MATHÉMATIQUES - HEC - ESSEC E 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

# Exercice

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

a) *(i)* $M = CL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Pour $M^2$ il n'est pas interdit d'être malin :

$M^2 = CLCL$ où au milieu : $\quad LC = 0 + 2 - 2 = 0$, donc $M^2 = C \times 0.L = 0.CL = 0_3$.

*(ii)* Toutes les colonnes de la matrice $M$ sont proportionnelles et non nulles, donc $\text{rg}(M) = 1$.

*(iii)* La matrice $M$ vérifie $M^2 = 0_3$ (matrice nilpotente), donc $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de $M$, dont la seule racine 0 est aussi la seule valeur propre possible de $M$.

Si donc $M$ était diagonalisable, elle serait semblable via une matrice de passage $P$, à une matrice diagonale contenant les valeurs propres de $M$ sur sa diagonale ; bref, $M$ serait semblable à a matrice nulle, et devrait donc vérifier : $\quad M = P0_3P^{-1} = 0_3$, ce qui est faux !

Donc $M$ n'est pas diagonalisable.

b) *(i)* Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut prouver que $P$ est inversible en calculant son rang par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice échelonnée avec 3 pivots non nuls, donc $\text{rg}(P) = 3$ est maximal, ce qui est un critère d'inversibilité.

Le produit matriciel demandé ensuite est : $\quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*(ii)* La matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie sans peine $R \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On l'a construite de sorte à ne surtout pas faire apparaître de relations de dépendance linéaire entre ses colonnes, ce que confirme à nouveau le calcul de son rang :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Là encore, on obtient une matrice échelonnée à 3 pivots non nuls, donc $\mathrm{rg}(R) = 3$ et $R$ est inversible.

La matrice $Q$ cherchée est alors tout simplement $Q = {}^t R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

*(iii)* Le calcul matriciel $PMQ$ peut alors s'écrire sous la forme suivante, qui utilise l'associativité du produit matriciel, et surtout aussi les relations précédentes :

$$PMQ = (PC)(LQ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, la relation obtenue en 1.b.*(ii)* donne, en lui appliquant la transposée :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=L} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La fonction `Scilab` suivante permet de multiplier la $i$-ème ligne $L_i$ d'une matrice $A$ par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B = multlig(a,i,A)
    [n,p] = size(A);
    B = A;
    for j = 1:p
        B(i,j) = a*B(i,j)
    end;
endfunction
```

a) Sur le même modèle, on écrit les fonctions `addlig` et `echlig` permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + bL_j \quad (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j)$$

```
function B = addlig(b,i,j,A)
    [n,p] = size(A);
    B = A;
    for k = 1:p
        B(i,k) = B(i,k) + b*B(j,k)
    end;
endfunction

function B = echlig(i,j,A)
    [n,p] = size(A);
    B = A;
    for k = 1:p
        B(i,k) = A(j,k)
        B(j,k) = A(i,k)
    end;
endfunction
```

b) La fonction `multligmat` est définie par :

```
function B = multligmat(a,i,A)
    [n,p] = size(A);
    D = eye(n,n);
    D(i,i) = a;
    B = D*A;
endfunction
```

Elle réalise concrètement le produit matriciel de $A$ à gauche par la matrice $D$ diagonale, dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 *sauf* celui de la ligne $i$ qui vaut $a$.

Un exemple avec $n = 3$, $i = 2$ et une matrice $A$ de format $3 \times 3$ va bien faire apparaître le principe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ ar & as & at \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

ce qui revient bien à multiplier uniquement les éléments de la $i$-ième ligne par $a$.

Si on veut prouver très rigoureusement le cas général, il faut revenir à la formule du produit matriciel : $D$ est une matrice carrée d'ordre $n$, $A$ est une matrice de format $n \times p$ dont le produit $DA$ est bien défini, de format $n \times p$, et pour tout couple $(\ell, j)$ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ :

$$(DA)_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{\ell,k} \times A_{k,j} = D_{\ell,\ell} \times A_{\ell,j} = \begin{cases} A_{\ell,j} & \text{si } \ell \neq i \\ a.A_{i,j} & \text{si } \ell = i \end{cases}$$

puisque $D_{\ell,k}$ est nul sauf si $\ell = k$, tous les termes de la somme pour $\ell \neq k$ sont en effet nuls.
Cela prouve bien que les coefficients du produit $DA$ sont les mêmes que ceux de $A$, sauf à la $i$-ème ligne où tous les coefficients sont multipliés par $a$

3. Dans cette question, on note $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

   Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de sa $i$-ème ligne et de sa $j$-ème colonne, qui vaut 1.

   a) *(i)* Le fait que $M$ soit de rang 1 signifie que toutes ses colonnes sont proportionnelles, et que l'une d'entre elles au moins est non nulle ; elles sont donc toutes multiples d'une même matrice colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non-nulle : si on note $C_i$ la $i$-ème colonne de $M$, il existe pour chaque $i$ de $[\![1, n]\!]$, un réel $\ell_i$ tel que $C_i = \ell_i.C$, et l'un des réels $\ell_i$ au moins est non-nul.

   Mais alors, en notant $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$, $L$ est une matrice-ligne non nulle et les propriétés du produit matriciel assurent que $M$ est bien égale au produit $CL$.

   *(ii)* On utilise à nouveau l'associativité du produit matriciel pour constater qu'on peut écrire :

   $MC = (CL)C = C(LC)$ où $LC$ est un seul nombre réel, égal à $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell_i.c_i$. Ainsi :

   $MC = \alpha.C$, ce qui prouve, puisque $C$ est non nul, que $\alpha$ est valeur propre de $M$, $C$ étant un vecteur propre associé.

   *(iii)* Faisons le bilan de ce qu'on sait sur $M$ :

   - Le fait que $M$ soit de rang 1 assure qu'elle est non-inversible, donc que 0 est valeur propre de $M$ et que, d'après le théorème du rang, le sous-espace propre associé est de dimension $\dim E_0(M) = n - 1$.
   - Si donc $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell_i.c_i$ est non nul : $M$ possède alors une deuxième valeur propre, et $\dim E_\alpha(M) \geqslant 1$.

     Mais alors, d'après le théorème spectral :

     $$\dim E_0(M) + \dim E_\alpha(M) \leqslant n \iff n - 1 + \dim E_\alpha(M) \leqslant n \iff \dim E_\alpha(M) \leqslant 1$$

   - On peut donc en conclure que : $\dim E_\alpha(M) = 1$, que $M$ n'a pas d'autre valeur propre et que $M$ est diagonalisable, puisque $\dim E_0(M) + \dim E_\alpha(M) = n$.

b) *(i)* On généralise ici ce qui a été fait sur un exemple en 1.b) : comme $C$ est un vecteur colonne non nul, on peut le compléter en un base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Et dans ce cas, si $P$ est la matrice passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (qui est en fait l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$), alors d'après la formule de changement de base : $PC = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ est le premier élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On peut alors faire le même raisonnement avec la matrice colonne ${}^{\mathrm{t}}L = \begin{pmatrix}\ell_1\\\vdots\\\ell_n\end{pmatrix}$, elle aussi non nulle : il existe une matrice inversible $R$ telle que : $R\,{}^{\mathrm{t}}L = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

En appliquant la transposée à cette relation, et d'après les propriétés de celle-ci, on obtient alors la relation :

$$^{\mathrm{t}}(R\,{}^{\mathrm{t}}L) = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \iff L\,{}^{\mathrm{t}}R = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Il suffit alors de poser $Q = {}^{\mathrm{t}}R$, qui est encore inversible, pour obtenir :

$$PMQ = (PC)(LQ) = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = E_{1,1}$$

*(ii)* L'idée de la question précédente (une fois qu'on l'a eue !) se généralise sans trop de difficulté : si on note $F_i$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf le $i$-ème qui vaut 1, alors : il existe une matrice inversible $P_i$ telle que $P_iC = F_i$ (on prend l'inverse de la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base dans laquelle $C$ est en $i$-ème position), et une matrice inversible $R_j$ telle que $R_j\,{}^{\mathrm{t}}L = F_j \iff L\,{}^{\mathrm{t}}R_j = {}^{\mathrm{t}}F_j$.

En posant $Q_j = {}^{\mathrm{t}}R_j$, on a alors :

$$P_iMQ_j = (P_iC)(LQ_j) = F_i \times {}^{\mathrm{t}}F_j = E_{i,j}$$

# Problème

*Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments let les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.*
*Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'applatissement qui viennent compléter la description ususelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion); ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.*

**Dans tout le problème :**

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ;
- pour toute variable aléatoire $X$ et pour tout réel $t$ pour lequel la variable aléatoire $e^{tX}$ admet une espérance, on pose :
$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big);$$
(les fonctions $M_X$ et $K_X$ sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de $X$.)
- lorsque, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $K_X$ est de classe $C^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre $p$ de $X$*, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée $p$-ième de $K_X$ en 0 :
$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

## Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes.

*Dans toute cette partie :*

- on note $n$ un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note $S$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :
$$P\big([S=-1]\big) = P\big([S=1]\big) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.
   a) La variable aléatoire $X$ est donc finie, et $M_X(t) = E(e^{tX})$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, donnée par le théorème de transfert :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{tk}.P(X=k)$$
La fonction $M_X$ apparaît alors comme une combinaison linéaire de fonctions $f_k : \ t \mapsto e^{tk}$, toutes de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ : $M_X$ est elle-même de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k$ de $[\![-n, n]\!]$, et pour tout $t$ de $\mathbb{R}$ : $\quad f_k'(t) = k.e^{kt}$, et par une récurrence immédiate :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_k^{(p)}(t) = k^p.e^{tk}.$$
Par linéarité de la dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées), on a donc :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^p.e^{tk}.P(X=k)$$
Donc : $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^{n} k^p.e^0.P(X=k) = \sum_{k=-n}^{n} k^p.P(X=k) = E(X^p),$
à nouveau grâce au théorème de transfert.

b) Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n,n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments $M_Y$ est la même que celle de $X$.

On note $G_X$ et $G_Y$ les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P\big([X = k-n]\big)x^k \\ G_Y(x) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P\big([Y = k-n]\big)x^k \end{cases}$$

*(i)* Pour tout réel $t$ :

$$G_X(e^t) = \sum_{k=0}^{2n} P\big([X = k-n]\big)e^{tk} \overset{[j=k-n]}{=} \sum_{j=-n}^{n} P\big([X = j]\big).e^{t(j+n)} = e^{tn}.\sum_{j=-n}^{n} P\big([X = j]\big)e^{tj} = e^{tn}.M_X(t)$$

*(ii)* On sait par hypothèse que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = M_X(t) \quad \text{donc} \quad e^{nt}.M_Y(t) = e^{nt}.M_X(t) \iff G_Y(e^t) = G_X(e^t).$$

*(iii)* Les fonctions $G_X$ et $G_Y$ sont des polynômes, et on vient de voir que : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(e^t) - G_Y(e^t) = 0$, ce qui signifie que le polynôme $G_X - G_Y$ admet pour racines tous les nombres $e^t$, pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

Comme la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$, cela signifie que tout réel strictement positif est racine de $G_X - G_Y$ ; ce polynôme est donc forcément nul puisqu'il possède une infinité de racines !

Les deux polynômes $G_X$ et $G_Y$ sont donc égaux : ils ont en particulier même degré et mêmes coefficients, de sorte que :

$$\forall k \in [\![0,2n]\!], \quad P\big([X = k-n]\big) = P\big([Y = k-n]\big) \iff \forall j \in [\![-n,n]\!], \quad P\big([X = j]\big) = P\big([Y = j]\big)$$

et toute probabilité du type $P\big([X = j]\big)$ ou $P\big([Y = j]\big)$ avec $j \notin [\![-n,n]\!]$, est nulle.

On en conclut donc que $X$ et $Y$ suivent la même loi.

2. Dans cette question, on note $X_2$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(2, \dfrac{1}{2}\Big)$.

On suppose que les variables aléatoires $S$ et $X_2$ sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.

a) (i) Les univers-images de $X_2$ et $S$ sont respectivement $\{0,1,2\}$ et $\{-1,1\}$, donc le produit $Y_2 = SX_2$ a pour valeurs possibles :

$$Y_2(\Omega) = \{-2,-1,0,1,2\}$$

(ii) Calcul des probabilités de la loi de $Y_2$ :

- $\star$ $[Y_2 = -2] = [S = -1] \cap [X_2 = 2]$ donc par indépendance de $S$ et $X_2$ :

$$P\big([Y_2 = -2]\big) = P\big([S =_1]\big) \times P\big([X_2 = 2]\big) = \frac{1}{2} \times \binom{2}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{8}$$

- $\star$ $P\big([Y_2 = -1]\big) = P\big([S = -1] \cap [X_2 = 1]\big) = \dfrac{1}{2} \times \dbinom{2}{1}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 = \dfrac{1}{4}$
- $\star$ $P\big([Y_2 = 0]\big) = P\big([X_2 = 0]\big) = \dbinom{2}{0}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 = \dfrac{1}{4}$ (pas de contrainte sur $S$).

$\star$ $P\big([Y_2 = 1]\big) = P\big([S = 1] \cap [X_2 = 1]\big) = \dfrac{1}{4}$

$\star$ $P\big([Y_2 = 2]\big) = P\big([S = 1] \cap [X_2 = 2]\big) = \dfrac{1}{8}$.

b) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $(S+1)(\Omega) = \{0, 2\}$ donc $\big(X_2 - (S+1)\big)(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et :

$\star$ $P\big([X_2 - (S+1) = -2]\big) = P\big([X_2 = 0] \cap [S = -1]\big) = P\big([X_2 = 0]\big) \times P\big([S = -1]\big) = \dfrac{1}{8}$.

$\star$ $P\big([X_2 - (S+1) = -1]\big) = P\big(([X_2 = 1] \cap [S = -1]\big) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\star$ $P\big([X_2-(S+1) = 0]\big) = P\big(([X_2 = 0] \cap [S = -1]) \cup ([X_2 = 2] \cap [S = 1])\big) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

$\star$ $P\big([X_2 - (S+1) = 1]\big) = P\big([X_2 = 1] \cap [S = -1]\big) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\star$ $P\big([X_2 - (S+1) = 2]\big) = P\big([X_2 = 2] \cap [S = -1]\big) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Les variables aléatoires $Y_2$ et $X_2 - (S+1)$ suivent bien la même loi.

3. Question `Scilab` :

```
(1)    n = 10;
(2)    X = grand(n,2,'bin',2,0.5);
(3)    B = grand(n,2,'bin',1,0.5);
(4)    S = 2*B - ones(n,2);
(5)    Z1 = [S(1:n,1).*X(1:n,1), X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)];
(6)    Z2 = [S(1:n,1).*X(1:n,1), X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)];
```

a) Après exécution des quatre premières instructions :

- `X` contient $2n$ simulations indépendantes de la loi binomiale $\mathcal{B}\big(2, \frac{1}{2}\big)$ organisées sur $n$ lignes et 2 colonnes.
- `S` contient $2n$ simulations indépendantes de la loi de $S$ définie en préambule de cette parties, organisées de la même façon.

Donc en effet, le vecteur $B$ contient $2n$ simulations indépendantes de la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et il est clair que si $B \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors $2B - 1$ suit la même loi que $S$.

b) Les instructions des lignes 5 et 6 du script `Scilab` juxtaposent deux colonnes à $n$ lignes calculées via des opérations termes à termes :

- La première colonne de `Z1` contient les produits terme à terme des simulations de la première colonne de `X` et de la première colonne de `S` : on obtient ainsi une colonne de $n$ simulations de $SX_2 = Y_2$.
- La deuxième colonne de `Z2` contient des valeurs du type :
  `X(i,1) - S(i,1) - 1 = X(i,1) - (S(i,1)+1)`, c'est-à-dire $n$ simulations en colonne de $X_2 - (S+1)$, dont on vient de voir qu'elle suit la même loi que $Y_2$.

  Ces deux colonnes sont concaténées pour faire de `Z_1` une matrice de $2n$ simulations de la loi de la v.a.r. $Y_2$.
- La matrice `Z2` est construite sur le même modèle : sa première colonne est d'ailleurs identique à celle de `Z1`, la deuxième étant construite en utilisant cette fois la deuxième colonne de simulations de chacun des deux vecteurs `X` et `S`.

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grand que 10 (par exemple, 10000) et en lui adjoignant les deux instructions `(7)` et `(8)` suivantes :

```
(7)    p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2)))/n;
(8)    p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2)))/n;
```

Avec le sens des commandes `length` et `find` rappelé par l'énoncé, on comprend donc que `p1` correspond à la fréquence du nombre de coïncidences ligne par ligne, entre les deux colonnes de

`Z1` : on cherche le nombre de fois où `Z1(i,1)` est égal à `Z1(i,2)` et on divise par le nombre total de simulations.

On obtient donc la fréquence de réalisation de l'événement : $[SX_2 = X_2 - (S+1)]$, qui sert à comparer concrètement ces deux façons possibles de simuler la même loi, celle de $Y_2$.

La loi faible des grands nombres assure alors que `p1` est, pour `n` très grand, une valeur approchée de la probabilité $P\big([SX_2 = X_2 - (S+1)]\big)$.

Le nombre `p2` est construit sur le même principe, à ceci près cependant que les deux échantillons utilisés pour simuler $SX_2$ et $X_2 - (S+1)$ ne sont pas les mêmes, et sont indépendants l'un de l'autre.

Le nombre `p2` serait donc plutôt une valeur approchée de $P\big([SX_2 = \widetilde{X_2} - (\widetilde{S}+1)]\big)$, où $\widetilde{X_2}$ et $\widetilde{S}$ sont des variables aléatoires respectivement de même loi que $X_2$ et $S$, indépendantes entre elles et de $X_2$ et $S$.

L'exécution du script (impossible à faire pendant l'épreuve !) donne d'ailleurs deux valeurs différentes pour `p1` et `p2` :

```
-->disp(p1)

    0.12432
-->disp(p2)

    0.2186
```

Cela paraît assez raisonnable a posteriori (mais m'a quand même posé question la première fois que j'ai exécuté le script !) : comme on l'a vu à la question 2.a) *(ii)*, si $SX_2$ et $X_2 - (S+1)$ sont de même loi, ce ne sont pas les mêmes valeurs de $S$ et $X_2$ par exemple, qui donnent $[SX_2 = 1]$ et $[X_2 - (S+1) = 1]$. Ce problème de couplage de valeurs disparaît dans le deuxième cas puisque les deux jeux de valeurs comparés sont totalement indépendants.

4. Dans cette question, on note $X_n$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$.

   On suppose que les variables aléatoires $X_n$ et $S$ sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.

   a) La variable aléatoire $X_n$ est donc finie, d'univers-image $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $x \mapsto e^{tx}$ est définie pour tout réel $x$, donc d'après le théorème de transfert, $M_{X_n}(t) = E\big(e^{tX_n}\big)$ est bien définie pour tout réel $t$ par :

$$M_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}.P\big([X_n = k]\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk}.\Big(\frac{1}{2}\Big)^k.\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(e^t\big)^k = \frac{(e^t+1)^n}{2^n}$$

   d'après la formule du binôme de Newton.

   b) La loi de $Y_n = SX_n$ est, de son côté, définie par : $(SX_n)(\Omega) = [\![-n, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ :

$$P\big([Y_n = -k]\big) = P\big([S=-1] \cap [X_n = k]\big) = P\big([S=-1]\big) \times P\big([X_n = k]\big) = \binom{n}{k}.\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1},$$

   et de même : $P\big([Y_n = k]\big) = P\big([S=1] \cap [X_n = k]\big) = \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n+1}$.

   Enfin, $P\big([Y_n = 0]\big) = P\big([X_n = 0]\big) = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$. Ainsi, pour tout réel $t$ :

$$M_{Y_n}(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{tk}.P\big([Y_n = k]\big) = \sum_{k=1}^{n} e^{-tk} P\big([X_n = k]\big) + e^0 P\big([X_n = 0]\big) + \sum_{k=1}^{n} e^{tk} P\big([X_n = k]\big)$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\big(e^{-t}\big)^k + \Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\big(e^t\big)^k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\big((1+e^{-t})^n - 1\big) + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\big((1+e^{t})^n - 1\big)$$

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}.\big((1+e^{-t})^n \cancel{-1} + \cancel{2} + (1+e^t)^n \cancel{-1}\big) \qquad CQFD$$

c) Pour tout réel $t$, on a en effet : $(1+e^{-t})^n = \big(e^{-t}(e^t+1)\big)^n = e^{-nt}(1+e^t)^n$, donc le résultat précédent s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}.(1+e^{-nt}).(1+e^t)^n = \frac{1+e^{-nt}}{2} \times \frac{(1+e^{-t})^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-nt}}{2}\right) \times M_{X_n}(t)$$

Or $\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-nt}}{2}$ peut s'écrire sous la forme : $e^{0.t}.\dfrac{1}{2} + (e^{-nt}.\dfrac{1}{2} = E(e^{-tH_n})$ si $H_n$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, n\}$, de loi : $P\big([H_n = 0]\big) = P\big([H_n = n]\big) = \dfrac{1}{2}$.

On peut d'ailleurs considérer $H_n$ indépendante de $X_n$, de sorte que le calcul précédent s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_{Y_n}(t) = E\big(e^{-tH_n}\big) \times E\big(e^{tX_n}\big) = E\big(e^{tX_n} \times e^{-tH_n}\big) = E\big(e^{t(X_n - H_n)}\big) = M_{X_n - H_n}(t)$$

Or les variables aléatoires $Y_n$ et $X_n - H_n$ sont toutes deux à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ : le résultat de la question 1.c) et l'égalité des fonctions génératrices des moments $M_{Y_n}$ et $M_{X_n - H_n}$ assurent que $Y_n$ et $X_n - H_n$ suivent la même loi.

## Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples.

5. Soit $X$ une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction $K_X$.

a) $K_X(0) = \ln\Big(M_X(0)\Big) = \ln\big(E(e^0)\big) = \ln\big(E(1)\big) = \ln(1) = 0$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX + b$. Pour tout réel $t$ pour lequel $at$ appartient à $\mathcal{D}_X$ :

$$K_Y(t) = \ln\big(M_Y(t)\big) = \ln\big(E(e^{t(aX+b)})\big) = \ln\big(E(e^{atX+bt})\big)$$

$$= \ln\big(E(e^{atX} \times e^{bt})\big) = \ln\big(e^{bt}.E(e^{atX})\big)$$

$$K_Y(t) = bt + \ln\big(M_X(at)\big) = bt + K_X(at) \qquad CQFD$$

c) On suppose ici que les variables aléatoires $X$ et $-X$ suivent la même loi.

Par conséquent : $\forall t \in \mathbb{R},\ K_{-X}(t) = K_X(t)$. Mais par ailleurs, $-X = aX + b$ avec $a = -1$ et $b = 0$, et la relation précédente permet d'écrire : $\forall t \in \mathbb{R},\ K_{-X}(t) = 0 + K_X(-t) = K_X(-t)$.

On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ K_X(t) = K_X(-t)$$

Par dérivations successives de cette égalité, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (-1)^p.K_X^{(p)}(-t) = K_X^{(p)}(t) \quad \text{donc} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^p.K_X^{(p)}(0) = K_X^{(p)}(0) \iff (-1)^p.Q_p(X) = Q_p(X)$$

En particulier, pour tout entier $p$ impair, $(-1)^p = -1$ et on obtient :

$$-Q_p(X) = Q_p(X) \iff 2Q_p(X) = 0 \iff Q_p(X) = 0$$

C'est-à-dire que les cumulants de $X$ d'ordres impairs sont tous nuls.

6. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions $K_X$ et $K_Y$.

a) Pour tout réel $t$ appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ :

$$K_{X+Y}(t) = \ln\left(M_{X+Y}(t)\right) = \ln\left(E(e^{t(X+Y)})\right) = \ln\left(E(e^{tX+tY})\right) = \ln\left(E(e^{tX} \times e^{tY})\right)$$

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions, $e^{tX}$ et $e^{tY}$ le sont aussi, et par conséquent :

$$K_{X+Y}(t) = \ln\left(E(e^{tX}) \times E(e^{tY})\right) = \ln\left(E(e^{tX})\right) + \ln\left(E(e^{tY})\right) = K_X(t) + K_Y(t)$$

b) Par linéarité de la dérivation : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, et pour tout réel $t$ appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ :

$$K_{X+Y}^{(p)}(t) = K_X^{(p)}(t) + K_Y^{(p)}(t)$$

C'est en particulier vrai en $t = 0$, ce qui donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad Q_p(X+Y) = Q_p(X) + Q_p(Y)$$

7. Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

a) Soit $t$ un réel quelconque : comme cette fois $U$ est une variable à densité, $M_U(t) = E(e^{tU})$ est d'après le théorème de transfert, bien définie si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}.f_U(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Ici, la fonction $f_U$ est définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Comme la fonction $x \mapsto e^{tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $t$, on en déduit que la fonction intégrée est continue sur $[0;1]$, nulle en-dehors de cet intervalle : la fonction $M_U$ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$, par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_U(t) = \int_0^1 e^{tx}\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{t}.e^{tx}\right]_0^1 = \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

b) La fonction $M_U$ est bien de classe $C^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe $C^1$ sur ces intervalles où le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$\forall t \in ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[, \quad M_U'(t) = \frac{e^t \times t - (e^t - 1) \times 1}{t^2} = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

c) Pour $t \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{\frac{e^t - 1}{t} - 1}{t} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

On utilise ici le développement limité de exp à l'ordre 2 en 0 : $\quad e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, qui permet d'écrire :

$$e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + o(t^2) \iff \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

c'est-à-dire : $\quad \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2} = \lim_{t \to 0} \frac{M_u(t) - 1}{t}.$

d) Le résultat précédent s'écrit aussi : $\lim_{t\to 0} \frac{M_U(t) - M_U(0)}{t-0} = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que $M_U$ est dérivable en 0, et que $M_U'(0) = \frac{1}{2}$.

Il reste donc à vérifier que la dérivée $M_U'$ est continue en 0, c'est-à-dire que : $\lim_{t\to 0} M_U'(t) = M_U'(0)$.

On réutilise à nouveau de $DL_2(0)$ de exp pour écrire, pour $t \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$M_U'(t) = \frac{t(1+t+t^2/2+o(t^2)) - (1+t+t^2/2+o(t^2))+1}{t^2} = \frac{t+t^2-1-t-t^2/2+1+o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2}+o(1)$$

On en déduit : $\lim_{t\to 0} M_U'(t) = \frac{1}{2} = M_U'(0)$, ce qui prouve que $M_U$ est de classe $C^1$ en 0, et finalement sur $\mathbb{R}$.

8. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Dans cette question, on note $X$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

a) On sait d'après le cours sur la loi uniforme, que $X$ et $Y = \alpha + (\beta - \alpha)U$ suivent alors la même loi, donc $K_X$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X(t) = \alpha t + K_U\big((\beta-\alpha)t\big) = \alpha t + \ln\big(M_U((\beta-\alpha)t)\big)$$

b) La fonction $K_X$ apparaît alors, d'après ce qui précède, comme la somme et la composée de fonctions de classe $C^1$ sur leurs domaines ; plus précisément, $t \mapsto \alpha t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine ;

$t \mapsto (\beta - \alpha)t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $M_U$ aussi, donc $t \mapsto M_U\big((\beta-\alpha)t\big)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$ sur lequel ln est de classe $C^1$.

Finalement, $K_X$ est bien de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X'(t) = \alpha + \frac{(\beta-\alpha).M_U'((\beta-\alpha)t)}{M_U((\beta-\alpha)t)}$$

En particulier, en $t = 0$ : $K_X'(0) = Q_1(X) = \alpha + \frac{(\beta-\alpha).M_U'(0)}{M_U(0)} = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ puisque $M_U'(0) = \frac{1}{2}$ et $M_U(0) = 1$.

On retombe bien sur la valeur de l'espérance $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ de la loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$.

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit $T$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

a) Soit $t$ un réel : d'après le théorème de transfert et sous réserve de convergence absolue de la série :

$$M_T(t) = E\big(e^{tT}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(T=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda.e^t)^k}{k!}$$

La série est à termes positifs, et on reconnaît une série exponentielle toujours convergente ; la fonction $M_T$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_T(t) = e^{-\lambda}.e^{\lambda.e^t} = e^{\lambda(e^t-1)} \quad \text{et} \quad K_T(t) = \ln\big(M_T(t)\big) = \lambda(e^t - 1)$$

b) Il est alors immédiat que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_T^{(p)}(t) = \lambda.e^t \quad \text{donc} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad K_T^{(p)}(0) = \lambda = Q_p(X).$$

Les cumulants de la loi de Poissons sont tous égaux au paramètre $\lambda$.

10. Soit $Z$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ : $\quad \dfrac{\exp\left(tx - t^2/2\right)}{e^{-x}} = \exp\left((t+1)x - \dfrac{x^2}{2}\right)$, où :

$(t+1)x - \dfrac{x^2}{2} \underset{x \to +\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (t+1)x - \dfrac{x^2}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$.

Par composition avec $\lim\limits_{X \to -\infty} \exp(X) = 0$, on en déduit :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp\left(tx - t^2/2\right)}{e^{-x}} = 0$, ce qui signifie que $\exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right) = o_{+\infty}(e^{-x})$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 (intégrale de référence, associée à la loi exponentielle de paramètre 1), donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ converge.

On procède de même en $-\infty$, mais en faisant intervenir cette fois $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\mathrm{d}x$ qui converge (le changement de variable $u = -x$ montre que cette intégrale est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1$).

$\dfrac{\exp\left(tx - x^2/2\right)}{e^{x}} = \exp\left((t-1)x - \dfrac{x^2}{2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par le même procédé que précédemment, donc :

$\exp\left(tx - \dfrac{x^2}{2}\right) = o_{-\infty}(e^{x})$. Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ est convergente, comme somme d'intégrales impropres convergentes.

b) Le résultat précédent assure que $M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de transfert.

On écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \times 1
\end{aligned}$$

Puisque la dernière intégrale est celle de la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(t, 1)$, intégrale qui vaut 1 !

On a donc bien démontré que : $\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Z(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

c) On en déduit : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ K_Z(t) = \ln\big(M_Z(t)\big) = \dfrac{t^2}{2}$.

On sait alors que toute variable aléatoire $V$ suivant la loi normale de paramètres $(\mu, \sigma^2)$ a même loi que $\sigma.Z+\mu$ : or d'après la question 5.a), pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$K_V(t) = K_{\sigma.X+\mu}(t) = \mu t + K_Z(\sigma t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad K_V'(t) = \mu + \sigma^2 t, \quad K_V''(t) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall p \geqslant 3,\ K_V^{(p)}(t) = 0$$

De sorte que :

$$Q_1(V) = K_V'(0) = \mu, \quad Q_2(V) = K_V''(0) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall p \geqslant 3,\ Q_p(X) = K_V^{(p)}(0) = 0$$

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

   a) La variable aléatoire $T_n$ suit la même loi que $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_i$ est la somme de $n$ v.a.r. de Poisson mutuellement indépendantes, toutes de paramètre 1.
   Comme on a alors : $\quad E(S_n) = E(T_n) = n$ et $\sigma(S_n) = \sigma(T_n) = \sqrt{V(T_n)} = \sqrt{n}$,
   alors $W_n$ a même loi que $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$.
   On est donc dans le cas d'application du théorème de la limite centrée, qui assure que la suite $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, réduite.

   Il en est donc de même pour la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge en loi vers une v.a.r. $W$ qui suit la même loi (normale centrée, réduite) que $Z$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in \mathbb{R}$ :

$$K_{W_n}(t) = K_{\frac{1}{\sqrt{n}}T_n - \sqrt{n}}(t) \overset{5.b)}{=} -\sqrt{n}t + K_{T_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}t}\right) \overset{9.a)}{=} -\sqrt{n}t + n\left(e^{t/\sqrt{n}} - 1\right)$$

   puisque $T_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n$.

   c) Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{n}} = 0$, donc on peut utiliser le $DL_2(0)$ de exp pour écrire :

$$K_{W_n}(t) = -\sqrt{n}.t + n.\left(\cancel{1} + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right) = -\sqrt{n}.t + \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + o(1) = \frac{t^2}{2} + o(1)$$

   Donc : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t) \qquad$ d'après 10.b)

## Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire $X$ telle que $M_X$ est de classe $C^4$ sur un intervalle ouvert $I$ contenant l'origine.

*On admet* alors que $X$ possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction $M_X$ en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on a $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

De plus, on pose : $\quad \mu_4(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^4\Big)$.

12. Par définition : $\quad Q_1(X) = K'_X(0)$, où pour tout $t \in I,\ K_X(t) = \ln\big(M_X(t)\big)$, donc $K'_X(t) = \dfrac{M'_X(t)}{M_X(t)}$, et en $t = 0$ :

$$K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{E(X)}{1} \quad \text{soit :} \quad Q_1(X) = E(X)$$

d'après l'hypothèse faite, et puisque $M_X(0) = E(e^0) = 1$.

Si on dérive une fois de plus : pour tout $t \in I$, $\quad K''_X(t) = \dfrac{M''_X(t) \times M_X(t) - \big(M'_X(t)\big)^2}{\big(M_X(t)\big)^2}$, donc :

$$Q_2(X) = K''_X(0) = \frac{M''_X(0).1 - \big(M'_X(0)\big)^2}{1} = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

d'après la formule de Koenig-Huygens.

13. Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$. On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) D'après la formule du binôme de Newton :

$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$

Les variables $X_1$ et $X_2$ admettent, comme $X$, des moments jusqu'à l'ordre 4 au moins, et sont indépendantes ; d'après le lemme des coalitions, pour tout $(k, j) \in [\![1, 4]\!]^4$, $X_1^k$ et $X_2^j$ sont indépendantes ; on en déduit que $S$ admet un moment d'ordre 4 qui vaut :

$$\begin{aligned} E(S^4) &= E(X_1^4) - 4E(X_1^3) \times E(X_2) + 6E(X_1^2) \times E(X_2^2) - 4E(X_1) \times E(X_2^3) + E(X_2^4) \\ &= E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 - 4E(X)E(X^3) + E(X^4) \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 \end{aligned}$$

Par ailleurs, et par linéarité de l'espérance notamment :

$$\begin{aligned} 2\mu_4(X) + 6\big(V(X)\big)^2 &= 2E\Big(X^4 - 4X^3E(X) + 6X^2E(X)^2 - 4XE(X)^3 + E(X)^4\Big) + 6\big(E(X^2) - E(X)^2\big)^2 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 12E(X^2)E(X)^2 - 8E(X)^4 + 2E(X)^4 \\ &\qquad + 6E(X^2)^2 - 12E(X^2)E(X)^2 + 6E(X)^4 \\ &= 2E(X^4) - 8E(X^3)E(X) + 6E(X^2)^2 \end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité des deux membres : $\quad E(S^4) = 2\mu_4(X) + 6\big(V(X)\big)^2$.

b) Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ étant indépendantes, il en est de même pour $X_1$ et $-X_2$.
En reprenant les calculs réalisés 6.a), on réalise qu'on peut écrire :

$$\forall t \in I, \quad M_S(t) = E\big(e^{t(X_1 - X_2)}\big) = E\big(e^{tX_1} \times e^{-tX_2}\big) = E\big(e^{tX_1}\big) \times E\big(e^{-tX_2}\big) = M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(-t) = M_X(t).M_X(-t)$$

Comme $M_X$ est de classe $C^4$ sur $I$, par composition par $t \mapsto -t$ et produit, $M_S$ est de classe $C^4$ au voisinage de 0 ; pour garantir que c'est le cas sur tout $I$, on a en fait besoin de savoir que $I$ est un intervalle *symétrique* par rapport à 0 : $\quad \forall t \in I,\ -t \in I$. On peut admettre que c'est le cas ici sans perte de généralité.

En reprenant le calcul réalisé à la question 12., on obtient une première relation entre $M_S$, $K_S$ et $K'_S$ :

$$\forall t \in I, \quad K_S(t) = \frac{M'_S(t)}{M_S(t)} \iff M'_S(t) = K'_S(t) \times M_S(t)$$

On dérive la dernière égalité (dérivée d'un produit) :

$$\forall t \in I, \quad M_S''(t) = K_S''(t) \times M_S(t) + K_S'(t) \times M_S'(t)$$

Encore une fois :

$$\forall t \in I, \quad M_S^{(3)}(t) = K_S^{(3)}(t).M_S(t) + K_S''(t).M_S'(t) + K_S''(t).M_S'(t) + K_S'(t).M_S''(t)$$

$$= K_S^{(3)}(t).M_S(t) + 2K_S''(t).M_S'(t) + K_S'(t).M_S''(t)$$

Et une dernière fois :

$$\forall t \in I, \quad M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t).M_S(t) + K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + 2\big(K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + K_S''(t).M_S''(t)\big) + K_S''(t).M_S''(t) + K_S'(t).M_S^{(3)}(t)$$

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t).M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t).M_S'(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + K_S'(t)M_S^{(3)}(t)$$

**Remarque :** la formule de Leibniz pour la dérivée $n$-ième d'un produit de deux fonctions $n$ fois dérivables ne figure pas au programme officiel de ECE (mais est souvent étudiée en ECE2) ; elle aurait permis de conclure plus rapidement, puisqu'on aurait pu dériver 3 fois $M_S' = K_S' \times M_S$ pour écrire, pour tout $t$ de $I$

$$M_S^{(4)}(t) = \big(M_S'\big)^{(3)}(t) = \big(K_S' \times M_S\big)^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \big(K_S'\big)^{(k)}(t).\big(M_S\big)^{(3-k)}(t)$$

$$= \binom{3}{0}.K_S'(t)M_S^{(3)}(t) + \binom{3}{1}.(K_S')'(t)M_S''(t) + \binom{3}{2}(K_S')''(t).M_S'(t) + \binom{3}{3}(K_S')^{(3)}(t).M_S^{(0)}(t)$$

$$= K_S'(t)M_S^{(3)}(t) + 3K_S''(t)M_S''(t) + 3K_S^{(3)}(t)M_S'(t) + K_S^{(4)}(t)M_S(t)$$

c) La variable $S$ présentant les conditions requises pour la propriété admise au début de cette partie, on peut dire que : $\forall k \in [\![1, 4]\!]$, $M_S^{(k)}(0) = E(S^k)$ ; l'évaluation de la relation précédente en $t = 0$, donne donc :

$$M_S^{(4)}(0) = K_S^{(4)}(0).M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0).M_S'(0) + 3K_S''(0)M_S''(0) + K_S'(0)M_S^{(3)}(0)$$

$$\iff E(S^4) = Q_4(S).1 + 3Q_3(S).E(S) + 3Q_2(S)E(S^2) + Q_1(S).E(S^3)$$

Où : $Q_1(S) = E(S)$ d'après 12., et par ailleurs :
$E(S) = E(X_1) - E(X_2) = E(X) - E(X) = 0$...! On a aussi $Q_2(S) = V(S) = E(S^2)$ puisque $E(S) = 0$.
Il reste donc, en effet :

$$E(S^4) = Q_4(S) + 3\big(V(S)\big)^2$$

14. Il reste à se souvenir du fait que : $Q_4(S) = Q_4(X_1 - X_2) = Q_4(X_1) + Q_4(-X_2) = 2Q_4(X)$ au vu des calculs menés à la question 6.

Par ailleurs : $V(S) = V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2V(X)$ puisque $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et de même loi que $X$.

Il reste donc à mettre en relation les deux expressions possibles de $E(S^4)$ qu'on a obtenues aux questions 13.a) et 13.c), qui permettent d'écrire :

$$2\mu_4(X) + 6\big(V(X)\big)^2 = 2Q_4(X) + 12\big(V(X)\big)^2 \iff 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6\big(V(X)\big)^2$$

ce qui donne bien : $\quad Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\big(V(X)\big)^2$.

★★★ FIN DU SUJET ★★★