MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2011

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice **nilpotente** s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.
Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est un matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \quad \text{et} \quad A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est bien sûr évident que $N + \Delta = A$! De plus, puisque Δ est la matrice identité d'ordre 2 : $\Delta N = N = N\Delta$.

Et enfin, $N^2 = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = 0_2$, donc N est bien nilpotente d'ordre 2.

Le couple (Δ, N) est donc bien une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda.I_3$ est non-inversible. On échelonne donc $A - \lambda.I_3$:

$$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda(3-\lambda) & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice, la réduite de Gauss de $A - \lambda.I_3$, est maintenant échelonnée : elle est non-inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Les valeurs propres de A sont donc solutions des équations :

$$1 - \lambda = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{et} \quad 2 - \lambda(3-\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Le réel $\lambda_1 = 1$ est racine évidente de l'équation du second degré, et d'après les relations coefficients-racines du trinôme, l'autre racine λ_2 vérifie : $\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \iff \lambda = 2$.

Bilan :

$$\text{Sp}(A) = \{1, 2\}.$$

b) On doit calculer les sous-espaces propres de A pour savoir si la matrice est diagonalisable :

- Pour $\lambda_1 = 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = 1.X \iff (A - I_3)X = 0_{3,1}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on peut reprendre la réduite de Gauss de $A - 1.I_3$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \begin{cases} -2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff y = -2x$$

Ainsi : $\quad E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

$E_1(A)$ est engendré par un vecteur non nul, qui en forme donc une base, et $\dim E_1(A) = 1$.

- Pour $\lambda_2 = 2$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = 2.X \iff (A - 2.I_3)X = 0_{3,1}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & -z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff y = -x$$

Ainsi : $\quad E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

$E_2(A)$ est engendré par un vecteur non nul, qui en forme donc une base, et $\dim E_2(A) = 1$.

Finalement : $\quad \dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 2 < 3$; comme ce sont les seules valeurs propres de A, on peut donc conclure que A n'est **pas** diagonalisable.

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Les produits matriciels donnent :

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est donc intéressant de remarquer ici que : $\quad \Delta X_1 = 2.X_1,\ \Delta X_2 = X_2$, et $\Delta X_3 = X_3$.

b) Des calculs précédents on déduit que :

- X_1 qui est non nul, est un vecteur propre de Δ pour la valeur propre 2, et $\dim E_2(\Delta) \geqslant 1$.

- X_2 et X_3, qui sont non nuls, sont vecteurs propres de Δ pour la valeur propre 1. Comme ils sont clairement non colinéaires, ils forment une famille libre et par conséquent, $\dim E_1(\Delta) \geqslant 2$.

On en déduit que : $\quad \dim E_2(\Delta) + \dim E_1(\Delta) \geqslant 3$. Or d'après le théorème spectral, on a aussi : $\dim E_2(\Delta) + \dim E_1(\Delta) \leqslant 3$ ce qui permet de conclure que :

- Δ n'a pas d'autre valeurs propres que 1 et 2.

- $\dim E_2(\Delta) = 1$, $\dim E_1(\Delta) = 2$ et $\dim E_1(\Delta) + \dim E_2(\Delta) = 3$ donc Δ est bien diagonalisable et (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour Δ :

  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage inversible telle que : $\quad P^{-1}\Delta P = D$.

c) Pour tout $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on résout le système $PX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$PX = Y \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & a \\ -x & & & & -2z & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & a \\ & & & & -z & = & a+b \\ & & y & & & = & c \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = a - z = 2a + b \\ y = c \\ z = -a - b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

4. a) Le produit matriciel donne directement $N^2 = 0_3$, donc N est nilpotente.

b) Il est clair au vu de la définition des matrices, que $A = N + \Delta$, et on a bien :

N est nilpotente, Δ est diagonalisable.

Il n'y a plus qu'à vérifier que N et Δ commutent :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & -3+2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0-1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+2 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \Delta N$, donc (Δ, N) est bien une décomposition de Dunford de la matrice A.

c) Les matrices Δ et N commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de la matrice $A = N + \Delta$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (N + \Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}$$

Puisque $N^2 = 0_3$, tous les termes de la somme d'indices $k \geqslant 2$ sont nuls ; il reste :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + n.N\Delta^{n-1}$$

d) Il faut remarquer que le calcul explicite de la question 4.b) a donné : $\Delta N = N$, ce qui permet d'initier la démonstration par récurrence du fait que $\mathcal{P}(k)$: "$\Delta^k N = N$", est vrai pour tout $k \geqslant 1$:

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 1$: $\Delta N = N$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie :

$\Delta^{k+1} N = \Delta \times \Delta^k N \overset{H.R.}{=} \Delta N = N$, donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \geqslant 1$, d'après le principe de récurrence.

Remarquons que la propriété est encore vraie pour $k = 0$.

e) Puisque N et Δ commutent, alors $N\Delta^{n-1} = \Delta^{n-1} N = N$ d'après la récurrence précédente. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \Delta^n + n.N$$

où : $n.N$ est nilpotente puisque N l'est ; Δ^n et $n.N$ commutent puisque c'est le cas de N et Δ ; $\Delta^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ d'après une récurrence classique, où D^n est diagonale comme puissance d'une matrice diagonale, ce qui prouve que Δ^n est diagonalisable puisqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

On en déduit que le couple $\big(\Delta^n, n.N\big)$ est une décomposition de Dunford de A^n.

Exercice 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \varphi(x) & = 1 - x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ \varphi(0) & = 1 \end{cases}$,

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y).$$

Partie I. Étude des zéros de φ

1. Par opérations sur les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \ln(x), \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2\ln(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$$

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{1}{x} - x\ln(x)$, où : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - x\ln(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$.

L'interprétation graphique de cette limite n'est plus au programme depuis 2013 : on dit que la courbe de φ admet une *branche parabolique de direction* (Oy), car $\varphi(x)$ tend vers l'infini "infiniment plus vite" que x.

2. D'abord, les théorèmes généraux prouvent que la fonction φ est continue sur $]0; +\infty[$, en tant que somme et produit de fonctions qui le sont. Reste donc à étudier la continuité en 0.

Les croissances comparées en zéro donnent : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2\ln(x) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} 1 - x^2\ln(x) = 1 - 0 = 1$, soit : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$, donc φ est bien continue en 0, et finalement sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

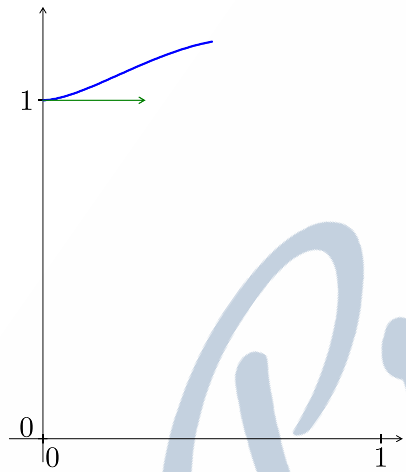
3. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions qui le sont, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = 0 - \big(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\big) = -x(2\ln(x) + 1)$$

4. Le taux d'accroissement de la fonction φ en zéro est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \frac{-x^2\ln(x)}{x} = -x\ln(x)$$

Toujours d'après les croissances comparées en zéro : $\lim\limits_{x\to 0^+} -x\ln(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$, ce qui prouve que la fonction φ est dérivable en zéro, avec $\varphi'(0) = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe de φ admet une demi-tangente horizontale au voisinage de 0, d'équation $y = 1$, d'où l'allure de la courbe au voisinage de 0 :



5. Les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ dépendent du signe de la dérivée φ' ; on résout l'inéquation :

$$-x(2\ln(x)+1) > 0 \iff 2\ln(x)+1 < 0 \iff \ln(x) < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-1/2}$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$ pour la dernière équivalence. On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
φ	1	$\nearrow$	$1+e^{-1}/2$	$\searrow$	$-\infty$

6. Sur l'intervalle $[0, e^{-1/2}]$, la fonction φ est continue et strictement croissante, de minimum $\varphi(0) = 1$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Sur $[e^{-1/2}; +\infty[$, la fonction φ est continue, strictement décroissante, à valeurs dans $]-\infty; 1+e^{-1}/2]$ qui contient 0 puisque $1+e^{-1}/2 > 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $[e^{-1/2}; +\infty[$, et c'est en fait la seule sur le domaine de φ.

Plus précisément : $e^{-1/2} < 1\sqrt{2} < 2$ et $\varphi(\sqrt{2}) = 1-(\sqrt{2})^2\ln(\sqrt{2}) = 1 - 2.\dfrac{1}{2}\ln(2) = 1-\ln(2) > 0$, et $\varphi(2) = 1-4\ln(2) \approx -1.8 < 0$, donc :

$$\varphi(\sqrt{2}) > \varphi(\alpha) > \varphi(2) \iff \sqrt{2} < \alpha < 2$$

par stricte décroissance de φ sur $[e^{-1/2}; +\infty[$ qui contient $\sqrt{2}, \alpha$ et 2.

7. L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x$ est faussement impropre en 0 puisque φ résulte en fait d'un prolongement par continuité en ce point. Pour la calculer, on commence par poser $\varepsilon > 0$ proche de 0, et dans $\displaystyle\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = (\alpha - \varepsilon) - \int_\varepsilon^\alpha x^2\ln(x)\mathrm{d}x$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lll} u(x) = \ln(x) & \longrightarrow & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & \longrightarrow & v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\alpha x^2\ln(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_\varepsilon^\alpha - \frac{1}{3}\int_\varepsilon^\alpha x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\alpha^3\ln(\alpha) - \frac{1}{3}\varepsilon^3\ln(\varepsilon) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\varepsilon^\alpha \\ &= \frac{1}{3}\alpha^3\ln(\alpha) - \frac{1}{3}\varepsilon^3\ln(\varepsilon) - \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{1}{9}\varepsilon^3 \end{aligned}$$

D'où : $\displaystyle\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = (\alpha - \varepsilon) - \frac{1}{3}\alpha^3\ln(\alpha) + \frac{1}{3}\varepsilon^3\ln(\varepsilon) + \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{1}{9}\varepsilon^3.$

Lorsque ε tend vers 0^+ : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^3\ln(\varepsilon) = 0$ par croissances comparées, donc :

$$I = \int_0^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \alpha - \frac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) + \frac{\alpha^3}{9}$$

Or le réel α est le seulà vérifier la relation : $\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha^2\ln(\alpha) = 1$, ce qui permet de réécrire :

$$I = \alpha - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{9\alpha - 3\alpha + \alpha^3}{9} = \frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}$$

8. Le programme demandé est bien sûr l'algorithme de dichotomie, qu'il faut savoir retrouver sans aucune indication, appliqué à la fonction φ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 2$ pour bornes de l'intervalle de recherche initial :

```
function y = phi(x)
    y = 1-x^2*log(x)
endfunction

a=sqrt(2); b = 2;
while b-a > 1e-5
    m = (a+b)/2
    if phi(a) * phi(m) > 0 then
        a = m
    else
        b = m
    end
end
disp((a+b)/2)
```

Traditionnellement, on affiche en fait les dernières valeurs connues de a et b, qui donnent l'encadrement à 10^{-5} près :

$$1.53158 < \alpha < 1.53159$$

le fait d'afficher $\dfrac{a+b}{2} \approx 1.531588$ est en fait une façon d'utiliser une dernière fois le principe de dichotomie pour obtenir une valeur plus proche encore de α (sans qu'on puisse dire cependant si c'est une valeur approchée par défaut ou par excès).

Partie II. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

1. Si on veut tout rédiger parfaitement, il faut écrire que :

   Les deux fonctions coordonnées $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ car polynômiales, à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur lequel la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$.

   Ainsi par composition, produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines respectifs, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. Pour tout couple $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\partial_1(f)(x,y)=y+\frac{\ln(y)}{x}\quad\text{et}\quad\partial_2(f)(x,y)=x+\frac{\ln(x)}{y}$$

   On cherche alors les points critiques de f, solutions du système :

$$\begin{cases}y+\dfrac{\ln(y)}{x} & =0\\ x+\dfrac{\ln(x)}{y} & =0\end{cases}\iff\begin{cases}xy+\ln(y) & =0\\ xy+\ln(x) & =0\end{cases}\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\begin{cases}xy+\ln(y) & =0\\ \ln(x)-\ln(y) & =0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}xy+\ln(y)=0\\ \ln(x)=\ln(y)\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+\ln(x) & =0\\ x=y\end{cases}\iff\begin{cases}1+\dfrac{1}{x^2}\ln(x)=0\\ x=y\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\\ x=y\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\alpha\\ x=y\end{cases}\iff x=y=\frac{1}{\alpha}$$

   La fonction f admet bien pour unique point critique, le couple $\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)$.

3. Pour tout couple (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=-\frac{\ln(y)}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2.\left(-\frac{1}{y^2}\ln(y)\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^2.\left(1-\left(1-\frac{1}{y^2}\ln\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(1-\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=-\frac{\ln(x)}{y^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(1-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

   selon les mêmes calculs que précédemment en échangeant les rôles de x et y

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=1+\frac{1}{xy}=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)\qquad\text{(théorème de Schwarz)}$$

4. La Hessienne de f au point de coordonnées $\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)$ est donc : $H=\begin{pmatrix}1 & 1+\alpha^2\\ 1+\alpha^2 & 1\end{pmatrix}$

   Vu que pour $x=y=\dfrac{1}{\alpha}$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=\varphi(\alpha)=0$.

   Les valeurs propres de H sont les réels λ tels que $H-\lambda.I_2$ est non-inversible, ce qui est équivalent pour cette matrice de format 2×2 au fait que :

$$\det(H-\lambda.I_2)=0\iff(1-\lambda)^2-(1+\alpha^2)^2=0\iff(1-\lambda+1+\alpha^2)(1-\lambda-1-\alpha^2)=0$$
$$\iff(2+\alpha^2-\lambda)(-\alpha^2-\lambda)=0$$

   D'après la règle du produit nul, les valeurs propres de H sont donc $2+\alpha^2>0$ et $-\alpha^2<0$.

   Comme elles sont de signes opposés, on peut conclure qu'en ce point critique, la fonction f n'admet pas d'extrémum, mais un point-col (ou point-selle).

Exercice 3

I. Un jeu en ligne

1. Pour positionner les trois jetons, il faut choisir trois cases parmi les neuf disponibles. Bien qu'on parle de placements successifs, comme les jetons ne sont pas discernables ! Donc l'ordre ne compte pas et un placement est une *combinaison* de trois cases parmi neuf.

   L'univers des possibles Ω est donc ici l'ensemble de ces combinaisons,
   et $\text{Card}(\Omega) = \binom{9}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84.$

2. Sans hypothèse supplémentaire sur la façon de placer les jetons, on peut considérer que l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite ; on est donc ramené, pour le calcul des probabilités, à dénombrer les cas favorables aux événements H, V et D.
   Il y a trois combinaisons possibles pour que les trois jetons soient alignés horizontalement (sur les lignes 1, 2 ou 3), donc $\mathbb{P}(H) = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$. De la même façon, $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{28}$.

   Il y a deux dispositions des trois jetons qui les voient alignés en diagonale, donc $\mathbb{P}(D) = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.

3. Quelle que soit la disposition des trois jetons issue de leur placement aléatoire : soit les jetons sont alignés (horizontalement, ou verticalement, ou en diagonale), soit ils ne sont pas alignés.

   En d'autre termes, quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des quatre événements H, V, D, N est réalisé.
   Ceci fait de (H, V, D, N) un *système complet d'événements*, qui a en particulier la propriété :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(N) = 1 \iff \mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(D) \\ &= \frac{84-3-3-2}{84} = \frac{76}{84} = \frac{19}{21} \approx 0,9048\end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

   a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la i-ième relance.
   Comme on se place ici du point de vue de la société, et la loi de Z_i est donc donnée par :

$$Z_i(\Omega) = \{-18; 2\}, \quad \mathbb{P}(Z_i = 2) = \mathbb{P}(N) = \frac{19}{21}, \quad \mathbb{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$$

   et $\mathbb{E}(Z_i) = -18\mathbb{P}(Z_i = -18) + 2\mathbb{P}(Z_i = 2) = -\dfrac{36}{21} + \dfrac{38}{21} = \dfrac{2}{21}$.

   b) La variable aléatoire Z correspondant au gain journalier de la société est : $\quad Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{10000} Z_i$.

   Par linéarité de l'espérance : $\quad \mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{10000} \mathbb{E}(Z_i) = \dfrac{20000}{21} \approx 952.4.$

II. Cas de joueurs invétérés

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

   a) La variable aléatoire X correspond ici au nombre de succès dans la répétition de 100 épreuves de Bernoulli (les parties) de façon identique et indépendante, où la probabilité de succès (pour le joueur !) est $\dfrac{2}{21}$.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $\left(100, \frac{2}{21}\right)$.

   b) D'après le cours sur la loi binomiale :

$$\mathbb{E}(Z) = 100 \times \frac{2}{21} = \frac{200}{21} \quad \text{et} \quad V(Z) = 100 \times \frac{2}{21} \times \frac{19}{21} = \frac{3800}{441}$$

c) La variable aléatoire T représentant la perte du joueur, est liée au nombre aléatoire X de parties gagnées, par la relation :

$$T = 18X + (-2).(100 - X) = 20X - 200$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le joueur perde les n premières parties se déroulant de façon indépendante, est égale à $\left(\frac{19}{21}\right)^n$.

L'événement contraire : "gagner au moins une partie parmi les n premières", est donc de probabilité $1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n$.

On cherche donc le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geqslant \frac{1}{2} \iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n \geqslant \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)}$$

puisque $\ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0$. Les valeurs approchées données par l'énoncé permettent alors de conclure qu'il faut jouer au moins 7 parties pour qu'il y ait plus de chances de gagner au moins une fois, que le contraire.

3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.

a) On reconnaît ici en Y le temps d'attente d'un premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et sans mémoire, de probabilité de succès $\frac{2}{21}$.
La variable aléatoire Y suit donc la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{21}$:

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{19}{21}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{21}$$

b) D'après le cours sur la loi géométrique : $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = \frac{21}{2}$ et $V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{19}{21} \times \frac{21^2}{2^2} = \frac{399}{4}$.

c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois est :

$$p_k = \mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

Puisque l'événement $[Y > k]$ est réalisé si et seulement si les k premières parties sont perdues.

III. Contrôle de la qualité du jeu

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placées au hasard dans les cases restantes.
On note Δ l'événement : *« La fonction aléatoire est déréglée »*, et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0; 1[$.

1. Sachant que Δ est réalisé : seuls deux jetons sont placés au hasard parmi 8 cases disponibles, et il y a alors $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ dispositions possibles pour ces deux jetons.

Mais toujours sous ce conditionnement : il n'y a plus qu'une seule disposition des deux jetons qui réalise H : c'est qu'on les place en $(B, 1)$ et $(C, 1)$, et ils sont indiscernables !

Donc : $\mathbb{P}_\Delta(H) = \frac{1}{28}$.

De même, sachant que Δ est réalisé :
V est réalisé ssi les deux autres jetons sont placés en $(A, 2)$ et $(A, 3)$, et D est réalisé ssi les deux jetons sont placés en $(B, 2)$ et $(C, 3)$. Donc : $\mathbb{P}_\Delta(V) = \mathbb{P}_\Delta(D) = \frac{1}{28}$.

2. La famille $(\Delta, \overline{\Delta})$ est toujours un système complet d'événements, puisque ce sont deux événements contraires l'un de l'autre, de probabilités non nulles.
Donc, d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(\Delta) \times \mathbb{P}_\Delta(N) + \mathbb{P}(\overline{\Delta}) \times \mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N)$, où :
$\mathbb{P}_\Delta(N) = 1 - \mathbb{P}_\Delta(H) - \mathbb{P}_\Delta(V) - \mathbb{P}_\Delta(D) = 1 - 3 \times \dfrac{1}{28} = \dfrac{25}{28}$, selon le même raisonnement qu'à la question 3. de la partie I. (puisque seule la probabilité utilisée a changé !).
D'ailleurs : $\mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$ puisque si Δ n'est pas réalisé, tout se passe dans les conditions de la partie I. !
Comme $\mathbb{P}(\overline{\Delta}) = 1 - \mathbb{P}(\Delta)$, on obtient :
$$\mathbb{P}(N) = x.\frac{25}{28} + (1-x).\frac{19}{21} = x.\left[\frac{25}{28} - \frac{19}{21}\right] + \frac{19}{21} = x.\frac{25 \times 3 - 19 \times 4}{3 \times 4 \times 7} + \frac{19}{21} = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}, CQFD...$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. La loi de G est toujours aussi simple :
$$G(\Omega) = \{-18, 2\}, \quad \mathbb{P}(G = 2) = \mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}, \ \mathbb{P}(G = -18) = \mathbb{P}(\overline{N}) = \frac{2}{21} + \frac{x}{84}$$
L'espérance de gain est alors :
$$\mathbb{E}(G) = 2\mathbb{P}(G = 2) - 18\mathbb{P}(G = -18) = -\frac{x}{42} + \frac{38}{21} - \frac{36}{21} - \frac{9x}{42} = \frac{2}{21} - \frac{10x}{42} = \frac{2 - 5x}{21}$$
et on veut que : $\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \iff 2 - 5x \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{2}{5}$.

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés, on souhaite donc calculer $\mathbb{P}_{\overline{N}}(\Delta)$.
C'est le cas typique d'utilisation de la *formule de Bayes* puisqu'on connaît le résultat, et qu'on cherche à évaluer la probabilité d'une des causes : on commence pour cela, par écrire :
$$\mathbb{P}_{\overline{N}}(\Delta) = \frac{\mathbb{P}(\overline{N} \cap \Delta)}{\mathbb{P}(\overline{N})} = \frac{\mathbb{P}(\Delta) \times \mathbb{P}_\Delta(\overline{N})}{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{N}})} = \frac{x.\dfrac{3}{28}}{1 - \mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{3x}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{8 + x}$$
après multiplication du numérateur et du dénominateur par 84...