MATHÉMATIQUES - Edhec E 2002

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ sa partie entière, ie l'unique nombre entier vérifiant :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z},\ (Y = k) = (k \leqslant X < k+1)$.

1. a) On sait que la loi exponentielle donne à la v.a.r. X l'univers-image : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. La partie entière d'un réel positif est bien un entier naturel, donc $Y(\Omega) = [\mathbb{R}_+] = \mathbb{N}$ (image directe de $\mathbb{R}_+$ par la fonction partie entière).

   b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Y = k-1) &= P(k-1 \leqslant X < k+1) = P(k-1 < X \leqslant k) \text{ car } X \text{ est une variable à densité} \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda k}\right) - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } k, k-1 \in X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \end{aligned}$$

   c) Puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y+1 = k) = P(Y = k-1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}$ qu'on écrit sous la forme :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y+1 = k) = \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} - \left(e^{-\lambda}\right)^{k} = \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$
   pour reconnaître que Y soit la **loi géométrique de paramètre :** $p = 1 - e^{-\lambda}$.

   d) Le cours donne ainsi, sans calcul : $E(Y+1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$, et $V(Y+1) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$.
   Les propriétés de l'espérance et de la variance donnent enfin :

   $\star$ $E(Y+1) = E(Y) + 1 \iff E(Y) = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ par linéarité de l'espérance

   $\star$ $V(Y+1) = V(Y) \iff V(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$ (car $V(aY+b) = a^2V(Y)$).

2. On pose $Z = X - Y$.

   a) Comme le rappelle l'énoncé, pour tout réel x, $[x]$ est l'unique entier vérifiant :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \iff 0 \leqslant x - [x] < 1$$

   On peut donc dire que $Z = X - Y = X - [X]$ prend ses valeurs dans $[0;1[$, et qu'il y a même égalité car par exemple pour tout réel $x \in [0;1[\subset X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que :
   $X(\omega) = x$, mais dans ce cas : $Y(\omega) = [x] = 0$, et $Z(\omega) = X(\omega) = x$.

   Donc : $Z(\Omega) = [0;1[$.

b) Soit $x \in [0;1[$ quelconque. La formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $((Y=k))_{k\in\mathbb{N}}$, donne :

$$\begin{aligned}
P(Z \leqslant x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([Y=k]\cap[Z\leqslant x]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([k\leqslant X<k+1]\cap[X-k\leqslant x]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([k\leqslant X\leqslant k+x]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k<X\leqslant k+x) \text{ car } k+x<k+1 \text{ et } X \text{ est à densité} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(k+x)-F_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-\lambda(k+x)})-(1-e^{-\lambda k}) \text{ car } k, k+x \in X(\Omega)=\mathbb{R}_+ \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}-e^{-\lambda k-\lambda x} = (1-e^{-\lambda x})\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k \\
&= (1-e^{-\lambda x})\times\frac{1}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

On a reconnu une série géométrique de raison $q=e^{-\lambda}\in]0;1[$ puisque $\lambda>0$.

c) Au vu de son univers-image, la fonction de répartition de la v.a.r. est donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Z(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x\in[0;1[\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}.$$

C'est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1. On vérifie seulement la continuité en ces points :

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}F_Z(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}=\frac{1-e^0}{1-e^{-\lambda}}=0=\lim_{x\to0^-}F_Z(x)$, et

$\displaystyle\lim_{x\to1^-}F_Z(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}=\frac{1-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}=1=\lim_{x\to1^+}F_Z(x)$, donc F_Z est bien continue en 0 et en 1, et finalement continue sur $\mathbb{R}$.

La v.a.r. Z est donc bien une variable à densité, on obtient cette dernière par dérivation de la fonction de répartition :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[0;1[\\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x\in[0;1[\end{cases}$$

d) La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}xf(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$

(f est nulle en-dehors de $[0;1]$), cette intégrale est bien absolument convergente car la fonction intégrée est continue sur le segment $[0;1]$.

Ainsi, Z admet une espérance qui vaut : $\displaystyle E(Z)=\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Pour la calculer, on réalise une intégration par partie, en posant :

$$\begin{aligned}
u(x)&=x & &\to & u'(x)&=1\\
v'(x)&=\lambda e^{-\lambda x} & &\to & v(x)&=-e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, donc :

$$E(Z) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\left(\left[-x.e^{-\lambda x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.\left(-e^{-\lambda} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.\left(-e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda}-1)\right)\boxed{= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}}$$

Remarque : il se trouve que $E(X) - E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$, et donc que $E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y)$ mais le théorème de linéarité de l'espérance du cours ne prévoit pas le cas où l'une des variables est discrète, et l'autre à densité. On ne pouvait donc pas l'utiliser pour aller plus vite !

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant "*pile*" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "*face*" avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle k-chaîne de "*pile*" une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "*pile*", cette suite devant être suivie d'un "*face*" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de "*pile*" obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient "*pile*" au k-ième lancer ».

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$
alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1. En n lancers, il ne peut y avoir au mieux qu'une seul n-chaîne de "*pile*" :
   $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$, Y_n est une variable de Bernoulli avec $P(Y_n = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) = p^n$ par indépendance mutuelle des lancers.
   Ainsi $P(Y_n = 0) = 1 - p^n$, et d'après le cours : $E(Y_n) = 1 - p^n$.
2. En n lancers, il ne peut y avoir là encore et au mieux, qu'une seule $(n-1)$-chaîne de "*pile*" : celle qui commence dès le premier lancer (et on finit donc par un "*face*"), et celle qui commence après un premier "*face*" pour finir au dernier lancer ; bref :
   $$[Y_{n-1} = 1] = (P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) \quad \text{et} \quad P(Y_{n-1} = 1) = p^{n-1}q + qp^{n-1} = 2qp^{n-1}$$
   Par union disjointe, et par mutuelle indépendance des lancers.
3. Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1,n-2]\!]$.
   Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de "*pile*" commence au i-ième lancer, et qui vaut 0 sinon.
   a) Ici, puisque $k \leqslant n-2$, une k-chaîne de "*pile*" commence au premier lancer si et seulement si les k premiers lancers sont des "*pile*", **et** le $(k+1)$-ième donne "*face*" pour interrompre la chaîne :
   $$[X_{1,k} = 1] = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1} \quad \text{et} \quad P(X_{1,k} = 1) = p^k q$$
   b) Soit $i \in [\![2,n-k]\!]$: Cette fois, puisque $i \geqslant 2$ et $i \leqslant n-k \iff i+k \leqslant n$, une k-chaîne de "*pile*" commence au i-ième lancer si et seulement si le lancer $(i-1)$ donne "*face*", la chaîne de "*pile*" court effectivement du lancer i au lancer $i+k-1$, et le $i+k$-ième lancer donne "*face*" et interrompt la chaîne :
   $$[X_{i,k} = 1] = F_{i-1} \cap P_i \cap P_{i+1} \cap \ldots \cap P_{i+k-1} \cap F_{i+k} \quad \text{et} \quad P(X_{i,k} = 1 = qp^kq = q^2p^k$$

c) Lorsque $i = n-k+1$: une k-chaîne de "*pile*" commençant au lancer $i = n-k+1$, finit au lancer $i+k-1 = n$, ce qui signifie que la chaîne ne s'arrête qu'avec la fin des lancers, et pas par un "*face*" après :

$$[X_{n-k+1,k} = 1] = F_{n-k} \cap P_{n-k+1} \cap P_{n-k+2} \cap \ldots \cap P_n \quad \text{et} \quad P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$$

d) La variable aléatoire Y_k compte le nombre de k-chaînes de "*pile*" en n lancers en comptabilisant chacune de ces chaînes, suivant le moment où elles commencent : les instants de départ possibles sont du lancer 1 au lancer $n-k+1$ (il faut pouvoir faire au moins k lancers). Il est alors clair que :

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}$$

La linéarité de l'espérance donne ainsi :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \sum_{i=1}^{n-k+1} E(X_{i,k}) \\ &= P(X_{1,k} = 1) + \sum_{i=2}^{n-k} P(X_{i,k} = 1) + P(X_{n-k+1,k} = 1) \\ &= p^k q + \sum_{i=2}^{n-k} q^2 p^k + qp^k \\ E(Y_k) &= 2qp^k + (n-k-1)q^2 p^k \end{aligned}$$

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, \ f(x) = \dfrac{-x\ln(x)}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. a) La fonction f est d'abord bien définie et continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de somme et produit de fonctions continues sur cet intervalle (avec : $\forall x > 0, \ 1 + x^2 > 0$).

   Les croissances comparées au voisinage de 0 donnent : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$, donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-0}{1+0^2} = 0 = f(0)$$

   Ce qui prouve que f est aussi continue (à droite) en 0.

   Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

   b) Comme on l'a déjà dit : $\forall x \in]0, +\infty[, \ 1 + x^2 > 0$, donc le signe sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $-x\ln(x)$, donc le signe opposé à $\ln(x)$ puisque $-x < 0$ sur l'intervalle.

   En clair, le tableau de signes de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	+	0	−	

2. Il s'agit ici d'une question de cours ! La fonction f est, comme on l'a vue, continue sur $\mathbb{R}_+$: à ce titre, elle admet des primitives sur cet intervalle, et on définit bien une fonction sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

La fonction F est ici LA primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, qui s'annule en 0.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose : $\quad g(x) = F(x) - x$.

a) La question précédente permet d'affirmer que F est, en tant que primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur cet intervalle. La fonction g est donc elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, comme différence de telles fonctions, et :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 = \frac{-x\ln(x)}{1+x^2} - 1$$

Ce qui peut en effet s'écrire : $\quad \forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{-x}{1+x^2}.h(x)$ à condition de poser :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad h(x) = \ln(x) + \frac{1+x^2}{x} = \ln(x) + \frac{1}{x} + x$$

b) La fonction h ainsi définie est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2+x-1}{x^2}$$

Le signe de $h'(x)$ est donc celui du trinôme x^2+x-1 sur $]0,+\infty[$; le discriminant de ce dernier vaut : $\Delta = 5 > 0$, il y a donc deux racines respectivement égales à $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
Les règles de signe des trinômes du second degré donnent alors le tableau :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

On on a noté $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ la racine positive de x^2+x-1.
La fonction h admet donc un minimum sur $]0,+\infty[$ en $x = \alpha$, qui vaut :

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \ln(\alpha) + \frac{1}{\alpha} + \alpha = \ln(\alpha) + \frac{2}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= \ln(\alpha) + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \ln(\alpha) + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ h(\alpha) &= \ln(\alpha) + \sqrt{5} \end{aligned}$$

La valeur approchée : $\quad \ln(\alpha) \approx -0,48$ et le fait que $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ permettent d'affirmer que :

$$h(\alpha) > 0 \text{ et par conséquent : } \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ h(x) \geqslant h(\alpha) > 0$$

La fonction h est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Des résultats précédents, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) < 0 \quad \text{puisque } -x < 0,\ h(x) > 0 \text{ et } 1+x^2 > 0$$

On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, et par conséquent :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) < g(0) = F(0) - 0 \iff \forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) < 0$$

Il est clair en effet que $F(0) = 0$.

4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = F(u_n)$.

a) Montrons par récurrence sur n que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) :\ u_n \in [0,1]$.

$\boxed{\text{I.}}$ La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$ avec $u_0 = 1$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; alors au rang suivant :

$0 \leqslant u_n \leqslant 1$ implique $F(0) \leqslant F(u_n) \leqslant F(1)$ car F est croissante sur $[0,1]$, puisque f est positive sur cet intervalle. Or :

$F(0) = 0$ et $F(1) - 1 = g(1) < 0$ d'après 3, donc : $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant F(1) \leqslant 1$,

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ d'après la question 3., puisque $u_n \in [0,1]$. La suite est donc décroissante.

c) La suite (u_n) est ainsi décroissante, minorée par 0 : elle est par conséquent convergente, d'après le théorème de limite monotone.

La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n)$ et la continuité de F sur $[0,1]$ amènent à écrire, par unicité de la limite ℓ de la suite :

$$\ell = F(\ell) \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = 0$$

Au vu de l'étude de g menée plus haut. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

PROBLÈME

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices

1. a) La définition de E correspond à celle de $\mathrm{Vect}(I,J,K,L)$, ce qui suffit à faire de E un espace vectoriel, comme sous-espace de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par quatre matrices d'ordre 4.

b) Soient a,b,c,d des réels tels que :

$$a.I + b.J + c.K + d.L = 0_4 \iff \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix} = 0_4 \iff a = b = c = d = 0.$$

La famille (I,J,K,L) est bien libre.

c) La famille (I,J,K,L) étant génératrice de E et libre, c'est une base de E et donc : $\quad \dim E = 4$.

2. a) Les calculs matriciels donnent : $J^2 = L = 0.I + 0.K + 0.J + 1.L \in E$, $\quad K^2 = L \in E$ pour la même raison,

$L^2 = I = 1.I + 0.J + 0.K + 0.L \in E$, $\quad J^3 = K = 0.I + 0.J + 1.K + 0.L \in E$

et $K^3 = J = 0.I + 1.J + 0.K + 0.L \in E$.

b) Au vu des résultats précédents, on peut écrire :

$JK = K^3 \times K = K^4 = L^2 = I \in E$, $\quad KJ = J^4 = L^2 = I \in E$,

$KL = K^3 = LK \in E$, $\quad JL = LJ = J^3 = K \in E$.

c) Soient M et N deux matrices quelconques de E : il existe donc des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que $M = a.I + b.J + c.K + d.L$ et $N = a'.I + b'.J + c'.K + d'.L$, et alors :

$$\begin{aligned} M \times N &= aa'.I + ab'.J + ac'.K + ad'.L + ba'.J + bb'.J^2 + bc'.JK + bd'.JL \\ &\qquad + ca'.K + cb'.KJ + cc'.K^2 + cd'.KL + da'.L + db'.LJ + dc'.LK + dd'.L^2 \\ &= (aa' + bc' + cb' + dd').I + (ab' + a'b + cd' + d'c).J \\ &\qquad + (ac' + a'c + bd' + db').K + (ad' + a'd + bb' + cc').L \end{aligned}$$

Le produit $M \times N$ s'écrit bien comme combinaison linéaire des quatres matrices de la base de E : à ce titre, c'est bien un élément de E.

3. a) Il est clair que la matrice L est symétrique réelle : elle est donc diagonalisable, d'après le théorème admis du cours.

b) Les calculs précédents ont fait apparaître la relation : $L^2 = I \iff L^2 - I = 0_4$, qui exprime que $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice L. Par conséquent, les valeurs propres de L sont à chercher parmi les racines de P, qui sont évidemment -1 et 1.

- Pour $\lambda = 1$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1(L) \iff (L - I)X = 0_{4,1}$

$$\iff \begin{cases} x \quad - z = 0 \\ y \quad - t = 0 \\ -x \quad + z = 0 \\ -y \quad + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases} ;$$

On trouve une infinité de solutions, donc $\lambda = 1$ est bien valeur propre de L, de sous-espace propre associé $E_1(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $\lambda = -1$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-1}(L) \iff (L + I)X = 0_{4,1}$

$$\iff \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ y \quad + t = 0 \\ x \quad + z = 0 \\ y \quad + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} ;$$

On trouve une infinité de solutions, donc $\lambda = -1$ est bien valeur propre de L, de sous-espace propre associé $E_{-1}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans les deux cas on a obtenu une famille génératrice du sous-espace propre, constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'en est une base, et L possède deux sous-espaces propres de dimension 2 chacun.

4. On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) comprend 4 vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4 ; il suffit donc de prouver que cette famille est libre, pour que ce soit une base de l'espace vectoriel.

Soient donc a, b, c, d des réels tels que :

$$a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 + d.u_4 = 0_{4,1}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ a + b - c - d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2b + 2d = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2c + 2d = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 2b + 2c = 0 & L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2b + 2d = 0 \\ 2c + 2d = 0 \\ 2c - 2d = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2b + 2d = 0 \\ 2c + 2d = 0 \\ 4d = 0 & L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{cases}$$

$$\iff d = 0 = c = b = a$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est bien libre, c'est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

b) Il est clair que u_1 et u_2 appartiennent à $E_1(L)$ (ce sont respectivement la somme et la différence des deux vecteurs de la base obtenue pour ce sous-espace), donc $Lu_1 = u_1$ et $Lu_2 = u_2$, tandis que pour les mêmes raisons, u_3 et u_4 appartiennent à $E_{-1}(L)$, donc $Lu_3 = -u_3$ et $Lu_4 = -u_4$.

$J + K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et les calculs matriciels donnent :

$(J + K)u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.u_1$, $\quad (J + K)u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2.u_2$, donc u_1 et u_2 sont aussi vecteurs propres de $(J + K)$ pour les valeurs propres 2 et -2 respectivement.

On otient également : $\quad (J + K)u_3 = 0_{4,1} = (J + K)u_4$, donc u_3 et u_4 sont aussi vecteurs propres de $(J + K)$ pour la valeur propre 0.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

1. a) Au vu des données de l'énoncé, la matrice des probabilités conditionnelles est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, on a toujours $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = i) = 0$ car le pion ne reste jamais sur la même case, $P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2) = P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 4) = p$ car les sommets 2 et 4 sont adjacents au sommet 3.

b) Au vu de ce qui a été fait, on remarque directement que $A = p.(J+K) + (1-2p).L$, la matrice A s'écrit bien comme combinaison linéaire de $(J+K)$ et L.

2. a) Au vu de toutes les relations déjà obtenues, on peut calculer facilement :

$$Au_1 = p.(J+K)u_1 + (1-2p)Lu_1 = p.(2.u_1) + (1-2p).u_1 \iff Au_1 = u_1$$
$$Au_2 = p.(J+K)u_2 + (1-2p)Lu_2 = p.(-2.u_1) + (1-2p).u_2 = (1-4p).u_2$$
$$Au_3 = p.(J+K)u_3 + (1-2p)Lu_3 = 0_{4,1} + (1-2p).(-u_3) = (2p-1).u_3$$
$$Au_4 = p.(J+K)u_4 + (1-2p)Lu_4 = 0_{4,1} + (1-2p).(-u_4) = (2p-1).u_4$$

Les vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) sont donc tous les quatre, des vecteurs propres de A. Comme ils forment une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, la matrice A est par conséquent diagonalisable, semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$, via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Le calcul matriciel donne :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 & 1-1+1-1 & 1+1-1-1 & 1-1-1+1 \\ 1-1+1-1 & 1+1+1+1 & 1-1-1+1 & 1+1-1-1 \\ 1+1-1-1 & 1-1-1+1 & 1+1+1+1 & 1-1+1-1 \\ 1-1-1+1 & 1+1-1-1 & 1-1+1-1 & 1+1+1+1 \end{pmatrix} = 4I,$$

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{1}{4}.P \times P = I$, et suffit à prouver que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{4}.P$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a) La formule des probabilités totales donne, avec le système complet d'événements $\big([Xn = i]\big)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) = {} & P(X_n = 1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \\ & + P(X_n = 3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) = {} & P(X_n = 1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) \\ & + P(X_n = 3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 3) = {} & P(X_n = 1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3) \\ & + P(X_n = 3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 3) + P(X_n = 4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 4) = {} & P(X_n = 1).P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 4) + P(X_n = 2).P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 4) \\ & + P(X_n = 3).P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 4) + P(X_n = 4).P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 4) \end{aligned}$$

ce qui se traduit bien matriciellement, avec $C_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \\ P(X_{n+1} = 4) \end{pmatrix}$, par la relation :

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) & P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) & P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1) & P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 1) \\ P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) & P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) & P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2) & P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 2) \\ P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 3) & P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3) & P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 3) & P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 3) \\ P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 4) & P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 4) & P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 4) & P_{[X_n=4]}(X_{n+1} = 4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

$$\iff C_{n+1} = AC_n$$

b) La relation de récurrence matricielle précédente, et la diagonalisation de A nous amènent assez naturellement à la relation générale demandée, qu'on démontre par récurrence sur n ; soit $\mathcal{P}(n)$: "$C_n = \frac{1}{4}PD^nPC_0$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $\frac{1}{4}PD^0PC_0 = \frac{1}{4}P^2C_0 = IC_0 = C_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, alors au rang suivant :

$$C_{n+1} = AC_n \overset{H.R.}{P} DP^{-1} \times \frac{1}{4}PD^nPC_0 = \frac{1}{4}PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}D^nPC_0 = \frac{1}{4}PD^{n+1}PC_0$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

L'énoncé précise que le pion est sur le sommet 1 au départ, donc $C_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $PC_0 = u_1$, tandis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0\\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n\end{pmatrix}$ (les puissances d'une matrice diagonale sont immédiates), d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ (1-4p)^n\\ (2p-1)^n\\ (2p-1)^n\end{pmatrix}$$

soit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} P(X_n = 1) & = \frac{1}{4}\big(1 + (1-4p)^n + 2(2p-1)^n\big)\\ P(X_n = 2) & = \frac{1}{4}\big(1 - (1-4p)^n\big)\\ P(X_n = 3) & = \frac{1}{4}\big(1 + (1-4p)^n - 2(2p-1)^n\big)\\ P(X_n = 4) & = \frac{1}{4}\big(1 - (1-4p)^n\big)\end{cases}.$