MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2018

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4+0-2 & 2+3+2 & -4+0-10 \\ 0+0+0 & 0+9+0 & 0+0+0 \\ 2+0+5 & 1-3-5 & -2+0+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

   c'est-à-dire :
   $$A^2 - 7A = -12I_3$$

   b) Le résultat précédent s'écrit aussi : $A^2 - 7A^1 + 12A^0 = 0_3$, ce qui signifie que $P(X) = X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

   On sait donc que les valeurs propres possibles de A sont les racines du trinôme P, dont le discriminant est : $\quad \Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$. Le trinôme admet deux racines distinctes, à savoir $x_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$, qui sont donc les seules valeurs propres possibles de A.

   c) On vérifie si les deux seules valeurs propres possibles de A le sont effectivement :

   - $A - 3.I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: cette matrice est évidemment non-inversible, puisque sa deuxième ligne est nulle, donc 3 est bien valeur propre de A.

     Le sous-espace propre associé est l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

     $$(A - 3.I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 0 & & & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff x = y - 2z$$

     Donc :

     $$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

     On a obtenu une famille génératrice de $E_3(A)$ constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'est aussi une famille libre, donc une base de $E_3(A)$.

   - $A - 4.I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: cette matrice est aussi non-inversible puisque deux de ses colonnes sont égales, donc 4 est bien valeur propre de A.

Le sous-espace propre associé est l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

$$(A-4.I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} -2x - 2z & = 0 \\ \quad y & = 0 \\ x + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc : $\quad E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

On a obtenu une famille génératrice de $E_4(A)$ constituée d'un unique vecteur non nul : il constitue aussi une famille libre, donc une base de ce sous-espace propre.

d) La matrice A est inversible car ses deux seules valeurs propres sont non nulles.
Ensuite : $\quad A$ est une matrice carrée d'ordre 3, avec :

$$\dim E_3(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = 3$$

donc A est diagonalisable.

2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est : $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Pour trouver le noyau de f, on résout le système $BX = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$BX = 0_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & z & = & 0 & \\ & & & - & 6z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ & & & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc : $\quad \mathrm{Ker}(f) = \{(x, x, 0) |\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.
On en déduit que 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

b) $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a deux colonnes égales (C_1 et C_3) tandis que C_1 et C_2 sont non proportionnelles : on en déduit directement que $\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 2$.

c) Le vecteur $f(e_1 - e_2 - e_3)$ est représenté matriciellement par $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc :

$$f(e_1 - e_2 - e_3) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_3 = 3(e_1 - e_2 - e_3)$$

d) D'après a), 0 est valeur propre de f.
D'après b), $B - 2I_3$ n'est pas inversible car elle n'est pas de rang maximal 3, donc 2 est valeur propre de B, et de f aussi par conséquent.
D'après c), le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 3.
L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ possède donc trois valeurs propres distinctes, à savoir 0, 2 et 3.
D'après le critère suffisant, on peut donc conclure sans calcul que f n'a pas d'autre valeur propre, que f est diagonalisable et que les trois sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

3. D'après ce qui précède : pour diagonaliser effectivement B, avec des valeurs propres dans l'ordre imposé, il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre : ils formeront les colonnes de la matrice de passage P.

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre 3 d'après 2.c).

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre 0 d'après 2.a).

$V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne qui vérifie : $(B - 2I_3)V_3 = 0_{3,1}$ d'après 2.b), il s'agit donc d'un vecteur propre de B pour la valeur propre 2.

La matrice de passage P cherchée est donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Il reste donc à vérifier, conformément à la troisième demande de l'énoncé, que les trois vecteurs colonnes V_1, V_2 et V_3 sont également vecteurs propres de A : d'après les calculs menés à la question 1., c'est le cas des vecteurs V_2 et V_3, respectivement associés aux valeurs propres 3 et 4. On calcule enfin : $AV_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3V_1$, donc V_1 est bien vecteur propre de A pour la valeur propre 3.

On en déduit sans calcul supplémentaire que $D_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} = \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}APY_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BPY_n \qquad \text{car } \forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n \iff X_n = PY_n \\ Y_{n+2} &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \end{aligned}$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. De la question précédente, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad Y_{n+2} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3a_{n+1} \\ 3b_{n+1} \\ 4c_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3a_n \\ 0 \\ 2c_n \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien les relations : $\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}c_{n+1}+\dfrac{1}{3}c_n \end{cases}.$

3. Puisque l'énoncé nous fournit gentiment la matrice inverse de P qu'il faut obtenir, on se contente de calculer :

$$P\times\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1-1&-1+0+1&1+1-2\\-1+1+0&1+0+0&-1+1+0\\-1+0+1&1+0-1&-1+0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

ce qui suffit pour prouver que P est inversible, d'inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

Ainsi : $Y_0=P^{-1}X_0=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $Y_1=P^{-1}X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

4. Les trois relations de récurrence obtenues permettent le calcul explicite de $a_n,\ b_n,\ c_n$ en fonction de n :

- La relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+2}=\dfrac{1}{2}b_{n+1}$ signifie que la suite (b_n) est géométrique *à partir du rang 1*, de raison $\dfrac{1}{2}$, et :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad b_n=b_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$
Remarquons que puisque $b_0=2$, la formule est aussi vrai pour $n=0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- La relation : $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$ fait de (a_n) une *suite récurrente linéaire d'ordre 2*, d'équation caractéristique :
$$x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\iff 2x^2-x-1=0$$
Le discriminant est : $\Delta=(-1)^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9>0$, il y a donc deux racines distinctes, qui sont $r_1=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $r_2=\dfrac{1+3}{4}=1$.
L'expression explicite de a_n est donc de la forme : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\alpha.1^n+\beta.\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$, où α et β sont obtenus en écrivant la relation pour $n=0$ et $n=1$, ce qui donne le système :
$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha-\dfrac{1}{2}\beta=1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ -\dfrac{3}{2}\beta=-1\ \ L_2\leftarrow L_2-L_1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=2-\beta=\dfrac{4}{3}\\ \beta=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$
de sorte que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$$

- La suite (c_n) est aussi récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :
$$x^2=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\iff 3x^2-2x-1=0$$

Le discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$, il y a donc deux racines distinctes, à savoir $s_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $s_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$. L'expression explicite de c_n est donc de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \gamma.1^n + \delta.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, où γ et δ sont obtenus en écrivant la relation pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \gamma & + & \delta & = & 1 \\ \gamma & - & \dfrac{1}{3}\delta & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \gamma & + & \delta & = & 1 \\ & - & \dfrac{4}{3}\delta & = & -2 \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \gamma = 1 - \delta = -\dfrac{1}{2} \\ \delta = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. Il reste à écrire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = P^{-1}X_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = PY_n$ pour en déduire, en notant $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_n = a_n + b_n - c_n & = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{11}{6} \\ \beta_n = -a_n + b_n & = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{4}{3} \\ \gamma_n = -a_n + c_n & = \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{11}{6} \end{cases}$$

6. a) On retrouve ici un mode de calcul classique des termes successifs d'une suite récurrente sur deux générations : il faut à tout moment, connaître le dernier *et* l'avant-dernier terme calculé pour pouvoir en déduire un nouveau terme de la suite ; attention à l'ordre précis des réaffectations, ici heureusement donné par le script incomplet !

```
function res = X(n)
    Xold = [3;0;-1]
    Xnew = [3;0;-2]
    A = [2,1,-2;0,3,0;1,-1,5]
    B = [1,-1,-1;-3,3,-3;-1,1,1]
    for i = 2:n
        Aux = 1/6*A*Xnew + 1/6*B*Xold   // le calcul d'un nouveau terme est fait dans Aux
        Xold = Xnew     // Les deux variables sont actualisées
        Xnew = Aux      //
    end
    res = Xnew
endfunction
```

b) Les trois suites (α_n), (β_n), (γ_n) sont facilement identifiables par leur comportement asymptotique :

Comme $-1 < -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6}; \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3}; \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6}$$

Les trois nuages de points correspondent donc tout simplement, de haut en bas, à (α_n), (β_n), (γ_n) dans cet ordre !

Exercice 2

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

   a) Deux calculs de limites :

   - $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{1+0} = 1$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$ par continuité des deux fonctions concernées en 0, et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc par somme et différence :

   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

   - Au voisinage de $+\infty$: $\quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, où : $\quad x+1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$,

     et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, on en déduit :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

   Il est clair que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = f(n)$$

   Après télescopage entre les deux sommes.

   d) La fonction f, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, est strictement majorée par sa limite en $+\infty$ qui vaut 0 : on en déduit que pour tout $x > 0$, $\ f(x) < 0$.

   En particulier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) < 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

e) Le code est très classique, on utilise ici des opérations termes à termes (pointées) sur un vecteur :

```
function y = u(n)
    y = sum([1:n].^(-1)) - log(n)
endfunction
```

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = f(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ce qui est bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right).$

b) La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ et concave sur $]0, +\infty[$, donc sa courbe est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes, en particulier au point d'abscisse 1, qui a pour équation :

$$y = \ln'(1).(x-1) + \ln(1) \iff y = x - 1$$

d'où : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$, ce qui implique bien, par changement de variable :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

relation vraie, donc, pour tout réel positif x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ donc d'après l'inégalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien croissante.

c) Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0 est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, donc :

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \iff v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La dernière égalité s'écrit aussi, par définition même de l'équivalence :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) D'après ce qui précède : puisque la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente comme série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ (à un facteur constant $\dfrac{1}{2}$ prêt), alors d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_{n+1} - v_n$ est elle-même convergente.

On note[1] : $\quad \gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k).$

1. où l'on retrouve la constante Gamma d'Euler !

e) Soit $n \geqslant 2$ quelconque : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = \sum_{j=2}^{n} v_j - \sum_{k=1}^{n-1} v_k = v_n - v_1 = v_n$ puisque $v_1 = u_1 - 1 = 0$.

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(v_{k+1} - v_k) = \gamma$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = v_n + \dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma + 0 = \gamma$.

b) La suite (u_n) est décroissante de limite γ : une conséquence du théorème de limite monotone est que γ est le plus grand minorant de la suite, ce qui permet d'écrire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \gamma$.
Comme (v_n) est croissante et a aussi pour limite γ, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

cela s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \frac{1}{n} \leqslant \gamma \leqslant u_n \iff -\frac{1}{n} \leqslant \gamma - u_n \leqslant 0 \iff \frac{1}{n} \geqslant u_n - \gamma \geqslant 0$$

ce qui donne bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) Le tout petit script suivant :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif ')
n = floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

calcule u_n pour $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, pour un $\varepsilon > 0$ donné ; n est ainsi le plus petit entier tel que :
$\dfrac{1}{\varepsilon} < n \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, et pour cet entier : $\quad |u_n - \gamma| < \varepsilon$ par transitivité de l'inégalité.
Le réel u_n alors affiché constitue une approximation de sa limite γ à ε près.

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

1. Par règles de calcul avec les équivalents :

$$2n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \Longrightarrow n(2n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente : c'est à un facteur constant près une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$; par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

2. a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ est la somme des inverses de tous les entiers compris entre 1 et $2n$, tandis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ est la somme des inverses de tous les entiers *pairs* compris entre 2 et $2n$.

On en déduit que leur différence est la somme de tous les entiers *impairs* compris entre 1 et $2n-1$, somme qui s'écrit bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

b) On cherche deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} = \frac{1}{n(2n-1)} \iff \frac{2\alpha n - \alpha + \beta n}{n(2n-1)} \iff \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{(2\alpha+\beta)n - \alpha}{n(2n-1)}$$

Par identification des coefficients au numérateur, on en déduit que α et β vérifient le système :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta & = 0 \\ -\alpha & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2\alpha = 2 \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}$$

c) Le passage à la somme dans la relation précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \cancel{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{2}k} = 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

3. a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln(n)$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - u_n - \ln(n) = u_{2n} - u_n + \ln(2) + \cancel{\ln(n)} - \cancel{\ln(n)}$$

b) Des deux questions précédentes, on déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} 2\big(u_{2n} - u_n + \ln(2)\big) = 2\big(\gamma - \gamma + \ln(2)\big) = 2\ln(2)$$

4. a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ s'écrit aussi (cela revient à faire un changement d'indice avec j tel que : $k = n + j \iff j = n - k$) :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

b) La dernière somme écrite correspond à une *somme de Riemann* de la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$,

où $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est une fonction bien définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

On en déduit donc, d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2)$$

ce qui redonne bien : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2\ln(2).$

Exercice 3

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. La variable aléatoire X compte le nombre de Piles obtenus en n lancers identiques et indépendants : X suit donc la loi binomiale de paramètres (n, p).

   Pour $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$, l'événement A s'écrit donc : $A = [X = 0] \cup [X = 2]$, donc par union disjointe :

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{27} = \frac{13}{27}$$

2. Au vu des règles du jeu, les correspondances entre les valeurs de X et celle de G sont les suivantes :

$$[X = 0] = [G = 0], \quad [X = 1] = [G = -10], \quad [X = 2] = [G = 20], \quad [X = 3] = [G = -30]$$

   et comme ce sont les seules valeurs possibles : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, et la loi de G est donnée par :

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad P(G = -10) = P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9};$$

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{27}; \quad P(G = 20) = P(X = 2) = \frac{4}{9}$$

   En résumé, la loi de G est donnée par le tableau :

k	-30	-10	0	20
$P(G = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{9}$

3. La variable aléatoire G est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$E(G) = -30.P(G = -30) - 10.P(G = -10) + 0.P(G = 0) + 20.P(G = 20) = -\frac{80}{9} - \frac{20}{9} + 0 + \frac{80}{9} = -\frac{20}{9}$$

   L'espérance de gain du joueur est négative, donc le jeu ne lui est pas du tout favorable !

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.
Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. a) On note $Z = \dfrac{Y + 1}{2}$. Comme Y prend les valeurs -1 et 1, alors Z prend les valeurs $\dfrac{-1+1}{2} = 0$ et $\dfrac{1+1}{2} = 1$, c'est-à-dire que Z est une variable de Bernoulli, dont la loi est donnée par :

$$\begin{cases} P(Y = 0) = P(Z = -1) = P(\text{"}X \text{ prend une valeur impaire"}) = P(\overline{A}) \\ \text{et} \quad P(Y = 1) = P(Z = 1) = P(\text{"}X \text{ prend une valeur paire"}) = P(A) \end{cases}$$

b) La variable aléatoire Y est finie, et son espérance vaut :

$$E(Y) = -1.P(Y = -1) + 1.P(Y = 1) = -P(\overline{A}) + P(A) = 2P(A) - 1$$

2. a) Selon le même argument que dans la partie I, X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

b) La relation $Y = (-1)^X$ permet de donner une expression de l'espérance $E(Y)$ issue du théorème de transfert :

$$E(Y) = E\big((-1)^X\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} (-1)^x P(X = x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La somme précédente s'écrit aussi :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + 1 - p)^n = (1 - 2p)^n$$

d'après la formule du binôme de Newton.

3. En identifiant les deux expressions obtenues pour $E(Y)$, on en déduit :

$$2P(A) - 1 = (1 - 2p)^n \iff P(A) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

4. On résout l'inéquation :

$$P(A) \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \geqslant \frac{1}{2} \iff 1 + (1 - 2p)^n \geqslant 1 \iff (1 - 2p)^n \geqslant 0$$

La puissance $(1 - 2p)^n$ est bien positive si et seulement s'il s'agit d'une puissance paire, ou alors $1 - 2p \geqslant 0 \iff p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Partie III

On cherche à savoir s'il est possible d'avoir à la fois $P(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $E(G) \leqslant 0$.

1. La variable aléatoire G est égale à $10XY = 10(-1)^X X$: le nombre de Piles obtenus est multiplié par 10, le signe est bien donné par la valeur de $Y = (-1)^X$ qui dépend de la parité de X.
   Le théorème de transfert donne bien :

$$E(G) = 10E\big((-1)^X X\big) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k)$$

2. On redémontre ici la formule sans nom ; pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

3. De la relation précédente, on déduit :

$$E(G) = 10 \sum_{k=\cancel{0}}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 10 \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{[j=k-1]}{=} 10n \sum_{j=0} n - 1 (-p)^{j+1} (1-p)^{n-j-1} = -10np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$E(G) = -10np(-p + 1 - p)^{n-1} = -10np(1 - 2p)^{n-1}$$

4. On sait déjà que $P(A) \leqslant \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou n est pair, donc :

$$\begin{cases} P(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ E(G) \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair} \\ -10np(1-2p)^{n-1} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n \text{ est pair} \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff p \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n \text{ est pair} \\ 1-2p \geqslant 0 \text{ car } n-1 \text{ est alors impair} \end{cases} \iff p \leqslant \frac{1}{2}$$

5. a) La fonction $f :\ x \mapsto x(1-2x)^{n-1}$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ comme fonction polynômiale, avec :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f'(x) = (1-2x)^{n-1} + x.(n-1).(-2).(1-2x)^{n-2} = \big(1-2x-2x(n-1)\big).(1-2x)^{n-2}$$
$$= (1-2nx).(1-2x)^{n-2}$$

Sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $1-2x \geqslant 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2nx$, et :

$$1-2nx \geqslant 0 \iff 2nx \leqslant 1 \iff x \leqslant \frac{1}{2n}, \quad \text{d'où le tableau de variations de } f :$$

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

6. Pour une valeur de n fixée, en remarquant que : $\quad E(G) = -10n.f(p)$, les variations de f permettent de trouver une valeur maximale atteinte en $p_0 = \dfrac{1}{2n}$, de sorte que pour tout $p \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$:

$$f(p) \leqslant f\left(\frac{1}{2n}\right) \iff p(1-2p)^{n-1} \leqslant \frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \iff E(G) = -10np(1-2p)^{n-1} \geqslant -\frac{5}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

L'espérance de gain du joueur est minimale, et donc la rentabilité de l'activité du forain est maximale lorsque $p = \dfrac{1}{2n}$.

Partie IV

On fixe $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, la loi de G_i est donnée par son univers-image $G(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$ et les probabilités :

$$P(G_i = -10) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{8}; \quad P(G_i = 0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}; \quad P(G_i = 20) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

$$E(G_i) = -10.P(G_i = -10) + 0.P(G_i = 0) + 20.P(G_i = 20) = -\frac{15}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$E(G_i^2) = (-10)^2.P(G_i = -10) + 0^2.P(G_i = 0) + 20^2.P(G_i = 20) = \frac{150}{4} + \frac{100}{4} = \frac{125}{2}$$

La variance de G_i est alors donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = \frac{125}{2} - \frac{25}{4} = \frac{225}{4}$$

2. Le gain J du forain sur la journée est l'opposé de la somme des gains des 200 joueurs sur la journée, donc :

$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$, donc par linéarité de l'espérance : $E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = 200 \times \frac{5}{2} = 500.$

Les variables G_i étant mutuellement indépendantes :

$$V(J) = (-1)^2.V\Big(\sum_{i=1}^{200} G_i\Big) = \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = \frac{45000}{4} = 11250$$

3. D'après l'équivalence classique avec la valeur absolue :

$$\big[|J-500| \geqslant 400\big] = \big[J-500 \leqslant -400\big] \cup [J-500 \geqslant 400] = \big[J \leqslant 100\big] \cup [J \geqslant 900]$$

Ainsi : $[J \leqslant 100] \subset \big[|J-500| \geqslant 400\big]$, donc par croissance de la probabilité :

$$P(J \leqslant 100) \leqslant P\big(|J-500| \geqslant 400\big)$$

4. La variable aléatoire J admet une espérance et une variance, donc on peut écrire pour elle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(|J - E(J)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(J)}{\varepsilon^2}.$

Puisque $E(J) = 500$, avec $\varepsilon = 400$, on obtient :

$$P\big(|J-500| \geqslant 400\big) \leqslant \frac{V(J)}{160000} = \frac{11250}{160000}$$

L'inégalité de la question 3. et le fait que $\frac{11250}{160000} = \frac{45 \times 250}{16 \times 40 \times 250} = \frac{9 \times 5}{16 \times 8 \times 5} = \frac{9}{128}$

donnent bien, par transitivité de l'inégalité : $P(J \leqslant 100) \leqslant \frac{9}{128}.$

5. Puisque $\frac{9}{128} < \frac{10}{128} < \frac{10}{100}$, le risque que le forain gagne moins de 100 euros est bien inférieur à 10%, donc l'exigence de rentabilité est satisfaite et le forain peut installer son stand.