de la variable aléatoire X, on l'interprète donc comme le temps de vie moyen d'un composant électronique, qui s'exprime en heures.

b) Soit $p \in]0;1[$. On cherche un réel h_p tel que : $P(X > h_p) = p$.

Le réel h_p ne peut pas être négatif, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $P(X > x) = 1$. On cherche donc $h_p > 0$ tel que :

$$P(X > h_p) = p \iff e^{-\lambda . h_p} = p \iff -\lambda . h_p = \ln(p) \iff h_p = -\frac{\ln(p)}{\lambda}$$

c) Un résultat classique est que la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ de l'échantillon i.i.d. est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance mathématique $\frac{1}{\lambda}$ de leur loi commune.

Démontrons que $H_n = -\frac{\ln(p)}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais et convergent de h_p :

Par linéarité de l'espérance : $E(H_n) = -\frac{\ln(p)}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = -\frac{\ln(p)}{n} \times n \times \frac{1}{\lambda} = -\frac{\ln(p)}{\lambda} = h_p$,

donc H_n est un estimateur sans biais de h_p.

Le risque quadratique de cet estimateur est donc égal à sa variance ; par indépendance mutuelle des v.a.r. X_i de l'échantillon :

$$V(H_n) = \frac{(-\ln(p))^2}{n^2} V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{(\ln(p))^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{(\ln(p))^2}{n^2} \times n \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{(\ln(p))^2}{n.\lambda^2}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} V(H_n) = 0$, et H_n est bien un estimateur sans biais et convergent du paramètre h_p.

d) Avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = 10^5$ (et donc $n = 100$), la réalisation de l'estimateur H_{100} est, pour $p = \dfrac{1}{2}$, une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$, qui vaut :

$$-\ln(\frac{1}{2}) \times \overline{x} = \ln(2) \times \frac{1}{100} \times 10^5 \approx 700 \quad \text{avec } \ln(2) \approx 0,7$$

6. *On admet sans démonstration* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $t > 0$ un réel fixé et $N(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

a) Il est clair que la variable aléatoire $N(t)$ est discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On fait ensuite le lien entre F_{Y_n} et la loi de $N(t)$:

La variable aléatoire Y_n est clairement à densité puisque sa fonction de répartition F_{Y_n} est manifestement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, où malgré tout :

$$\lim_{x \to 0^+} F_{Y_n}(x) = 1 - e^0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{0^k}{k!} = 1 - 0^0 = 0 = \lim_{x \to 0^-} F_{Y_n}(x) = F_{Y_n}(0)$$

La fonction F_{Y_n} est donc continue en 0, et sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour tout réel positif t, $F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leqslant t)$ est donc aussi égale à $P(Y_n < t)$ qui est la probabilité que la somme des durées de vie des n premiers composants soit strictement inférieure à t : c'est ainsi équivalent au fait qu'il y ait eu au moins n pannes dans l'intervalle $[0; t[$.

En clair, les événements $[Y_n < t]$ et $[N(t) \geqslant n]$ sont égaux, et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(N(t) \geqslant n) = F_{Y_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On retrouve alors classiquement la loi de $N(t)$ en écrivant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ P(N(t) = n) &= P(N(t) \geqslant n) - P(N(t) \geqslant n+1) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} . \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi que $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt.

b) Une estimation "naturelle" du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0; t[$, est l'espérance de la variable aléatoire $N(t)$, qui est donc λt.

7. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$.

a) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et soient t_1 et t_2 deux réels vérifiant :

$$\Phi(t_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \Phi(t_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

On sait que Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$, qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Ici : $\quad \Phi(t_1) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \Phi(t_2) = \Phi(-t_2)$ donc $t_1 = -t_2 \iff t_2 = -t_1$ par bijectivité de Φ.

b) On pose : $\quad R_n = \sqrt{n}(\lambda \overline{X_n} - 1)$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, vérifions ici que R_n est la variable aléatoire centrée réduite associée à la moyenne empirique $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$; selon des calculs déjà effectués à la partie I :

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

La variable centrée réduite associée à $\overline{X_n}$ est donc :

$$\frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}} = \frac{\overline{X_n} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda\sqrt{n}}} = \lambda\sqrt{n}(\overline{X_n} - \frac{1}{\lambda}) = \sqrt{n}(\lambda\overline{X_n} - 1)$$

qui est bien égale à R_n. Le théorème de limite centrée assure ainsi que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

c) Le résultat précédent donne ainsi, par définition de la convergence en loi :

$$\lim_{n\to+\infty} P\big([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]\big) = \lim_{n\to+\infty} F_{R_n}(t_1) - F_{R_n}(-t_1) = \Phi(t_1) - \Phi(-t_1) = \Phi(t_1) - \Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

d) Vérifions que l'intervalle $[-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]$ peut s'écrire sous la forme : $\left[U_n \leqslant \dfrac{1}{\lambda} \leqslant V_n\right]$, où U_n et V_n sont deux estimateurs de $\dfrac{1}{\lambda}$:

$$-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1 \iff -t_1 \leqslant \sqrt{n}(\lambda\overline{X_n} - 1) \leqslant t_1 \iff -\frac{t_1}{\sqrt{n}} + 1 \leqslant \lambda\overline{X_n} \leqslant \frac{t_1}{\sqrt{n}} + 1$$

Pour t_1 fixé et n assez grand, $1 - \dfrac{t_1}{\sqrt{n}} > 0$ donc on peut passer à l'inverse et :

$$-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1 \iff \frac{1}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{1}{\lambda\overline{X_n}} \geqslant \frac{1}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \iff \frac{\overline{X_n}}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \geqslant \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{\overline{X_n}}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}}$$

Par équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\overline{X_n}}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{\overline{X_n}}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} P(-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1) = 1 - \alpha$$

ce qui montre que $\left[\dfrac{\overline{X_n}}{1 + \frac{t_1}{\sqrt{n}}} ; \dfrac{\overline{X_n}}{1 - \frac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

e) Par bijectivité de Φ : $\quad t_2 = \Phi^{-1}\big(\frac{\alpha}{2}\big) = -t_1, \quad$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to0} \Phi^{-1}\big(\frac{\alpha}{2}\big) = \Phi^{-1}(0) = -\infty$;
ainsi, quand α tend vers 0, t_1 tend vers $+\infty$ et $t_2 = -t_1$ tend vers $-\infty$.

En repartant de l'inégalité : $\quad 1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda\overline{X_n} \leqslant 1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}$, lorsque t_1 est très grand (et n fixé), l'inégalité de gauche est toujours vraie et on est ramené, par inverse, à :

$$\frac{1}{\lambda\overline{X_n}} \geqslant \frac{1}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}} \iff \frac{1}{\lambda} \geqslant \frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}} \quad \text{très proche de 0.}$$

Bref, l'intervalle de confiance devient "proche" de $]0;+\infty[$ pour un risque α proche de 0.

Lorsqu'au contraire α tend vers 1, et donc le niveau de confiance $1-\alpha$ tend vers 0 :

$\lim\limits_{\alpha\to 1} \Phi^{-1}\big(\frac{\alpha}{2}\big) = \Phi^{-1}\big(\frac{1}{2}\big) = 0$, c'est-à-dire que t_1 et t_2 sont très proches de 0 quand α devient proche de 1.

Mais alors : les deux bornes de l'intervalle de confiance se rapprochent de $\overline{X_n}$, c'est-à-dire que la longueur de cet intervalle est très faible : d'où un risque élevé !

f) Pour $\alpha = 0.05$, on donne $t_1 \approx 2$.

La réalisation de l'échantillon donne : $\quad \overline{x} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = \dfrac{10^5}{100} = 10^3$, et :

$\dfrac{\overline{x}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{100}}} \approx \dfrac{1000}{1+\dfrac{2}{10}} = 1000 \times \dfrac{10}{12}$. Sachant que $\dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} = 1-\dfrac{1}{6} \approx 1-0.167 = 0.833$, alors la borne inférieure de l'intervalle de confiance est bien 833 (arrondi à l'unité).

Par ailleurs : $\quad \dfrac{\overline{x}}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{100}}} \approx \dfrac{1000}{1-\dfrac{2}{10}} = 1000 \times \dfrac{5}{4} = 1000 \times 1.25 = 1250.$

La réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance 0.95 est bien :

$$[833; 1250]$$

Partie III. Un résultat asymptotique.

Les notations et le contexte sont ceux des parties précédentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = M_n - \dfrac{1}{\lambda}\ln(n)$ et on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n.

8. a) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(x) = P(T_n \leqslant x) &= P(M_n - \frac{1}{\lambda}\ln(n) \leqslant x) = P(M_n \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)) \\
&= P\big(\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)]\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)) \quad \text{par indépendance des } X_i \\
&= \Big(P(X \leqslant x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\Big)^n \quad \text{car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi que } X
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(x) = \Big(F_X(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n))\Big)^n$$

b) Pour un réel x fixé quelconque, on cherche les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) > 0 \iff \frac{1}{\lambda}\ln(n) > -x \iff \ln(n) > -\lambda x \iff n > e^{-\lambda x}$$

car $\lambda > 0$ et par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
Le premier entier qui convienne est $N_x = \lfloor e^{-\lambda x} \rfloor + 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_x$:

$$F_X\Big(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\Big) = 1 - e^{-\lambda.(x+\frac{1}{\lambda}\ln(n))} = 1 - e^{-\lambda.x - \ln(n)} = 1 - e^{-\ln(n)} \times e^{-\lambda.x} = 1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}$$

c) Soit x un réel quelconque ; pour n assez grand, $n \geqslant N_x$ et :

$$F_{T_n}(x) = \Big(F_X(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n))\Big)^n = \Big(1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\big(1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}\big)\Big)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-\lambda.x}}{n} = 0$, selon l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$:

$$\ln\big(1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-\lambda.x}}{n}, \text{ donc } n\ln\big(1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-\lambda.x}$$

Cela signifie que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\big(1 - \dfrac{e^{-\lambda.x}}{n}\big) = e^{-\lambda.x}$, donc par composition avec l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(n\ln\big(1 - \frac{e^{-\lambda.x}}{n}\big)\Big) = e^{-e^{-\lambda.x}} = \lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x)$$

9. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \exp(-e^{-\lambda.x})$.

a) Les fonctions exp et $x \mapsto -\lambda.x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, F est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}.e^{-e^{-\lambda.x}} > 0$, donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda.x = -\infty$ car $\lambda > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-\lambda.x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -e^X = 0$,

et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-e^{-\lambda.x}} = \lim\limits_{X\to0} e^X = 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -\lambda.x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-\lambda.x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -e^X = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-e^{-\lambda.x}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

La fonction F continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans :

$$F(\mathbb{R}) = \Big]\lim_{x\to-\infty} F(x); \lim_{x\to+\infty} F(x)\Big[=]0;1[.$$

b) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$; c'est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T obtenue comme la dérivée de F sur $\mathbb{R}$, et à ce titre f_T est continue sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = F'(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x - e^{-\lambda.x})$$

c) Le résultat de la question 8.c) se réécrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$, ce qui assure la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la variable T.

10. a) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente. Pour tout $x \geqslant 0$:

$0 \leqslant x f_T(x)$ et $x f_T(x) = \lambda.x.e^{-\lambda.x}.e^{-e^{-\lambda.x}} \leqslant \lambda.x.e^{-\lambda.x}$ car $0 < e^{-e^{-\lambda.x}} \leqslant 1$ vu que $-e^{-\lambda.x} < 0$.

Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda.x.e^{-\lambda.x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente, c'est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Les fonctions considérées étant continues sur $\mathbb{R}^+$, par comparaison d'intégrales de fonction continues positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_T(x)\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

Il reste à prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf_T(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Pour tout x négatif : $|x^2 \times xf_T(x)| = \lambda|x|^3 \times e^{-\lambda x - e^{-\lambda x}}$. En posant $X = -\lambda x = \lambda|x|$, l'expression devient :

$$\frac{1}{\lambda^2}X^3 e^{X-e^X} = \frac{1}{\lambda^3}.e^{\ln(X^3)+X-e^X} = \frac{1}{\lambda^2}.e^{e^X\left(3\frac{\ln(X)}{e^X}+\frac{X}{e^X}-1\right)},$$

où :

lorsque x tend vers $-\infty$, $X = -\lambda x$ tend vers $+\infty$, et : $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} 3\frac{\ln(X)}{e^X} + \frac{X}{e^X} - 1 = 0 + 0 - 1$ par croissances comparées, donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X\left(3\frac{\ln(X)}{e^X} + \frac{X}{e^X} - 1\right) = -\infty$, et :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\lambda^2}.e^{\ln(X^3)+X-e^X} = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\lambda^2}e^y = 0 = \lim_{x\to-\infty} |x^2 \times xf_T(x)|$$

Ce résultat signifie que : $|xf_T(x)| = o_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$: par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} xf_T(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto xf_T(x)$ est continue sur $[-1;0]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf_T(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_T(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xf_T(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xf_T(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, ce qui assure que la variable aléatoire T admet une espérance.

b) On pose $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(\lambda X)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda X) \leqslant x) = P(\ln(\lambda X) \geqslant -\lambda.x) \\
&= P(\lambda.X \geqslant e^{-\lambda.x}) = P(X \geqslant \frac{e^{-\lambda.x}}{\lambda}) \qquad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\
&= 1 - P(X \leqslant \frac{e^{-\lambda.x}}{\lambda}) \qquad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda.\frac{e^{-\lambda.x}}{\lambda}}) \qquad \text{car } \frac{e^{-\lambda.x}}{\lambda} > 0
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = e^{-e^{-\lambda.x}} = F_T(x)$$

Les variables aléatoires Z et T ont ainsi la même fonction de répartition, donc suivent la même loi.

c) Puisque les variables aléatoires Z et T suivent la même loi, alors elles admettent la même espérance, dont l'existence est garantie depuis la question 10.a).

L'espérance en question peut être obtenue grâce au théorème de transfert via la relation $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(\lambda X)$:

$$E(T) = E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}.\ln(\lambda x).f_X(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \ln(\lambda x).\lambda.e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$
$$E(T) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \qquad \text{via le changement de variable } [t=\lambda x]$$

d) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$, sa courbe est donc située en-dessous de toutes ses tangentes. La tangente classiquement utilisée est celle au point d'abscisse 1, d'équation : $y = x - 1$.
Ainsi donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(t) \leqslant t - 1 \iff \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad e^{-t}\ln(t) \leqslant e^{-t}(t-1).$$

Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1, on a reconnu l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1, qui a pour densité la fonction $t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
Alors, par croissance de l'intégrale, les fonctions concernées étant continues et d'intégrales impropres convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t}(t-1)\mathrm{d}t \iff \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1-1=0$$

La multiplication par $-\dfrac{1}{\lambda} < 0$ donne ainsi :

$$E(T) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

11. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

a) On sait déjà que F réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$; pour tout réel $y \in]0;1[$, il existe un unique réel x tel que :

$$F(x) = y \iff e^{-e^{-x}} = y \iff -e^{-x} = \ln(y) \iff e^{-x} = -\ln(y)$$
$$\iff -x = \ln\big(-\ln(y)\big) \iff x = -\ln\big(-\ln(y)\big)$$

La bijection réciproque G de F est donc définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = -\ln\big(-\ln(x)\big)$.

b) On considère le script `Scilab` suivant :

```
x=linspace(-2,2,400); y=(exp(-exp(-x))); plot(x,y); plot(y,x)
```

(i) Le vecteur `x` créé par le script contient les termes successifs d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme $a_1 = -2$ et de 400-ième terme $a_{400} = 2$. En notant r la raison de la suite (appelée aussi le *pas*), $a_{400} = a_1 + 399 \times r \iff 2 = -2 + 399r \iff r = \dfrac{4}{399}$.

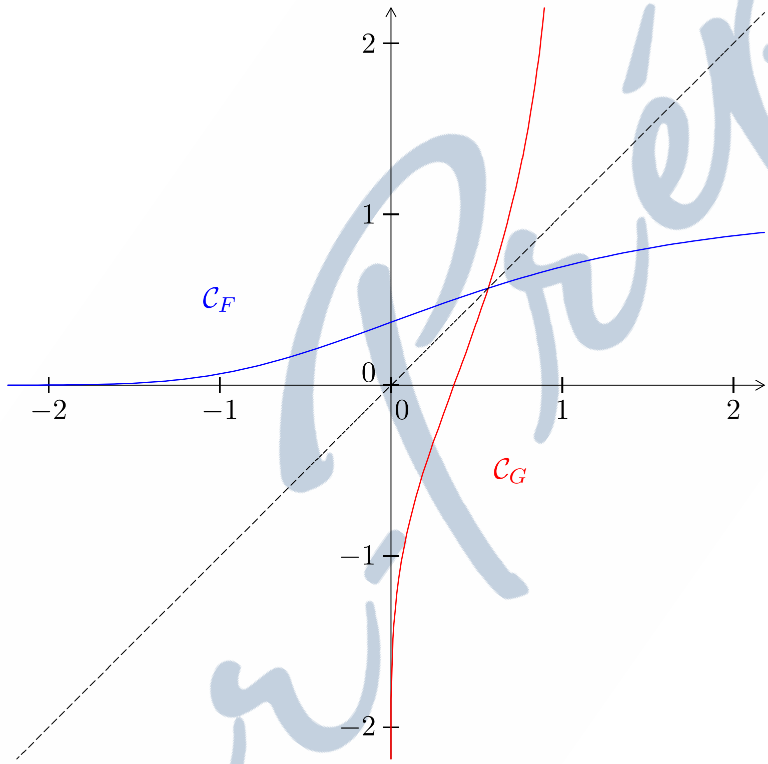
La question est donc de savoir s'il existe un entier N compris entre 1 et 400 tel que :

$$a_N = 0 \iff -2 + \frac{4}{399}N = 0 \iff N = \frac{399}{2}$$

La solution trouvée n'est évidemment pas un entier, ce qui prouve que le réel 0 n'appartient pas au vecteur `x`.

(ii) Après avoir créé le vecteur d'abscisses `x`, la commande suivante crée le vecteur `y` des images des éléments de `x` par la fonction F.

La commande `plot(x,y)` affiche la courbe de la fonction F sur $[-2, 2]$. La commande `plot(y,x)`, où les vecteurs d'abscisses et d'ordonnées ont été échangées, permet d'afficher la courbe de la bijection réciproque G sur le même graphique :



c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. On détermine la loi de la variable aléatoire $G(U)$ en calculant sa fonction de répartition :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(G(U) \leqslant x) &= P(U \leqslant F(x)) \quad \text{car } F \text{ est bijective strictement croissante sur } \mathbb{R}, \text{ et } G = F^{-1} \\ &= F(x) \quad \text{car pour tout } x \in \mathbb{R},\ F(x) \in [0, 1] \text{ et } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[) \end{aligned}$$

Bref : la variable aléatoire $G(U)$ a une fonction de répartition égale à F sur $\mathbb{R}$, ce qui assure qu'elle suit la même loi que T.

d) Une rédaction possible du résultat demandé : on sait que T admet une espérance égale à l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t.e^{-t-e^{-t}}\mathrm{d}t$.

L'intégrale impropre convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_T(t)\mathrm{d}t$ est celle d'une fonction continue, négative, donc par négativité de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f_T(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$.

Par ailleurs, on a remarqué à la question 10.a) que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant te^{-t-e^{-t}} \leqslant te^{-t}$, où $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, vu que c'est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, qui vaut donc 1. Ainsi par croissance de l'intégrale, toutes les intégrales impropres concernées étant convergentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.f_T(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$, et donc, d'après la relation de Chasles :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{0} t.f_T(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t.f_T(t)\mathrm{d}t \leqslant 0+1 \qquad \text{donc} \quad E(T) \leqslant 1$$

e) La façon la plus simple de simuler T est d'utiliser le résultat de la question 11.c) : on simule la variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $]0;1[$, et alors $G(U) = -\ln\big(-\ln(U)\big)$ suit la même loi que T :

```
U = rand()
T = -log(-log(U))
```

f) On continue d'utiliser ici le résultat de la question 11.c) : $E(T) = E\big(G(U)\big)$ peut être approchée par la méthode de Monte-Carlo en calculant $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G(U_k)$ où $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est un échantillon de variables mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $]0;1[$.

```
n = input('taille de l echantillon?')
U = grand(1,n,'unf',0,1)  // simulation d'échantillon de loi uniforme sur ]0,1[
T = -log(-log(U))         // simulation de l'échantillon suivant la loi de T
m = mean(T)
disp('valeur approchée de E(T) : '+string(m))
```

Avec un échantillon de taille 10^6, on obtient la valeur approchée : $E(T) \approx 0.576$.