MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2016

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Il est assez facile de voir que, d'après les règles de calcul matriciel :

$$E = \{M(x,y) |\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ x.\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Et donc que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme sous-espace engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont de façon remarquables, respectivement $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$ les deux matrices introduites par l'énoncé.

Ainsi : $E = \text{Vect}(A, B)$, et comme les matrices A et B sont évidemment non proportionnelles, elles forment une famille libre qui engendre E, donc une base de E.

2. On pourrait chercher classiquement les valeurs propres de A en échelonnant la matrice générale $A - \lambda.I_3$, et déterminer ainsi les réels λ pour lesquels cette matrice n'est pas inversible.
Mais l'énoncé donne les valeurs propres à tester ! On vérifie donc directement que :

- $A - 1.I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ où on peut remarquer par exemple, que $L_1 + 2L_2 = L_3$, relation de dépendance linéaire qui assure que $A - I_3$ n'est pas inversible, et donc que $\lambda = 1$ est bien valeur propre de A. D'ailleurs, en résolvant le système d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A - I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y - z = -y \\ z = 2y \end{cases}$$

Le fait qu'on trouve une infinité de solutions confirme que $\lambda = 1$ est valeur propre de A, et de plus :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Le sous-espace propre est engendré par un seul vecteur non nul, qui en constitue donc une base.

- $A - 2.I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est évidemment non inversible, puisque ses lignes L_1 et L_2 sont opposées. En résolvant d'ailleurs le système :

$$(A - 2.I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \iff \begin{cases} x = 2y - 2z = -\dfrac{1}{2}z \\ y = \dfrac{3}{4}z \end{cases}$$

On trouve une infinité de solutions : $\lambda = 2$ est bien valeur propre de A, et

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z/2 \\ 3z/4 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Là encore, on obtient une famille génératrice d'une seul vecteur non nul : c'est une base du sous-espace propre $E_2(A)$.

- $A - 3.I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ est enfin non-inversible puisque dans cette matrice, $L_3 = -2L_1$. De plus :

$$(A - 3.I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. L_3 \leftarrow L_3/4$$

$$\iff \begin{cases} x = y - 2z = -z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda = 3$ est bien valeur propre de A, de sous-espace propre associé :

$$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bilan : la matrice A, **carrée d'ordre 3**, possède déjà **trois valeurs propres distinctes**. D'après la *condition suffisante* du théorème spectral, on en conclut que :
- La matrice A n'admet pas d'autre valeur propre que $1,\ 2$ et 3.
- La matrice A est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède : la matrice A est semblable à la matrice $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ via une matrice de passage P qui contient en colonne un vecteur propre pour chacune des trois valeurs propres, selon

l'ordre dans lequel ces valeurs propres sont écrites sur la diagonale de D_A. On peut choisir également, dans chacun des sous-espaces propres, un vecteur propre dont la première coordonnée correspond aux demandes de l'énoncé, ce qui donne la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. La méthode de Gauss donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On note X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes de la matrice P ; les calculs matriciels donnent :

$$BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad BX_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \; ; \quad BX_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces calculs signifient : $BX_1 = 0.X_1$, $BX_2 = -1.X_2$, $BX_3 = -1.X_3$, donc que X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de B. Comme ils forment déjà une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que B est aussi diagonalisable via la même matrice de passage P que A, et que :

$$B = PD_BP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Comme on vient de le voir, les matrices A et B sont diagonalisables via la même matrice de passage P. Mais alors, pour tous réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$M(x,y) = x.A + y.B = x.PD_AP^{-1} + y.PD_BP^{-1} = P(x.D_A + y.D_B)P^{-1} = PD(x,y)P^{-1}$$

où $D(x,y) = x.D_A + y.D_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}$ est bien une matrice diagonale.

Cela signifie au passage que toutes les matrices $M(x,y)$ sont diagonalisables via la même matrice de passage P, et que les valeurs propres de $M(x,y)$ sont : x, $2x-y$ et $3x-y$.

7. On sait que $M(x,y)$ est inversible si et seulement si 0 n'est **pas** valeur propre de cette matrice. D'après ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x,y)$ soit inversible est donc :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et } 2x - y \neq 0 \\ \text{et } 3x - y \neq 0 \end{cases}$$

8. En exploitant la relation obtenue à la question 5 :

$B^2 = (PD_BP^{-1})^2 = PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_B^2P^{-1}$, où $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a la propriété remarquable d'être une matrice diagonale opposée à son carré ($0^2 = 0$ et $(-1)^2 = 1$), donc en fait :

$B^2 = PD_B^2P^{-1} = -PD_BP^{-1} = -B = M(0,-1)$, ce qui fait bien de B^2 une matrice élément de E !

Pour la matrice A : de la même façon, $A^2 = PD_A^2P^{-1}$, qui est égale à une certaine matrice $M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$ si et seulement si :

$$D_A^2 = D(x,y) \iff \begin{cases} 1^2 = x \\ 2^2 = 2x - y \\ 3^2 = 3x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes du système sont incompatibles, donc le problème n'a pas de solution : la matrice A^2 n'appartient pas à E.

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Par définition : $\quad X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Il est clair que le système de relations de récurrence ci-dessus peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

   ce qui est bien de la forme : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n$ avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

   On vérifie sans peine que : $\quad C = M(1,3)$.

3. La relation générale : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0$ se démontre sans peine par récurrence sur n ; à Ecricome, la rédaction complète de cette récurrence assez immédiate est attendue !

4. D'après les résultats de la partie 3, on sait que : $C = M(1,3) = PD(1,3)P^{-1}$,

   où $D(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

   On démontre sans peine, via la récurrence habituelle, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C^n = PD(1,3)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Il est important de remarquer ici que la forme simplifiée $D(1,3)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas vraie pour $n = 0$, puisque $D(1,3)^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Il reste à mener intelligemment le calcul de $X_n = C^n X_0 = PD(1,3)^n P^{-1} X_0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc, en utilisant l'associativité du produit matriciel pour faire les calculs par la droite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = PD(1,3)^n \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Soit : $\quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2.(-1)^n \\ -1 + 3.(-1)^n \\ -2 + 4.(-1)^n \end{pmatrix}$

   Ce qui donne par identification, les expressions des trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule n'étant toujours pas vraie pour $n = 0$.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

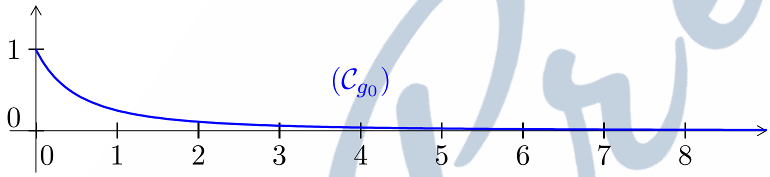
$$g_n(x) = \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2}$$

a) La fonction $g_0 : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$ est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et :

$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_0'(x) = -2.1.(1+x)^{-3} = -\dfrac{2}{(1+x)^3} < 0$, donc g_0 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)^2 = +\infty$, alors par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_0(x) = 0^+$.

On peut considérer pour aider au tracé, le nombre dérivé en 0 : $\quad g_0'(0) = -2$ qui donne la pente de la demi-tangente au point de la courbe d'abscisse 0.



b) Soit $n \geqslant 1$: la fonction $g_n : \quad x \mapsto \dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2}$ est bien définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ où $1 + x > 0$, comme quotient de fonctions qui le sont, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_n'(x) = \frac{n.\dfrac{1}{1+x}.\big(\ln(1+x)\big)^{n-1}.(1+x)^2 - \big(\ln(1+x)\big)^n.2.(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{(1+x).\big(\ln(1+x)\big)^{n-1} \times \big[n - 2\ln(1+x)\big]}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n-1} \times \big[n - 2\ln(1+x)\big]}{(1+x)^3}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$: $\quad 1+x \geqslant 1$ et $\ln(1+x) \geqslant 0$, donc $g_n'(x)$ est bien du signe de $n - 2\ln(1+x)$, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x) \iff \frac{n}{2} \geqslant \ln(1+x) \iff e^{n/2} \geqslant 1+x \iff x \leqslant e^{n/2} - 1$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variations de g_n sur $[0, +\infty[$:

x	0		$e^{n/2}-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

Pour la limite en $+\infty$: il suffit de faire le changement de variable $X = 1 + x$, car :
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(X)\big)^n}{X^2} = 0$ par croissances comparées, donc par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0.$$

c) L'étude des variations de g_n fait clairement apparaître que cette fonction admet un maximum sur $[0, +\infty[$, atteint en $x = e^{n/2} - 1$ et qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{\big(\ln(1 + e^{n/2} - 1)\big)^n}{(1 + e^{n/2} - 1)^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

d) Au voisinage de $+\infty$: $x^{3/2} \sim (1 + x)^{3/2}$, donc $x^{3/2} g_n(x) \sim \dfrac{\big(\ln(1 + x)\big)^n}{(1 + x)^{1/2}}$,

où comme précédemment : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(1 + x)\big)^n}{(1 + x)^{1/2}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(X)\big)^n}{X^{1/2}} = 0$ par croissances comparées.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}.g_n(x) = 0$, ce qui prouve effectivement la relation de négligeabilité :

$$g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$

a) Soit $A > 0$: $\displaystyle\int_0^A g_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{(1 + t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1 + t}\right]_0^A = -\frac{1}{1 + A} + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1,$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

b) Soit $n \geqslant 1$: la fonction g_n est continue et positive sur $[0; +\infty[$, et on a vu que :
$g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ converge, comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$.

Donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

Et comme g_n est continue sur $[0, 1]$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

c) Soit $A > 0$, dans $\displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \big(\ln(1 + t)\big)^{n+1} \times \frac{1}{(1 + t)^2}\mathrm{d}t$, on pose :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \big(\ln(1 + t)\big)^{n+1} & \longrightarrow & u'(t) = \dfrac{(n + 1)}{1 + t}\big(\ln(1 + t)\big)^n \\ v'(t) = \dfrac{1}{(1 + t)^2} & \longrightarrow & v(t) = -\dfrac{1}{1 + t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\big(\ln(1 + t)\big)^{n+1}}{1 + t}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{\big(\ln(1 + t)\big)^n}{(1 + t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{\big(\ln(1 + A)\big)^{n+1}}{1 + A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{\big(\ln(1 + A)\big)^{n+1}}{1 + A} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(X)\big)^{n+1}}{X} = 0$, toujours par croissances comparées, et puisque les intégrales I_{n+1} et I_n convergent, le passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ est possible et donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n + 1).I_n$$

d) Il reste à démontrer par une récurrence facile que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$I_n = n!$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Comme on l'a vu à la question 2.a) : $I_0 = 1 = 0!$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{C.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : "$I_{n+1} = (n+1)!$".

D'après 2.c) : $I_{n+1} = (n+1)I_n \overset{H.R.}{=} (n+1) \times n! = (n+1)!$,

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

a) On vérifie les trois points nécessaires pour que f_n soit une densité de probabilité :

- La fonction f_n est positive sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle ; sur $[0, +\infty[$, on sait que g_n est positive et $\dfrac{1}{n!} > 0$, donc f_n est aussi positive sur cet intervalle, et finalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- La fonction f_n est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante, et continue car dérivable (puisque g_n l'est) sur $]0; +\infty[$. Ainsi f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{n!} I_n = 1.$

La fonction f_n est donc bien une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x g_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x f_n(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue, positive sur $]0, +\infty[$, cela revient à montrer la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$.

Or au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle x f_n(x) = \frac{1}{n!} x \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n!} \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{x}$,

où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(\ln(1+x)\big)^n = +\infty$:

Cela implique donc que $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{=} o\big(x f_n(x)\big)$; mais comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ est divergente (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$), le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$ diverge aussi.

On conclut donc que X_n n'admet pas d'espérance.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$; la fonction densité f_n étant nulle sur $]-\infty, 0[$, on peut conclure sans calcul que $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x < 0$.

d) Soit $x \geqslant 0$: $\displaystyle F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g_0(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ selon les calculs déjà faits à la question 2.a).

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$: Une intégration par parties dans $F_k(x) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g_k(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{k!}\int_0^x \dfrac{\big(\ln(1+t)\big)^k}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ en tout point semblable à celle déjà réalisée à la question 2.c), avec $k-1$ à la place de n (et donc k à la place de $n+1$) donne :

$$F_k(x) = \frac{1}{k!}\Big[-\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)\mathrm{d}t\Big] = -\frac{1}{k!}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)\mathrm{d}t$$

Soit : $\quad F_k(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x} + F_{k-1}(x) \iff F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x}$.

f) Par sommation de cette relation lorsque k varie de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x} \iff F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$$

Soit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant 0,\ F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$.

g) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé : si $x < 0$, alors $F_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x}e^{\ln(1+x)} = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0$. On a en effet reconnu une série exponentielle convergente.

h) Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$. Mais comme la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ n'est certainement pas la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, on doit en conclure que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1+X_n)$.

a) La variable aléatoire X_n est, d'après sa fonction de répartition, à valeurs positives. Donc presque sûrement, $1 + X_n \geqslant 1$, ce qui garantit la bonne définition de $Y_n = \ln(1+X_n)$.
L'équivalence : $\quad 1 + X_n \geqslant 1 \iff \ln(1+X_n) \geqslant 0$ assure que $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$.

b) On utilise ici le théorème de transfert pour l'étude de l'espérance de $Y_n = \ln(1+X_n)$, qui est l'image par une fonction continue de X_n :

$E(Y_n)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+x).f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto \ln(1+x).f_n(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive (les deux facteurs le sont) sur $[0, +\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

On reconnaît ici l'intégrale I_{n+1} dont on sait qu'elle converge ; on peut donc conclure que Y_n admet une espérance, qui vaut :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n!}I_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

c) De même : Y_n admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, donc si $\ln(1+X_n)^2$ admet une espérance.
Cela revient, comme précédemment et toujours d'après le théorème de transfert, à déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\ln(1+x)\big)^2.f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n+2}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ est convergente.
On reconnaît l'intégrale I_{n+2} qui converge, donc Y_n admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(Y_n^2) = \frac{1}{n!}I_{n+2} = (n+1)(n+2)$$

On en déduit que Y_n admet une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2-n-1) = n+1$$

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}\big(\ln(1+X_n) \leqslant x\big) = \mathbb{P}(1+X_n \leqslant e^x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant e^x-1) = F_n(e^x-1)$$

e) On optimise ici la rédaction : la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, tandis que F_n est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

Par composition, $H_n : \ x \mapsto F_n(e^x - 1)$ est donc encore continue sur tout $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, ce qui assure donc que Y_n est une variable aléatoire à densité. Une densité de Y_n (notons-là h_n) est obtenue presque partout par dérivation de la fonction H_n :

Là où c'est possible, d'après la formule de dérivation d'une composée :

$$h_n(x) = H_n'(x) = e^x \times F_n'(e^x-1) = e^x \times f_n(e^x-1) = \begin{cases} e^x \times \dfrac{1}{n!}\dfrac{\big(\ln(1+e^x-1)\big)^n}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^x}{n!} \times \dfrac{x^n}{e^{2x}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} x^n e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f) Lorsque $n = 0$: $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ h_0(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, on reonnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre 1, loi que suit donc Y_0.

D'après le théorème de transfert : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k h_0(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme la fonction $x \mapsto x^k h_0(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k! \int_0^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x = k! \times 1$ puisque h_k est une densité de probabilité nulle en-dehors de $[0, +\infty[$.

On en déduit que Y_0 admet des moments de tous ordres, donnés par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad E(Y_0^k) = k!$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \mathbb{P}\big([X=j]\cap[Y=i]\big)$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi, donc :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j) \quad (\bigstar)$$

$$\text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(Y=i) \quad (\bigstar\bigstar)$$

   Alors, pour tout couple (i,j) de $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) &\overset{(\bigstar)}{=} \mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j) \overset{(\bigstar\bigstar)}{=} \mathbb{P}(Y=i)\times\mathbb{P}(X=j) = \mathbb{P}(X=j)\times\mathbb{P}(Y=i)\\ &\overset{(\bigstar)}{=} \mathbb{P}\big([X=j]\cap[Y=i]\big)\end{aligned}$$

   donc X et Y sont bien échangeables dans ce cas.

2. Soit $i \in \mathbb{N}$; les variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace probabilisé et les événements $\big([Y=j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements, avec lesquels la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=j]\cap[Y=i]\big) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables}\\ \mathbb{P}(X=i) &= \mathbb{P}(Y=i) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales}\end{aligned}$$

   puisque la famille $\big([X=j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ forme également un système complet d'événements.
   Deux variables aléatoires échangeables suivent donc la même loi.

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.

- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. a) Le script suivant est absolument fondamental ! Il ne faut avoir aucune hésitation lorsqu'il s'agit de simuler un événement de probabilité $\dfrac{b}{b+n}$ ou son contraire, à l'aide d'une simulation via la fonction `rand()`, de la loi uniforme à densité sur $]0,1[$:

```
function res = tirage( b , n )
    r = rand()
    if r < b/(b+n) then
        res = 2
    else
        res = 1
    end
endfunction
```

b) Là encore le script est facile à compléter si on prend soigneusement en compte les données de l'énoncé :

```
function [ x , y ] = experience ( b , n , c , variante )
    x = tirage ( b , n )
    if variante == 1 then
        if x == 1 then
            n = n + c
        else
            b = b + c
        end
    elseif variante == 2 then
        if x == 1 then
            b = b + c
        else
            n = n + c
        end
    end
    y = tirage ( b , n )
endfunction
```

c) Le code suivant évalue les fréquences statistiques de chacune des valeurs des lois de X, de Y et du couple (X, Y) : à chaque simulation de l'expérience, les valeurs correspondantes obtenues pour chacune de ces trois variables aléatoires, voient leur effectif augmenté d'une unité. La division finale par `N`, le nombre total d'expériences, donne bien finalement des fréquences d'apparition de chacune des valeurs possibles.

```
function [ loiX, loiY, loiXY ] = estimation(b,n,c,variante,N)
    loiX = [ 0 , 0 ]
    loiY = [ 0 , 0 ]
    loiXY = [ 0 , 0 , 0 , 0 ]
    for k = 1 : N
        [x , y] = experience( b , n , c , variante )
        loiX(x) = loiX(x) + 1
        loiY(y) = loiY(y) + 1
        loiXY(x,y) = loiXY(x,y) + 1
    end
    loiX = loiX / N
```

```
    loiY = loiY / N
    loiXY = loiXY / N
endfunction
```

d) L'échangeabilité pour les deux variables X et Y simulées ici, dans chacune des trois variantes, repose uniquement sur l'égalité : $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big) = \mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$ au vu des univers-image obtenus.

Ainsi, variante par variante :

- **Variante 1 :**

  $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1) \approx 0.66\times 0.66 \approx 0.44$ est significativement différent de $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)\approx 0.50$,
  par contre $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$ sont très proches toutes les deux de 0.167 :

  On peut donc conjecturer que dans cette **Variante 1**, les v.a.r. X et Y **ne sont pas indépendantes**, et **sont échangeables**.

- **Variante 2 :**

  $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1) \approx 0.66\times 0.58 \approx 0.38$ est significativement différent de $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)\approx 0.33$,
  et $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)\approx 0.33$ et $\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)\approx 0.25$ sont aussi significativement différents :

  On peut donc conjecturer que dans cette **Variante 2**, les v.a.r. X et Y **ne sont ni indépendantes, ni échangeables**.

- **Variante 3 :**

  Cette fois $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$ sont très proches toutes les deux de 0.22. Par ailleurs :
  $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1) \approx 0.66\times 0.66 \approx 0.44 \approx \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$,
  $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=2) \approx 0.66\times 0.33 \approx 0.22 \approx \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)$,
  $\mathbb{P}(X=2)\times\mathbb{P}(Y=1) \approx 0.33\times 0.66 \approx 0.22 \approx \mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$,
  $\mathbb{P}(X=2)\times\mathbb{P}(Y=2) \approx 0.33\times 0.33 \approx 0.11 \approx \mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=2]\big)$,
  On peut donc conjecturer que dans cette **Variante 3**, les v.a.r. X et Y **sont indépendantes et échangeables**.

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.

a) Loi de X : $X(\Omega)=\{1,2\}$ et puisque la valeur de X est calculée à partir du premier tirage, on obtient immédiatement :

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{n}{b+n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{b}{b+n}$$

b) Loi du couple (X,Y) : $\big(X,Y\big)(\Omega)=\{1,2\}$ et :

$$\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}_{[X=1]}(Y=1) = \frac{n}{b+n}\times\frac{n+c}{n+b+c} = \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big) = \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}_{[X=1]}(Y=2) = \frac{n}{b+n}\times\frac{b}{n+b+c}$$

$$= \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big) = \mathbb{P}(X=2)\times\mathbb{P}_{[X=2]}(Y=1) = \frac{b}{b+n}\times\frac{n}{n+b+c}$$

$$= \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}$$

$$\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=2]\big) = \mathbb{P}(X=2)\times\mathbb{P}_{[X=2]}(Y=2) = \frac{b}{b+n}\times\frac{b+c}{n+b+c}$$

$$= \frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)}$$

c) La loi de Y est la deuxième loi marginale du couple (X,Y), obtenue directement comme telle via la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $\big([X=1],[X=2]\big)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)+\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)\\ &= \frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}+\frac{nb}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{n(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)}\\ &= \frac{n}{n+b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=2) &= \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)+\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=2]\big)\\ &= \frac{nb}{(n+b)(n+b+c)}+\frac{b(b+c)}{(n+b)(n+b+c)} = \frac{b(n+b+c)}{(n+b)(n+b+c)}\\ &= \frac{b}{n+b}\end{aligned}$$

d) Il est clair, au vu des calculs précédents, que les variables aléatoires X et Y sont échangeables vu que $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=2]\big)=\mathbb{P}\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$, et puisque $i=1$ et $j=2$ sont les seules valeurs de $\{1,2\}$ pour lesquelles $(i,j)\neq(j,i)$.

Par contre : $\quad \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{n^2}{(n+b)^2}\neq\dfrac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)}$ puisqu'on a supposé $c>0$, ce qui suffit pour pouvoir affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes.

N.B. : en toute rigueur, pour le dernier raisonnement il faudrait vraiment examiner pour quelle valeur de c on peut avoir :

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{(n+b)^2}=\frac{n(n+c)}{(n+b)(n+b+c)} &\iff n(n+b+c)=(n+c)(n+b)\\ &\iff n^2+nb+nc=n^2+nc+nb+bc\\ &\iff bc=0\end{aligned}$$

ce qui est bien impossible puisque $b>0$ et $c>0$.