MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2013

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. Pour tout réel x : $R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. On remarque que $r_1 = 1$ est racine évidente de R'. Les relations coefficients-racines[1] du trinôme du second degré, permettent d'en déduire que l'autre racine est $r_2 = 3$.

2. Les règles de signe d'un trinôme permettent d'en déduire le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$R'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
R	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

   Comme R est un polynôme de terme dominant x^3, $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,
   et $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = -\infty$.

3. La fonction R est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

   Sur chacun des intervalles : $]-\infty; 1[$, $[1; 3[$, $[3; +\infty[$, elle est aussi strictement monotone, à chaque fois à valeurs dans un intervalle qui contient 0.

   Le **théorème de la bijection**, appliqué à R sur chacun de ces trois intervalles, garantit à chaque fois l'existence et l'unicité d'une racine de R leur appartenant.

   Le polynôme R admet donc bien trois racines, qui vérifient : $a < r_1 < b < r_2 < c$.

   Comme de plus, $R(0) = -3 < 0 = R(a)$, on a bien l'inégalité supplémentaire $0 < a$ par stricte croissance de R sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ qui contient ces deux réels.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \end{pmatrix}$.

   Par définition, X_λ est un vecteur propre pour la valeur propre λ si et seulement si :

$$AX_\lambda = \lambda . X_\lambda \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \lambda^3 = 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \iff \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 3 = 0$$

$$\iff R(\lambda) = 0$$

1. *Rappel* : si $ax^2 + bx + c$ est un trinôme qui admet deux racines r_1 et r_2, alors : $\begin{cases} r_1 + r_2 &= -b/a \\ r_1 \times r_2 &= c/a \end{cases}$

5. Les deux questions précédentes permettent donc d'affirmer que les trois racines a, b, c de R, sont valeurs propres *distinctes* de A, de vecteurs propres associés X_a, X_b, X_c respectivement. Comme A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on est dans le cas d'application du *critère suffisant de diagonalisabilité* :

   ⋆ La matrice A n'a pas d'autre valeur propre
   ⋆ A est diagonalisable
   ⋆ (X_a, X_b, X_c) est une base de vecteurs propres pour A.

   On en déduit directement :
   $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

6. Soient M, N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda.M + N) &= A(\lambda.M + N) + (\lambda.M + N)A \\ &= \lambda.AM + AN + \lambda.MA + NA \\ &= \lambda.(AM + MA) + (AN + NA) = \lambda.f(M) + f(N) \end{aligned}$$

   L'application f est donc bien linéaire. C'est même un endomrophisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au vu des formats matriciels en jeu ($\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ f(M) = AM + MA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ f(M) = 0_3 &\iff AM + MA = 0_3 \iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff P^{-1}(PDP^{-1}M + MPDP^{-1})P = P^{-1}0_3P \\ &\iff DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0_3 \\ &\iff DM' + M'D = 0_3 \quad \text{où on a posé } M' = P^{-1}MP \end{aligned}$$

7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$; le calcul matriciel donne :

$$DN + ND = \begin{pmatrix} 2ap & (a+b)q & (a+c)r \\ (a+b)s & 2bt & (b+c)u \\ (a+c)v & (b+c)w & 2cx \end{pmatrix}$$

   Comme a, b, c sont tous les trois strictement positifs :

$$DN + ND = 0_3 \iff p = q = r = s = t = u = v = w = x = 0 \iff N = 0_3$$

8. Le résultat précédent exprime donc que, pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$f(M) = 0_3 \iff DM' + M'D = 0_3 \iff M' = 0_3 \iff M = 0_3$$

   Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_3\}$, et l'endomorphisme f est injectif. Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie (ici 9), l'injectivité est suffisante pour garantir la bijectivité[2] de f. C'est donc un isomorphisme (ou un automorphisme) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Le théorème du rang statue en effet que : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 9 - 0$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f est aussi surjective

Exercice 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}.$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

I. Étude des zéros de φ.

1. Le théorème de croissances comparées donne : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$,

   donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln(x)-1}{x} = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$.
   Graphiquement, cela signifie que la courbe de φ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
2. Lorsque x tend vers $+\infty$,il est pertinent de réécrire l'expression de $\varphi(x)$ sous la forme :

   $$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - \frac{1}{x},\text{ car alors : } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

   De même, pour tout $x > 0$: $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, où :

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ (par croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par somme, } \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

   Ce résultat exprime que la courbe de φ admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique d'axe (Ox).
3. La fonction φ : $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* :\ \varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$
4. Sous cette forme, il est évident que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) > 0$, et donc que la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle.

   $$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ \varphi & & \nearrow & \\ & -\infty & & \end{array}$$

5. La fonction φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]-\infty,+\infty[$ qui contient 0. Le théorème de la bijection assure alors l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

   Par ailleurs : $\varphi(1) = \ln(1) - \dfrac{1}{1} = -1$, et $\varphi(e) = \ln(e) - \dfrac{1}{e} = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ vu que $e > 2$.
   Ainsi, $\varphi(1) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e)$, donc $1 < \alpha < e$ par stricte croissance de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II. Étude d'une suite réelle.

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

1. Démontrons par récurrence sur n, que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > \alpha$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ D'après l'énoncé : $u_0 = e$, et on a $u_0 > \alpha$ d'après la question précédente, où on a d'emblée travaillé avec des inégalités strictes.

   Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors elle est vraie au rang suivant :

   On sait (H.R.) que : $\quad u_n$ existe et $u_n > \alpha$, donc $u_n \in \mathcal{D}_\varphi$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$ est bien défini.
   De plus :
   $u_n > \alpha \Longrightarrow \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0$ par stricte croissance de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc :
   $\varphi(u_n) + u_n > u_n > \alpha$, ce qui implique bien : $u_{n+1} > \alpha$,
   et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée à $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Si la suite était convergente de limite L, alors :
   $\star$ Cette limite vérifierait : $\quad L \geqslant \alpha$.
   $\star$ La continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ impliquerait, par passage à la limite dans la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$, que le réel L serait solution de l'équation : $\quad L = \varphi(L) + L$.
   Comme : $\quad L = \varphi(L) + L \iff \varphi(L) = 0$, équation dont on a vu que l'unique solution est α, cette valeur est la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > 0$ puisqu'on peut maintenant dire que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0$ toujours par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien strictement croissante.

4. La suite croissante (u_n) est minorée par son premier terme $u_0 = e$ et a pour seule limite possible $L = \alpha$.

   Comme $\alpha < u_0 = e$, il est impossible que la suite converge.

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Mais comme elle est croissante, elle diverge donc vers $+\infty$, d'après le théorème de limite monotone.

5. Soit A un réel. Il est logique, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, de chercher le premier rang n tel que $u_n \geqslant A$:

```
function y = phi(x)
    y = (x*log(x)-1)/x
endfunction

A = input("Donner un réel strictement positif : ")
u = exp(1)
n = 0
while u < A
    u = phi(u)+u
    n = n+1
end
disp("Le premier rang n cherché est "+string(n))
```

III. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

1. Les fonctions coordonnées $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $]0,+\infty[^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Les fonctions $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et exp est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, quotient et somme de fonctions de classe C^2, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$.
2. Pour tout couple $(x,y)\in]0,+\infty[^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = -\frac{2}{x^3}+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right),\ \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = -\frac{1}{x}+y$$

   Les points critiques de f sont les solutions sur $]0,+\infty[^2$ du système d'équations :

$$\begin{cases}\partial_1(f)(x,y) &= 0\\ \partial_2(f)(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) &= 0\\ -\dfrac{1}{x}+y &= 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) &= 0\\ y &= \dfrac{1}{x}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) &= \dfrac{1}{x}\\ y &= \dfrac{1}{x}\end{cases} \iff \begin{cases}-\dfrac{1}{x} &= -\ln(x)\\ y &= \dfrac{1}{x}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\ln(x)-\dfrac{1}{x} &= 0\\ y &= \dfrac{1}{x}\end{cases} \iff \begin{cases}\varphi(x) &= 0\\ y &= \dfrac{1}{x}\end{cases} \iff \begin{cases}x &= \alpha\\ y &= \dfrac{1}{\alpha}\end{cases}$$

   Ainsi, f admet pour unique point critique $A=\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$, seul point de l'ouvert $]0,+\infty[^2$ en lequel f est susceptible d'admettre un extrémum local.
3. Pour tout couple $(x,y)\in]0,+\infty[^2$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{6}{x^4}-\frac{2y}{x^3}-\frac{2}{x^3}.\exp\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^4}.\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x^4}-\frac{2y}{x^3}+\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right).\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=1,\ \text{ et } \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\frac{1}{x^2}=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

   (Le théorème de Schwarz appliqué à la fonction f de classe C^2 sur $]0,+\infty[^2$, assure l'égalité des dérivées croisées).

   Au point critique $(\alpha,\dfrac{1}{\alpha})$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(\alpha,\frac{1}{\alpha}) = \frac{6}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^4}+\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\right).\exp(-\frac{1}{\alpha}) = \frac{4}{\alpha^4}+\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\right).\frac{1}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^4}+\frac{1}{\alpha^5}-\frac{2}{\alpha^4} = \frac{2\alpha+1}{\alpha^5}$$

4. Au vu des calculs précédents, la hessienne de f au seul point critique A est :

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5} & \dfrac{1}{\alpha^2}\\ \dfrac{1}{\alpha^2} & 1\end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et possède par conséquent deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes ou confondues, valeurs du réel λ telles que $H - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5} - \lambda & \dfrac{1}{\alpha^2} \\ \dfrac{1}{\alpha^2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible, ce qui est le cas si et seulement si :

$$(\frac{2\alpha+1}{\alpha^5} - \lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{\alpha^2}.\frac{1}{\alpha^2} = 0 \iff \lambda^2 - (\frac{2\alpha+1}{\alpha^5} + 1).\lambda + \frac{\alpha+1}{\alpha^5} = 0$$

Equation du second degré qui peut donc se réécrire :

$$(\lambda - \lambda_1).(\lambda - \lambda_2) = 0 \iff \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2).\lambda + \lambda_1.\lambda_2 = 0$$

L'identification des coefficients donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 \times \lambda_2 & = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^5} > 0, \text{ donc } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont de même signe} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5} + 1 > 0, \text{ donc } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont toutes deux strictement positives} \end{cases}$$

On peut donc en conclure que f admet un minimum relatif en A sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$.

Exercice 3

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages sucessifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

I. Étude d'un cas particulier $b = n = 2$.

L'urne contient donc au départ, 4 boules dont 2 blanches.

1. On introduit les événements usuels : $B_i =$ « le i-ième tirage donne une boule blanche, et $N_i = \overline{B_i}$:
   $[X = 0] = B_1$, donc $P([X = 0]) = P(B_1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   $[X = 1] = N_1 \cap B_2$, donc $P([X = 1]) = P(N_1).P_{N_1}(B_2) = \dfrac{2}{4}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.
   $[X = 2] = N_1 \cap N_2 \cap B_3$, donc $P([X = 2]) = P(N_1).P_{N_1}(N_2).P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \dfrac{2}{4}.\dfrac{1}{3}.1 = \dfrac{1}{6}$.
   On a bien : $P([X = 0]) + P([X = 1]) + P([X = 2]) = 1$.
2. X est une v.a.r. finie, donc elle admet une espérance et une variance qui valent :
   $E(X) = 0.P([X = 0]) + 1.P([X = 1]) + 2.P([X = 2]) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3}$,
   $E(X^2) = 0^2.P([X = 0]) + 1^2.P([X = 1]) + 2^2.P([X = 2]) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{6} = 1$, donc
   $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$, d'après la formule de Koenig-Huygens.

3. Le nombre de tirages que fera B, dépend des résultats obtenus par A : $P([Y=0])$ se calcule par la formule des probabilités totales!
On utilise le système complet d'événements $([X=0],\ [X=1],\ [X=2])$ associé à X :

$$\begin{aligned}P([Y=0]) &= P([X=0]).P_{[X=0]}(Y=0)+P([X=1]).P_{[X=1]}(Y=0)+P([X=2]).P_{[X=2]}(Y=0)\\ &= \frac{1}{2}.P_{2N,1B\text{ds l'urne}}(Y=0)+\frac{1}{3}.P_{1N,1B\text{ ds l'urne}}(Y=0)+\frac{1}{6}.P_{1B\text{ ds l'urne}}(Y=0)\\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Soit $i\in\mathbb{N}^*$:
$P([X=0]\cap[Y=i])=P([X=0]).P_{[X=0]}.([Y=i])$.
Si $[X=0]$ est réalisé, B effectue des tirages successifs et indépendants (car avec remise) dans une urne qui contient 1 boule Blanche et 2 boules Noires.
$[Y=i]$ est alors réalisé si et seulement si le joueur B obtient i boules noires, puis une boule blanche au $i+1$-ième tirage :
$P_{[X=0]}(Y=i)=\left(\frac{2}{3}\right)^i.\frac{1}{3}$, donc $P([X=0]\cap[Y=i])=\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^i.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\left(\frac{2}{3}\right)^i$.
De même, si $[X=1]$ est réalisé, le joueur B effectue des tirages avec remise dans une urne qui contient 1 boule Noire et 1 boule Blanche :
$P_{[X=1]}(Y=i)=\left(\frac{1}{2}\right)^i.\frac{1}{2}$, et $P([X=1]\cap[Y=i])=P([X=1]).P_{[X=1]}(Y=i)=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$.
Si $[X=2]$ est réalisé, la situation est assez simple : il ne reste qu'une boule blanche dans l'urne, et aucune Noire! Donc : $P([X=2]\cap[Y=i])=0$ pour tout $i\geqslant 1$.

5. La formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements associés à X, donne :

$$\begin{aligned}\forall i\in\mathbb{N}^*,\ P([Y=i]) &= P([X=0]\cap[Y=i])+P([X=1]\cap[Y=i])+P([X=2]\cap[Y=i])\\ &= \frac{1}{6}.\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\boxed{=\frac{1}{6}.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]}\end{aligned}$$

Et on rappelle que $P([Y=0])=\frac{1}{2}$: il est alors assez clair que la formule générale n'est pas vraie pour $i=0$.
On le prend en compte dans le calcul :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}P([Y=i]) &= P([Y=0])+\sum_{i=1}^{+\infty}P([Y=i])=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1}+\frac{1}{6}.\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\frac{2}{3}.\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j+\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\frac{2}{3}.\frac{1}{1-2/3}+\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1-1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\frac{2}{3}.3+\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\end{aligned}$$

6. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{i\geqslant 0}i.P([Y=i])$ est absolument convergente.
C'est une série à termes positifs : il suffit donc d'étudier la convergence simple.

$$\sum_{i=0}^{n}i.P([Y=i])=0.\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.\sum_{i=1}^{n}i.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]=\frac{1}{6}.\frac{2}{3}.\sum_{i=1}^{n}i.\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{6}.\sum_{i=1}^{n}i.\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées, convergentes puisque leurs raisons respectives appartiennent toutes deux à $]-1;1[$. Donc, Y admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i.P([Y=i]) = \frac{1}{9}.\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12}.\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{9}.\frac{1}{(1-2/3)^2} + \frac{1}{12}.\frac{1}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{9}.9 + \frac{1}{12}.4 = 1 + \frac{1}{3} \boxed{= \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

II. Retour au cas général.

1. D'abord, on a bien $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
Pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n\}$: $[X=k] = N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap B_{k+1}$ (la valeur de X est connue lorsqu'on a eu la première boule blanche !), et d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(N_1).P_{N_1}(N_2).\cdots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k).P_{N_1\cap\cdots\cap N_k}(B_{k+1}) \\ &= \frac{n}{n+b} \times \frac{n-1}{n-1+b} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+b} \times \frac{b}{n-k+b} \end{aligned}$$

Les probabilités conditionnelles successivces donnent à chaque fois le nombre de boules noires restantes dans l'urne, avant un nouveau tirage. On peut réécrire cette probabilité à l'aide de factorielles :

$$P([X=k]) = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{\dfrac{(n+b)!}{(n+b-k-1)!}}.b = \frac{n!(n-k+b-1)!}{(n+b)!(n-k)!}$$

On peut facilement faire apparaître des coefficients binomiaux en multipliant par la quantité adéquate le numérateur et le dénominateur de la fraction (ici par $(b-1)!$).

Plus simplement, on compare ce résultat à la forme donnée par l'énoncé !

$$\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{\dfrac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!}}{\dfrac{(n+b)!}{n!b!}} = \frac{(n-k+b-1)!n!b!}{(b-1)!(n-k)!(n+b)!} = \frac{n!(n-k+b-1)!.b}{(n-k)!(n+b)!}$$

après simplification par $(b-1)!$, ce qui est bien $P([X=k])$.

2. Vu que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P([X=k]) = 1 &\iff \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = 1 \iff \frac{1}{\binom{n+b}{b}}.\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = 1 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b} \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur ne dépend pas de l'indice k. Pour obtenir exactement la forme demandée par l'énoncé, il faut enfin réaliser le changement d'indice : $j = n-k$, qui a la particularité d'**inverser l'ordre des termes** dans la somme, puisqu'en effet :
quand k varie de 0 à n, $j = n-k$ varie de $n-0 = n$ à $n-n = 0$ (en décroissant).

Au final, on obtient bien : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.

Remarque : l'énoncé original ne fait pas intervenir un nouvel indice j dans la question (il reprend l'indice k), rendant plus difficile à repérer le changement d'indice nécessaire...

3. Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$.
$k\binom{k+a}{a} = k.\dfrac{(k+a)!}{k!a!} = \dfrac{(k+a)!}{(k-1)!a!}$, et $(a+1)\binom{k+a}{a+1} = (a+1).\dfrac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!} = \dfrac{(k+a)!}{a!(k-1)!}$,
c'est-à-dire que : $\quad k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{k+a}{a+1}$.
On a alors : $\quad \displaystyle\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=1}^{N}(a+1)\binom{k+a}{a+1} \overset{[i=k-1]}{=} (a+1)\sum_{i=0}^{N-1}\binom{i+a+1}{a+1}$.

4. La variable aléatoire X étant d'univers-image fini, $n-X$ admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$E(n-X) = \sum_{k=0}^{n}(n-k).P([X=k]) = \frac{1}{\binom{n+b}{b}}.\sum_{k=0}^{n}(n-k).\binom{n-k+b-1}{b-1}.$$

Pour se ramener aux sommes obtenues dans les questions précédentes, il est à nouveau nécessaire de réaliser le changement d'indice : $j = n-k$ (c'est bien pour cela qu'on demandait de calculer $E(n-X)$ et non pas directement $E(X)$) :

$$E(n-X) = \frac{1}{\binom{n+b}{b}}.\sum_{k=0}^{n} k\binom{k+b-1}{b-1} = \frac{b}{\binom{n+b}{b}}.\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j+b}{b},$$

d'après le résultat précédent avec $a = b-1$.
La relation obtenue au 2. permet aussi d'écrire (avec $N = n-1$, et $a = b$) :

$$E(n-X) = \frac{b}{\binom{n+b}{b}}.\binom{n-1+b+1}{b+1} = \frac{b\binom{n+b}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{b.\dfrac{(n+b)!}{(b+1)!(n-1)!}}{\dfrac{(n+b)!}{n!b!}} = \frac{b.(n+b)!n!b!}{(b+1)!(n-1)!(n+b)!} \boxed{= \frac{bn}{b+1}}$$

Mais par linéarité de l'espérance :

$$E(n-X) = n - E(X) \iff \frac{bn}{b+1} = n - E(X) \iff E(X) = n - \frac{bn}{b+1}\boxed{= \frac{n}{b+1}}.$$

5. Pour tout entier $k \in X(\Omega) = [\![0;n]\!]$: si $[X=k]$ est réalisé, le joueur A a donc retiré k boules noires et une boule blanche de l'urne. Celle-ci contient donc, au moment où le joueur B commence ses tirages avec remise : $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches.
En notant $B'_j =$ « Le j-ième tirage de B donne une blanche » et $N'_j = \overline{B'_j}$, on a donc :

$$\begin{aligned} P_{[X=k]}([Y=i]) &= P_{[X=k]}(N'_1 \cap \cdots \cap N'_i \cap B'_{i+1}) = P_{[X=k]}(N'_1)\ldots P_{[X=k]}(N'_i).P_{[X=k]}(B'_{i+1}) \\ &= \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i.\frac{b-1}{n-k+b-1} \end{aligned}$$

(Les tirages du joueur B sont indépendants mutuellement les uns des autres)

et : $\quad P([X=k] \cap [Y=i]) = P(X=k) \times P_{[X=k]}(Y=i) = P(X=k) \times \left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i.\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$
d'après la formule des probabilités composées.

Il y a un cas particulier, bien pris en compte dans cette formule générale : si $[X=n]$ est réalisé, il n'y a plus de boule noire dans l'urne, et Y prend forcément la valeur 0 : dans ce cas, on voit bien que $P_{[X=n]}([Y=i]) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ (et on a alors $P_{[X=n]}([Y=0]) = 1$).

Pour obtenir $P([Y=i])$ sans conditionnement, on utilise alors très classiquement et une fois de plus, la *formule des probabilités totales*, avec le système complet $([X=k])_{0\leqslant k\leqslant n}$:

$$\forall i\in N^*,\ P([Y=i])=\sum_{k=0}^{n}P([X=k]).P_{[X=k]}([Y=i])=\sum_{k=0}^{n-1}P([X=k]).\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i.\frac{b-1}{n-k+b-1}$$

En prenant en compte la remarque précédente, qui dit que le terme pour $k=n$ est nul.

6. Pour tout $k\in X(\Omega)=[\![0;n]\!]$:
$\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}$ est, k étant ici fixé, une série géométrique dérivée de raison $\frac{n-k}{n-k+b-1}$ qui appartient à $]0;1[$ puisque : $0<n-k<n-k+b-1$.
C'est donc bien une série convergente, avec :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^2}=\left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^2.$$

7. Vu que $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{i\geqslant 0} i.P([Y=i])$ est absolument convergente. C'est une série à terme positifs : il suffit d'étudier la convergence simple, et on remarque aussi que le terme pour $i=0$ est nul.
Sous réserve de convergence, on a alors :

$$\begin{aligned}
E(Y)&=\sum_{i=1}^{+\infty} i.P([Y=i])=\sum_{i=1}^{+\infty} i.\sum_{k=0}^{n-1}P([X=k]).\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i.\frac{b-1}{n-k+b-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{+\infty} i.P([X=k]).\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i.\frac{b-1}{n-k+b-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}P([X=k]).\frac{b-1}{n-k+b-1}.\frac{n-k}{n-k+b-1}\sum_{i=1}^{+\infty} i.\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}P([X=k]).\frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2}.\frac{(n-k+b-1)^2}{(b-1)^2}\\
&=\frac{1}{b-1}.\sum_{k=0}^{n-1}(n-k).P(X=k)
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière ligne une somme déjà calculée... le terme pour $k=n$ étant absent de la somme car en fait nul, c'est $E(n-X)=\frac{bn}{b+1}$ d'après la question 4.! Ainsi :

$$E(Y)=\frac{1}{b-1}.E(n-X)=\frac{1}{b-1}.\frac{bn}{b+1}\boxed{=\frac{bn}{b^2-1}}$$