MATHÉMATIQUES I - HEC E 2014

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j}, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \qquad \text{(somme des coefficients des lignes)}$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \qquad \text{(somme des coefficients des colonnes)}$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}, \quad s_8(A) = \sum_{i=3}^{3} a_{i,4-i} \qquad \text{(somme des coefficients des diagonales)}$$

Pour tout couple $(k\ell) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.

   a) Il est facile de démontrer que l'application s_7 est linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:
   Pour toutes matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, et tout réel λ :
   la matrice $\lambda.A + B$ a pour coefficients les réels $(\lambda.a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, et :

   $$s_7(\lambda.A + B) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda.a_{i,j} + b_{i,j}) = \lambda.\sum_{i=1}^{3} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{3} b_{i,i} = \lambda.s_7(A) + s_7(B).$$

   L'ensemble $\mathcal{E}$ apparaît donc comme le **noyau** de cette application linéaire ; à ce titre, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   b) Le point de vue précédent nous permet facilement d'obtenir la dimension de $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(s_7)$:
   Comme s_7 est à valeurs dans $\mathbb{R}$: son image $\mathrm{Im}(s_7)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, et est donc de dimension 0 ou 1.
   Il est clair que $\dim \mathrm{Im}(s_7) \neq 0$ puisque s_7 n'est pas l'application nulle (par exemple : $s_7(E_{1,1}) = 1 \neq 0$), donc $\dim \mathrm{Im}(s_7) = 1$, et d'après le **théorème du rang** :

   $$\dim \mathcal{E} = \dim \mathrm{Ker}(s_7) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}(s_7) = 9 - 1 = 8.$$

   Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, fait correspondre le vecteur $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$.

2. a) On montre de la même façon que pour s_7, que toutes les applications $s_k :\ \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont linéaires.
   Ainsi :
   Pour toutes matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, et tout réel λ :

   $$\begin{aligned} f(\lambda.A + B) &= (s_1(\lambda.A + B), s_2(\lambda.A + B), s_3(\lambda.A + B), s_4(\lambda.A + B), s_5(\lambda.A + B), s_6(\lambda.A + B), \\ &\qquad s_7(\lambda.A + B), s_8(\lambda.A + B)) \\ &= (\lambda.s_1(A) + s_1(B), \lambda.s_2(A) + s_2(B), \lambda.s_3(A) + s_3(B), \lambda.s_4(A) + s_4(B), \lambda.s_5(A) + s_5(B), \end{aligned}$$

$$\lambda.s_6(A)+s_6(B),\lambda.s_7(A)+s_7(B),\lambda.s_8(A)+s_8(B))$$
$$= \lambda.\left(s_1(A),s_2(A),s_3(A),s_4(A),s_5(A),s_6(A),s_7(A),s_8(A)\right)$$
$$+\left(s_1(B),s_2(B),s_3(B),s_4(B),s_5(B),s_6(B),s_7(B),s_8(B)\right)$$

$f(\lambda.A+B)=\lambda.f(A)+f(B)$

b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. On écrit facilement la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} f(E_{11}) & f(E_{12}) & f(E_{13}) & f(E_{21}) & f(E_{22}) & f(E_{23}) & f(E_{31}) & f(E_{32}) & f(E_{33}) \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{matrix}
\end{array}$$

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A)=s_2(A)=s_3(A)=s_4(A)=s_5(A)=s_6(A)=s_7(A)=s_8(A)$$

a) On peut ici adopter le point de vue suivant : si on note V le vecteur de $\mathbb{R}^8$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, une matrice A appartient à $\mathcal{G}$ si et seulement si les coefficients du vecteur $f(A)$ sont tous égaux, donc :

$$A\in\mathcal{G} \iff f(A)\in\operatorname{Vect}(V) \iff \exists\,\alpha\in\mathbb{R};\ f(A)=\alpha.V$$

Soient donc deux éléments A et B de $\mathcal{G}$: il existe deux réels α et β tels que $f(A)=\alpha.V$ et $f(B)=\beta.V$; pour tout réel λ, par linéarité de f :

$$f(\lambda.A+B)=\lambda.f(A)+f(B)=(\lambda.\alpha+\beta).V$$

ce qui prouve que $\lambda.A+B$ appartient bien à $\mathcal{G}$ (son image par f appartient à $\operatorname{Vect}(V)$).
Ainsi, $\mathcal{G}$ est en effet un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) On note $\operatorname{Ker}(f)$ le noyau de l'application linéaire f ; soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors on a les équivalences :

$$A\in\operatorname{Ker}(f) \iff f(A)=0_{\mathbb{R}^8} \iff \forall k\in[\![1,8]\!],\ s_k(A)=0$$

Ainsi, une matrice A appartient à $\operatorname{Ker}(f)$ si et seulement si les 8 sommes $s_k(A)$ $(1\leqslant k\leqslant 8)$ sont toutes égales (et donc : $A\in\mathcal{G}$), et nulles (donc en particulier : $s_7(A)=0$, et $A\in\mathcal{E}$).

L'équivalence : $A\in\operatorname{Ker}(f) \iff A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{E}$ donne bien l'égalité des ensembles :

$$\mathcal{G}\cap\mathcal{E}=\operatorname{Ker}(f)$$

c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit A une matrice de $\mathcal{G}$: les huit sommes (lignes, colonnes, diagonales) sont toutes égales à un même réel α tel que : $f(A)=\alpha.V$. On cherche alors une matrice B de $\operatorname{Ker}(f)$ et un réel λ tels que : $A=B+\lambda.J$.
Raisonnons par implications[1] : supposant que B et λ existent, la linéarité de f donne alors :

$$f(A)=f(B)+\lambda.f(J)\Longrightarrow \alpha=0+3\lambda\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{3}.\alpha \qquad \text{puisque } B\in\operatorname{Ker}(f)$$

1. on dit parfois qu'on raisonne par *analyse-synthèse*

Réciproquement, si on pose, pour $A \in \mathcal{G}$, et α la valeur commune aux trois sommes :

Si on définit $B = A - \frac{1}{3}.\alpha.J$: A et J appartiennent au sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$, donc B aussi et par linéarité de f :

$$f(B) = f(A) - \frac{1}{3}.\alpha.f(J) = \alpha.V - \frac{1}{3}.\alpha.3.V = 0$$

Donc $B \in \operatorname{Ker}(f)$, et on a bien la relation : $A = B + \frac{1}{3}.\alpha.J$, c'est-à-dire que toute matrice de $\mathcal{G}$ peut s'écrire comme une matrice de $\operatorname{Ker}(f)$ et d'une matrice de $\operatorname{Vect}(J)$, et ceci de façon unique.

d) En l'absence de méthode plus efficace proposée par l'énoncé, on se résout à calculer le rang de la matrice F... Remarquons tout de même la relation entre ses six premières lignes : $L_1 + L_2 + L_3 = L_4 + L_5 + L_6$ (matrice ligne à 9 coefficients égaux à 1), ce qui s'écrit aussi : $L_1 = L_4 + L_5 + L_6 - L_2 - L_3$, et on peut donc supprimer L_1 dans le calcul du rang.
On peut aussi intelligemment réorganiser les lignes restantes, en les écrivant dans l'ordre suivant : $L_7, L_5, L_8, L_2, L_4, L_6, L_3$, de sorte que :

$$\operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_3 \end{array}$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 - L_4}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_6 \leftarrow 2L_6 - L_5}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a échelonné la matrice et obtenu 7 pivots non-nuls,

$$\text{Ainsi : } \operatorname{rg}(F) = 7$$

e) Le **théorème du rang** s'applique, et donne :

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \iff \dim \operatorname{Ker}(f) = 9 - 7 = 2$$

Il suffit donc, pour obtenir une base de f, de trouver deux vecteurs du noyau formant une famille libre, c'est-à-dire non-colinéaires. Il est facile de voir que les matrices :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Satisfont à ces exigences : (U_1, U_2) est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Le mot de la fin :

Comment ne pas terminer par cette jolie curiosité mathématique sur les carrés magiques ?

La matrice de $\mathcal{G}$: $3.U_1 + U_2 + 5.J = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ utilisant une et une seule fois chacun des 9 chiffres non-nuls !

PROBLÈME

- *La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée* Φ.
- *La notation* exp *désigne la fonction exponentielle.*
- *Les trois parties du problème étaient largement indépendantes.*

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0;1[$, à valeurs réelles, telle que : $N(x)=x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)$.
   a) Pour tout x de $[0,1[$, $1-x>0$ donc la fonction N est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle comme somme, produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   b) On définit sur $[0;1[$ la fonction h par : $h(x)=x+\ln(1-x)$. Comme précédemment, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, avec :
   $\forall x\in[0;1[,\ h'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}$.
   Sur $[0;1[$, $\dfrac{-x}{1-x}\leqslant 0$, donc h est décroissante sur cet intervalle, et :
   $\forall x\in[0;1[,\ h(x)=x+\ln(1-x)\leqslant h(0)=0-\ln(1)=0 \iff \forall x\in[0;1[,\ \ln(1-x)\leqslant -x$.
   c) Pour tout réel x de $[0;1[$:
   $N'(x)=2x-2-2[-\ln(1-x)+(1-x).\dfrac{-1}{1-x}]=2x-2+2\ln(1-x)+2=2(x+\ln(1-x))\leqslant 0$ d'après la question précédente.
   d) La fonction N est donc décroissante sur $[0;1[$, et par conséquent :
$$\forall x\in[0;1[,\ N(0)\geqslant N(x)\geqslant \lim_{x\to1^-}N(x)$$
   où : $\lim\limits_{x\to1^-}x^2-2x=-1$, et $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=\lim\limits_{X\to0^+}X\ln(X)=0$ par croissances comparées :
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^-}N(x)=-1$ et comme $N(0)=0-0-\ln(1)=0$:
$$\forall x\in[0;1[,\ -1\leqslant N(x)\leqslant 0$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x)=-2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.
   a) Au voisinage de 0, on a : $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$.
   Quand x tend vers 0, $u=-x$ aussi et $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
   b) Le développement limité précédent permet d'écrire, au voisinage de 0 ($x>0$) :
   $f(x)=-2\dfrac{x-x-x^2/2+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1+o(1)$, d'où : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$. La fonction f est bien prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0)=1$.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée.
   c) La fonction f est bien dérivable sur $]0;1[$ comme quotient et composée de fonction dérivables, et :
$$\begin{aligned}\forall x\in]0;1[,\ f'(x)&=-2.\frac{(1-\frac{1}{1-x}).x^2-(x+\ln(1-x)).2x}{x^4}\\&=-2.\frac{\frac{-x^3}{1-x}-2x(x+\ln(1-x))}{x^4}=-2.\frac{-x^3-2x(1-x)(x+\ln(1-x))}{x^4(1-x)}\\&=-2.\frac{-x^3-2x+2x^3-2x(1-x)\ln(1-x)}{x^4(1-x)}=-2.\frac{x^2-1x-2(1-x)\ln(1-x)}{x^3(1-x)}\\ \forall x\in]0;1[,\ f'(x)&=-2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}\end{aligned}$$
   d) On a vu que : $]\forall x\in]0;1[,\ N(x)\leqslant 0$. Comme $x^3(1-x)>0$ sur cet intervalle, on en conclut que : $\forall x\in]0;1[,\ f'(x)>0$. La continuité de f en 0 assure que f est strictement croissante sur $[0;1[$.

On a vu que $f(0)=1$ après prolongement ; au voisinage de 1, par valeurs inférieures :
$\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to 1^-} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} = +\infty$.

x	0	1
f	1 $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi : la fonction f est continue, strictement croissante sur $[0;1[$: elle réalise donc une bijection, d'après le théorème du même nom, de $[0;1[$ dans l'intervalle image $[1;+\infty[$.

3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0;1[$: $g_n(x)=\exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}f(x)\right)$.

   a) La fonction f étant continue sur $[0;1[$, il en est de même pour la fonction g_n par composition de fonctions continues, exp et $x\mapsto x^2$ étant continues sur $\mathbb{R}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$: $\lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{nx^2}{2}f(x)=-\infty$, et puisque $\lim\limits_{X\to-\infty}\exp(X)=0$, par composition :
   $\lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x)=0$. La fonction g_n est donc prolongeable par continuité en 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente ("fausse impropreté" en 1), et ce quel que soit l'entier $n\in\mathbb{N}^*$. On note I_n cette intégrale.

   b) La fonction g_n est bien sûr positive sur $[0;1[$ car l'exponentielle d'un réel l'est toujours.
   On a établi plus haut que : $\forall x\in[0;1[,\ f(x)\geqslant f(0)=1$ (f étant croissante), donc :
   $\forall x\in[0;1[,\ -\dfrac{nx^2}{2}\leqslant -\dfrac{nx^2}{2}f(x)$ (car $-\dfrac{nx^2}{2}\leqslant 0$).
   La croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ permet de conclure :
   $$\forall x\in[0;1[,\ 0\leqslant g_n(x)=\exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)\leqslant\exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$$

   c) Dans la double inégalité précédente, les fonctions concernés sont continues, positives sur $[0;1[$, coninues ou prolongeable par continuité en 1, donc d'intégrales convergentes entre 0 et $1>0$: les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale assurent donc que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$
   L'intégrale centrale est bien sûr I_n, quant à celle de gauche, le changement de variable affine $u=t\sqrt{n}$ donne :
   $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1\exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right)\mathrm{d}t&=\int_0^{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}\\&=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_0^{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\\&=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.\left(\Phi(\sqrt{n})-\Phi(0)\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.\left(\Phi(\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$
   On a bien démontré l'encadrement : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant I_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}.\left(\Phi(\sqrt{n})-\dfrac{1}{2}\right)$.

   d) Comme Φ est une fonction de répartition, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Phi(\sqrt{n})\leqslant 1$, et donc :
   $\Phi(\sqrt{n})-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant I_n\leqslant\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n})-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, ce qui donne bien l'encadrement demandé.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

   a) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$: $n+2\geqslant 3>e$, donc $\ln(n+2)>1$, ce qui donne bien : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<v_n<1$ par inverse.

   b) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $w_n=f(v_n)$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$, et comme f est continue en 0 :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=f(0)=1$, ce qui prouve la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donne sa limite.

c) Montrons successivement les inégalités demandées :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < v_n < 1$ et la relation de Chasles donne :
$\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x + \int_{v_n}^1 g_n(x)\mathrm{d}x$, où $\displaystyle\int_{v_n}^1 g_n(x)\mathrm{d}x$ est positive comme intégrale convergente d'une fonction continue, positive sur $[v_n;1[$. On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x$.

Sur l'intervalle $[0;v_n]$, la fonction f est croissante donc : $\forall x \in [0;v_n],\ f(x) \leqslant f(v_n)$.
D'où : $\forall x \in [0;v_n],\ -\dfrac{nx^2}{2}f(x) \geqslant -\dfrac{nx^2}{2}f(v_n) \Longrightarrow \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}f(x)\right) = g_n(x) \geqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}w_n\right)$.
Les fonctions concernées sont continues sur $[0;v_n]$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\mathrm{d}x.$$

On réalise pour finir le changement de variable affine $u = x\sqrt{nw_n}$ dans la dernière intégrale :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\mathrm{d}x = \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{nw_n}}$. On a bien démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

d) On sait déjà que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \iff I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$.
La question précédente permet aussi d'écrire :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} &\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi w_n}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\\ &\geqslant \frac{2}{\sqrt{w_n}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\\ &\geqslant \frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \Phi(0)\right)\end{aligned}$$

On a bien obtenu l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$.

e) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n\sqrt{nw_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)}.\sqrt{w_n} = \dfrac{n^{1/2}}{\ln(n)}.\dfrac{\sqrt{w_n}}{1+\frac{\ln(1+2/n)}{\ln(n)}}$, où :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}}{\ln(n)} = +\infty$ par croissances comparées, et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1+2/n)}{\ln(n)} = 1 = \lim_{n\to+\infty} w_n$.
On conclut que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n\sqrt{nw_n} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Phi(v_n\sqrt{nw_n}) = \lim_{X\to+\infty} \Phi(X) = 1$, d'où :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2}\right) = 2.(1-\frac{1}{2}) = 1$.
L'encadrement obtenu à la question précédente donne, d'après le théorème du même nom :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1 \iff I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Pour tout réel $x > 0$: $J_1(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t$ se calcule à l'aide d'une intégration par parties, en posant :
$\begin{array}{lll} u(t) = t & \to & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} & \to & v(t) = -e^{-t}\end{array}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et :
$\forall x > 0,\ J_1(x) = \displaystyle\int 0^x te^{-t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1-(x+1)e^{-x}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise à nouveau une intégration par parties dans l'intégrale $J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t$, en posant : $\begin{array}{lcl} u(t) = t^n & \rightarrow & u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) = e^{-t} & \rightarrow & v(t) = -e^{-t} \end{array}$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, et :

$$\forall x > 0,\ J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\left[-t^n e^{-t}\right]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)$$

$$J_n(x) = -\frac{1}{n!}.x^n e^{-x} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t}_{J_{n-1}(x)}$$

ce qui est bien la relation demandée.

c) Par itération de la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n e^{-x} \\ &= J_{n-2}(x) - \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x} - \frac{1}{n!}x^n e^{-x} \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{J_0(x)}_{1-e^{-x}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k e^{-x} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-x}.\frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

d) La relation obtenue à la question b) peut se réécrire :

$\forall n \in \mathbb{N}*,\ \forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!J_n(x) = n!J_{n-1}(x) - x^n e^{-x} = n.\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t - x^n e^{-x}$.

On peut ainsi montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente :

$\boxed{\text{I.}}$ $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^x t^0 e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$ qui tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ convergente pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Au rang suivant, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ par croissances comparées, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n.\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t - 0$ existe.

On en déduit la convergence de l'intégrale, et la relation : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence, et la relation : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ donne par récurrence immédiate :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$

e) Le changement de variable affine $t = n(1-x)$ dans l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$ (où $x = 1 - \frac{t}{n}$) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}.f(x)\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \exp\left(n(x + \ln(1-x))\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_n^0 \exp\left(n(1 - \frac{t}{n} + \ln(\frac{t}{n}))\right).(-\frac{1}{n})\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\int_0^n e^n.e^{-t}.e^{n\ln(t/n)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \frac{e^n}{n}\int_0^n \left(\frac{t}{n}\right)^n .e^{-t}\mathrm{d}t = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}.\frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}J_n(n)$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6. a) Le théorème de stabilité de la loi de Poisson spécifie que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ et μ, alors leur somme $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Ce théorème se généralise (par récurrence) au cas de la somme de n variables de Poisson mutuellement indépendantes comme ici : leur somme S_n suit la loi de Poisson de paramètre n (somme des n paramètres tous égaux à 1).

   b) Vu que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ P(S_n \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}.\frac{n^k}{n!} = 1 - J_n(n)$ d'après la relation obtenue en 5.c).

   On a aussi : $P(S_n \geqslant n) = 1 - P(S_n < n) = 1 - P(S_n \leqslant n-1) = J_{n-1}(n)$ selon le même principe.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n.e^{-x}$.

   a) La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, avec :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x}) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.
   Sur $\mathbb{R}^+$, $x^{n-1} \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$, le signe de $h_n'(x)$ est donc celui de $n-x$, d'où le tableau de variation :

x	0		n		$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
h_n	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

   b) L'introduction de la fonction h_n permet de réécrire certaines des relations précédentes :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n \leqslant n) = 1 - J_n(n) = 1 - \displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^n h_n(t)\mathrm{d}t$,

   et de même : $P(S_{n+1} \leqslant n+1) = 1 - J_{n+1}(n+1) = 1 - \displaystyle\frac{1}{(n+1)!}\int_0^{n+1} h_{n+1}(t)\mathrm{d}t$.

   la relation obtenue en 5.b) se réécrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ J_n(x) = J_{n+1}(x) + \displaystyle\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) = -J_{n+1}(n+1) + J_n(n) = -J_{n+1}(n+1) + J_{n+1}(n) + \frac{1}{(n+1)!}n^{n+1}e^{-n}$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!}\left(\int_0^{n+1} h_{n+1}(t)\mathrm{d}t - \int_0^n h_{n+1}(t)\mathrm{d}t - h_{n+1}(n)\right)$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!}.\left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\mathrm{d}t - h_{n+1}(n)\right) \text{ relation de Chasles}$$

$$P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) = -\frac{1}{(n+1)!}.\left(\int_n^{n+1} \left(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\right)\mathrm{d}t\right)$$

   car $\displaystyle\int_n^{n+1} h_{n+1}(n)\mathrm{d}t = h_{n+1}(n) \times (n+1-n) = h_{n+1}(n)$

   c) Sur l'intervalle $[n; n+1]$, la fonction h_{n+1} est croissante, donc : $\forall t \in [n; n+1],\ h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geqslant 0$.
   La fonction intégrée est continue sur $[n; n+1]$, les bornes sont bien écrites dans l'ordre croissant, donc par positivité de l'intégrale :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_n^{n+1} \left(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par produit avec $-\displaystyle\frac{1}{(n+1)!} < 0$, on obtient bien :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) \leqslant 0$, c'est-à-dire que la suite $(P(S_n \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Sur le même mode, on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{n+1} \geqslant n+1) - P(S_n \geqslant n) = J_n(n+1) - J_{n-1}(n) = J_n(n+1) - \left(J_n(n) + \frac{1}{n!}n^n e^{-n}\right) \text{ d'après 5.b)}$$
$$= J_n(n+1) - J_n(n) - \frac{1}{n!}h_n(n) = \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n!}h_n(n)$$
$$= \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n))\,\mathrm{d}t$$

Sur l'intervalle $[n; n+1]$, la fonction h_n est, elle, décroissante, donc : $\forall t \in [n; n+1],\ h_n(t) - h_n(n) \leqslant 0$. La fonction concernée étant continue sur $[n; n+1]$, les bornes dans l'ordre croissant : la croissance de l'intégrale donne cette fois :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n))\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{n+1} \geqslant n+1) - P(S_n \geqslant n) \leqslant 0$$

La suite $(P(S_n \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc elle aussi décroissante.

e) Les deux suites $(P(S_n \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(P(S_n \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes, minorées par 0 car il s'agit de probabilités ! Elles sont donc toutes deux convergentes, d'après le théorème de limite monotone.

8. a) On peut énoncer ainsi le théorème de la limite centrée : soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, admettant une espérance m et une variance non nulle σ^2.

En posant $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$, alors : la suite $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite, ce qui se traduit notamment par :

$$\forall a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\},\ \forall b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \text{ avec } a < b :\ \lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant S_n^* \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

Ici : les X_i suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1, donc $m = 1$ et $\sigma = 1$. Ainsi :

$$P(S_n \leqslant n) = P(S_n - n \leqslant 0) = P\left(\frac{S_n - n.1}{\sqrt{n}.1} \leqslant 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

b) Les résultats des questions 4. et 5. permettent d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n \leqslant n) = 1 - J_n(n) = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!e^n}I_n \iff \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}I_n = 1 - P(S_n \leqslant n).$$

D'après ce qui précède, on a donc : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}I_n = \dfrac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^{n+1}I_n e^{-n}}{n!} = 1$, soit :

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^{n+1}e^{-n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, ce qui est bien sûr la formule de Stirling.

c) Vu que S_n suit la loi de Poisson de paramètre n :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n = n) = e^{-n}.\dfrac{n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-n}n^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ d'après l'équivalent de Stirling.

D'où : $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = n) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$ (deux suites équivalentes ont en particulier la même limite).

d) Pour finir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n \geqslant n) = P(S_n = n) + P(S_n > n) = P(S_n = n) + 1 - P(S_n \leqslant n)$.

Des questions 8.a) et 8.c), on déduit donc : $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geqslant n) = 0 + 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $P(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
On admet qu'un tel réel m existe toujours.

9. Principe de l'algorithme : On sait que la fonction de répartition de X vaut 0 en 0, 1 en N, et est croissante, en escalier sur $[1; N]$. Il existe donc un premier entier m tel que : $F_X(m) = P(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Au rang précédent, on avait donc $P(X \leqslant m-1) < \dfrac{1}{2} \iff P(X \geqslant m) > \dfrac{1}{2}$.
L'entier m est donc la médiane recherchée.

Version Turbo-Pascal du script demandé, la loi de la variable aléatoire X est supposée stockée dans une variable `loi` du type `proba` déclaré en en-tête.

```
type proba = array[1..N] of real;

function mediane (loi :proba) :real;
Var m :integer;
    S :real;
Begin
S:=0; m:=0;
while (S < 0.5) do
    begin
        m:=m+1;
        S:=S+loi[m]
    end;
mediane:=m
end;
```

Version `Scilab` où la variable `loi` est tout simplement un tableau unligne dont on n'a pas besoin de préciser la taille.

```
function y = mediane(loi)
    S = 0; m = 0;
    while (S < 0.5)
        m = m+1
        S = S+loi(m)
    end
y=m
endfunction
```

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

   a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$: $E(|X-r|)$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} |k-r|P(X=k)$ est absolument convergente, d'après le théorème de transfert. C'est une série à termes positifs, donc il suffit d'étudier la convergence simple ; comme $|k-r| = \begin{cases} k-r & \text{si } k \geqslant r \\ r-k & \text{si } k < r \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
\forall n > r,\ \sum_{k=0}^{n} |k-r|P(X=k) &= \sum_{k=0}^{r} |k-r|P(X=k) + \sum_{k=r+1}^{n} |k-r|P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{r} (r-k)P(X=k) + \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{r} (r-k)P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} (k-r)P(X=k) - \sum_{k=0}^{r} (k-r)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) - r.\sum_{k=0}^{n} P(X=k) + 2\sum_{k=0}^{r} (r-k)P(X=k)
\end{aligned}$$

   On reconnaît deux séries convergentes (celle définissant $E(X)$, et la somme des probabilités de la loi de X), donc $|X-r|$ admet une espérance qui vaut :

$$E(|X-r|) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) - r.\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)}_{=1} + 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k)P(X=k) = E(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k)P(X=k)$$

   (le terme pour $k=r$ est nul dans la dernière somme)

   b) La relation demandée demande un calcul avec une somme double :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} P(X \leqslant k) &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant r-1} P(X=i) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=i}^{r-1} P(X=i) \text{ interversion}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{i=0}^{r-1}(r-i)P(X=i) \text{ CQFD}$$

Pour conclure, il suffit alors d'écrire :

$$E(|X-r|) = E(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P(X=k) = E(X) - \sum_{k=0}^{r-1} 1 + 2\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

c) Soit m une médiane de X, on suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
Il y a deux cas à considérer, pour $r \in \mathbb{N}^*$ (et $r \neq m$) :

⋆ Si $r > m$:

$$\begin{aligned} E(|X-r|) - E(|X-m|) &= E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - E(X) - 2\sum_{k=0}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\sum_{k=m}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![m, r-1]\!]$: $F(k) \geqslant F(m) = P(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ par définition de m ; par conséquent, $E(|X-r|) - E(|X-m|)$ est positif comme somme de termes toutes positifs.

⋆ Si $r < m$:

$$\begin{aligned} E(|X-r|) - E(|X-m|) &= E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - E(X) - 2\sum_{k=0}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \\ &= -2\sum_{k=r}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

où cette fois : $\forall k \in [\![r; m-1]\!],\ F(k) \leqslant F(m-1) < \dfrac{1}{2}$ (toujours par définition de la médiane), donc $\displaystyle\sum_{k=r}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$ est négatif comme somme de réels négatifs ; le produit par -2 permet de conclure : $E(|X-r|) - E(|X-m|)$ est à nouveau positif.

Ainsi : $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ E(|X-r|) \geqslant E(|X-m|)$: la médiane m est l'entier en lequel la suite $(E(|X-r|))_{r\in\mathbb{N}^*}$ atteint sa valeur minimale.

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n : la décroissance des suites $(P(S_n \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(P(S_n \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et le fait qu'elles convergent vers $\dfrac{1}{2}$ (questions 7.et 8.) permettent notamment de conclure que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n \geqslant n) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(S_n \leqslant n) \geqslant \dfrac{1}{2}$ (leur limite est dans ce cas leur plus grand minorant).
Comme X suit la même loi de Poisson que S_n, (n est cette fois fixé), l'entier n est bien une médiane de X, les deux conditions étant vérifiées.

En reprenant la relation obtenue en 10.a) :

$$\begin{aligned} E(|X-n|) &= E(X) - n + 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P(X=k) \\ &= n - n + 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!} = 2e^{-n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{n^k}{(k-1)!}\right) + \frac{n}{0!}\right] \\ &= 2e^{-n}.\left[\frac{n^n}{(n-1)!} + n\right] = \frac{2e^{-n}.n^{n+1}}{n!} + 2ne^{-n} \text{ après télescopage} \end{aligned}$$

L'équivalent de Stirling donne : $\dfrac{2e^{-n}n^{n+1}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-n}n^{n+1}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2ne^{-n} = 0$ par croissances comparées, tandis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = +\infty$, on a bien :

$$E(|X-n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E(|X-x|)$.

a) Pour tout réel $x \geqslant 0$: $F(x) \leqslant 1$ puisque F est une fonction de répartition, ce qui donne bien l'inégalité : $x(1 - F(x)) \geqslant 0$.

Par ailleurs : $1-F(x) = P(X > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, où : $\forall x \geqslant 0,\ \forall t \in [x;+\infty[$: $x \leqslant t$ et donc $xf(t) \leqslant tf(t)$ car f est une densité, donc positive sur $\mathbb{R}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} xf(t)\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes, car f est une densité continue sur $\mathbb{R}$ et X admet une espérance (les deux sont en fait des *restes* d'intégrales convergentes).

Par croissance de l'intégrale, on a bien : $\forall x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} xf(t)\mathrm{d}t = x(1 - F(x)) \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$, d'où l'encadrement demandé.

Or, comme on l'a dit : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est le reste d'une intégrale convergente (celle qui définit $E(X)$), donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0$. Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

Si on considère maintenant la variable aléatoire $Y = -X$: comme la densité f de X est continue sur $\mathbb{R}$, il en sera de même de celle de Y, et en appliquant le résultat précédent à Y, on a : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y(1 - F_Y(y)) = 0$.

Comme : $\forall y \geqslant 0,\ F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(-X \leqslant y) = P(X \geqslant -y) = 1 - F(-y)$, le résultat devient :

$$\lim_{y\to+\infty} yF(-y) = 0 \iff \lim_{x\to-\infty} -xF(x) = 0 \iff \lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0$$

avec le changement de variable $x = -y$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$; puisque X admet une espérance, on peut d'emblée montrer, grâce au théorème de transfert, que $E(|X - x|)$ existe, puisque :

$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |t - x|f(t) \leqslant |t|f(t) + |x|f(t)$, où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente et vaut $E(X)$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(t)\mathrm{d}t = |x|$ puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Ainsi, par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives sur $\mathbb{R}$:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t - x|f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et vaut $E(|X - x|)$.

On peut alors considérer, pour deux réels $A < x$ et $B > x$:

$M_{A,B}(x) = \displaystyle\int_A^B |t - x|f(t)\mathrm{d}t = \int_A^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t + \int_x^B (t - x)f(t)\mathrm{d}t$ d'après la relation de Chasles.

Dans chacune de ces deux intégrales, on réalise une intégration par parties avec :

Dans la première : $\begin{array}{lll} u(t) = (x - t) & \to & u'(t) = -1 \\ v'(t) = f(t) & \to & v(t) = F(t) \end{array}$

et dans la deuxième : $\begin{array}{lll} u(t) = (t - x) & \to & u'(t) = 1 \\ v'(t) = f(t) & \to & v(t) = F(t) - 1 \end{array}$

$t \mapsto F(t) - 1$ est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$, et il n'est pas interdit de s'adapter au résultat final cherché ! Les fonction u et v concernées dans les deux cas sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} M_{A,B}(x) &= \int_A^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t + \int_x^B (t - x)f(t)\mathrm{d}t \\ &= [(x - t)F(t)]_A^x + \int_A^x F(t)\mathrm{d}t + [(t - x)F(t)]_x^B - \int_x^B (F(t) - 1)\mathrm{d}t \\ &= (x - A)F(A) + \int_A^x F(t)\mathrm{d}t + (B - x)(F(B) - 1) + \int_x^B (1 - F(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_A^x F(t)\mathrm{d}t + \int_x^B (1 - F(t))\mathrm{d}t + xF(A) - AF(A) - B(1 - F(B)) - x(F(B) - 1) \end{aligned}$$

Les questions précédentes et les propriétés de la fonction de répartition F donnent :
$\displaystyle\lim_{A\to-\infty} AF(A) = 0 = \lim_{A\to-\infty} xF(A) = \lim_{B\to+\infty} B(1-F(B)) = \lim_{B\to+\infty} x(F(B)-1)$ (vu que $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} F(B) = 1$)

Le passage à la limite quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$, licite car on travaille ici avec des intégrales convergentes, donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} (1 - F(t))\mathrm{d}t.$$

c) Soient a et b deux réels quelconques. Les intégrales qui suivent étant toutes convergentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} M(b) - M(a) &= \int_{-\infty}^{b} F(t)\mathrm{d}t + \int_{b}^{+\infty} (1 - F(t))\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} F(t)\mathrm{d}t - \int_{a}^{+\infty} (1 - F(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_{a}^{b} F(t)\mathrm{d}t + \int_{b}^{a} (1 - F(t))\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \left[F(t) - (1 - F(t))\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{a}^{b} (2F(t) - 1)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

d) Soit alors m une médiane de X : pour tout réel $x \geqslant m$:
$M(x) - M(m) = \displaystyle\int_{m}^{x} (2F(t) - 1)\, \mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue, avec $m \leqslant x$ (bornes dans l'ordre croissant) et :
$\forall t \in [m; x],\ F(t) \geqslant F(m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ par définition d'une médiane, donc :
$\forall t \in [m; x],\ 2F(t) - 1 \geqslant 0$, et : $\forall x \geqslant m,\ M(x) - M(m) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (fonction continue, positive sur $[m; x]$.

Soit maintenant $x \leqslant m$:
$M(x) - M(m) = \displaystyle\int_{m}^{x} (2F(t) - 1)\, \mathrm{d}t = \int_{x}^{m} (1 - 2F(t))\, \mathrm{d}t$ est encore l'intégrale d'une fonction continue, où on a remis les bornes dans l'ordre croissant, avec :
$\forall t \in [x; m],\ F(t) \leqslant F(m) \iff 1 - F(t) \geqslant 1 - F(m) = P(X > m) = P(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ car X est à densité, de médiane m.
Ainsi : $\forall t \in [x; m],\ 1 - F(t) \geqslant \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} \geqslant F(t) \iff 1 - 2F(t) \geqslant 0$.
La positivité de l'intégrale assure encore que : $\forall x \leqslant m,\ M(x) - M(m) \geqslant 0$.

De façon analogue au cas discret, on conclut que : $\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) - M(m) \geqslant 0 \iff M(x) \geqslant M(m)$.
Ce résultat exprime bien que m est un point en lequel la fonction $M : \ x \mapsto E(|X - x|)$ atteint son minimum.

★★★ FIN DU SUJET ★★★