MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2001

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I

Le but de cette première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Soient a et b deux réels quelconques :
$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-2a)(1-2b)+2ab & (1-2a)b+a(1-2b)+ab & (1-2a)b+ab+a(1-2b) \\ a(1-2b)+(1-2a)b+ab & 2ab+(1-2a)(1-2b) & ab+(1-2a)b+a(1-2b) \\ a(1-2b)+ab+(1-2a)b & ab+a(1-2b)+(1-2a)b & 2ab+(1-2a)(1-2b) \end{pmatrix}.$$
Or : $\quad a(1-2b)+ab+(1-2a)b = a+b-3ab$
et $(1-2a)(1-2b)+2ab = 1-2(a+b)+6ab = 1-2(a+b-3ab)$, ce qui donne bien :
$$M(a) \times M(b) = M(a+b-3ab)$$

2. Avec les deux relations ci-dessus : on peut dire que $M(a)$ sera inversible, d'inverse $M(b)$, dès qu'on peut trouver b (dépendant de a) tel que $a+b-3ab=0$, car on aura alors : $M(a)M(b) = M(0) = I_3$, et $M(a)$ sera inversible, d'inverse $M(b)$.
$a+b-3ab=0 \iff b(1-3a) = -a$. Cette équation d'inconnue b admet une solution unique dès que $1-3a \neq 0$, ie $a \neq \dfrac{1}{3}$.

   Une condition *suffisante* sur a pour que a soit inversible est donc : $\boxed{a \neq \dfrac{1}{3}}$.

   Dans ce cas, $\boxed{\left[M(a)\right]^{-1} = M\left(\dfrac{-a}{1-3a}\right)}$.

   Remarque : $M(\frac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas inversible, puisqu'elle a deux colonnes égales.

   La condition $a \neq \dfrac{1}{3}$ est bien *nécessaire* <u>et</u> *suffisante* !

3. La matrice $M(a)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème admis du cours.

4. Pour tout réel a, d'après la question 1. : $[M(a)]^2 = M(a) \times M(a) = M(2a - 3a^2)$.
Étant donné la façon dont $M(a)$ est définie, il est clair que :
$\left[M(a_0)\right]^2 = M(a_0) \iff 2a_0 - 3a_0^2 = a_0 \iff a_0(1-3a_0) = 0$. Comme on veut que a_0 soit non nul, on obtient une unique solution : $\boxed{a_0 = \frac{1}{3}}$.

5. On considère les matrices $P = M(a_0) = M(\frac{1}{3})$, et $Q = I - P$ où I est la matrice *identité* de taille 3 (parfois donc, appelée matrice *unité*).
   a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: par définition de P et Q :
$$P + \alpha.Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \alpha. \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1+2\alpha}{3} \end{pmatrix}$$
   Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque, on a alors :
$$M(a) = P + \alpha.Q \iff \begin{cases} 1 - 2a &= \dfrac{1+2\alpha}{3} \\ \dfrac{1-\alpha}{3} &= a \end{cases} \iff \boxed{\alpha = 1 - 3a}, \quad \text{c'est-à-dire :}$$
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad M(a) = P + (1-3a).Q$$
   b) Les relations précédentes donnent :
$$P^2 = \left[M(a_0)\right]^2 = M(a_0) \iff P^2 = P$$
$$PQ = P(I-P) = P - P^2 = 0_3 = (I-P)P = QP \quad \text{d'après ce qui précède}$$
$$Q^2 = (I-P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P \iff Q^2 = Q$$
   c) Soit $a \in \mathbb{R}$: puisque d'après la question précédente, P et Q commutent, alors on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left[M(a)\right]^n = \left(P + \alpha.Q\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \times (\alpha.Q)^{n-k}$$
$$= P^0 \times (\alpha.Q)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}.P^k Q^{n-k} + P^n \times (\alpha.Q)^0$$
   Or les relations $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ donnent par récurrence immédiate :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P^n = P \quad \text{et} \quad Q^n = Q,$$
   tandis que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, le fait que $k \geqslant 1$ et $n - k \geqslant 1$ implique :
$$P^k Q^{n-k} = PQ = 0_3$$
   Tous les termes de la somme d'indices compris entre 1 et $n-1$ sont donc nuls ! Et il reste :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left[M(a)\right]^n = P + \alpha^n.Q$$
   avec $\alpha = 1 - 3a$: c'est bien une cominaison linéaire de P et Q.
   d) Le calcul explicite de $\left[M(a)\right]^n$ est :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left[M(a)\right]^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha^n & \frac{1}{3}(1-\alpha^n) & \frac{1}{3}(1-\alpha^n) \\ \frac{1}{3}(1-\alpha^n) & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha^n & \frac{1}{3}(1-\alpha^n) \\ \frac{1}{3}(1-\alpha^n) & \frac{1}{3}(1-\alpha^n) & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha^n \end{pmatrix}$$

Partie II : évolution d'un titre boursier au cours du temps

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} p_{n+1} & = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} & = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} & = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

a) Pour calculer une expression explicite des 3 suites, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

Il est alors très clair, d'après les relations de l'énoncé, que matriciellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = M(a) \times X_n$$

relation qui donne, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \left[M(a)\right]^{n-1} \times X_1 = \left(P + (1-3a)^{n-1}.Q\right) \times X_1$$

Les valeurs explicites de p_n, q_n et r_n sont donc données, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\begin{cases} p_n & = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1}\right)p_1 + \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)q_1 + \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)r_1 \\ q_n & = \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)p_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1}\right)q_1 + \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)r_1 \\ r_n & = \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)p_1 + \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)q_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1}\right)r_1 \end{cases}$$

b) La condition $a \in \left]; \frac{2}{3}\right[$ donne : $0 > -3a > -2 \iff 1 > 1-3a > -1$; par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-3a)^{n-1} = 0$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}r_1 = \frac{1}{3}(p_1+q_1+r_1) = \frac{1}{3}$$

On obtient de même : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

2. a) On traduit toutes les données de l'énoncé en termes de probabilités faisant intervenir les événements M_n, S_n, B_n et ceux associés au jour suivant :

- Le premier jour, le titre *baisse*, donc : $\quad s_1 = m_1 = 0$ et $b_1 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{M_n}(M_{n+1}) = \frac{2}{3}, \; P_{M_n}(S_{n+1}) = P_{M_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6};$$

$$P_{S_n}(M_{n+1}) = P_{S_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}, \; P_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{2}{3};$$

$$P_{B_n}(M_{n+1}) = P_{B_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{6}, P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On utilise trois fois la *formule des probabilités totales* avec le *système complet* d'événements (M_n, S_n, B_n) :

- $P(M_{n+1}) = P(M_n).P_{M_n}(M_{n+1}) + P(S_n).P_{S_n}(M_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(M_{n+1})$, soit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_{n+1} = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{6}s_n + \frac{1}{6}b_n.$$

- $P(S_{n+1}) = P(M_n).P_{M_n}(S_{n+1}) + P(S_n).P_{S_n}(S_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(S_{n+1})$, soit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_{n+1} = \frac{1}{6}m_n + \frac{2}{3}s_n + \frac{1}{6}b_n.$$

- $P(B_{n+1}) = P(M_n).P_{M_n}(B_{n+1}) + P(S_n).P_{S_n}(B_{n+1}) + P(B_n).P_{B_n}(B_{n+1})$, soit :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} = \frac{1}{6}m_n + \frac{1}{6}s_n + \frac{2}{3}b_n$$

b) Les relations précédentes montrent que les suites (m_n), (s_n), (b_n) suivent les mêmes relations de récurrence que les suites (p_n), (q_n), (r_n), avec $a = \frac{1}{6}$.
Les calculs de la question 1.a) de cette partie donnent directement, avec $s_1 = 1$, $m_0 = b_0 = 0$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_n = \frac{1}{3}\Big(1 - \big(\frac{1}{6}\big)^{n-1}\Big), \quad s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\big(\frac{1}{6}\big)^{n-1}, \quad b_n = \frac{1}{3}\Big(1 - \big(\frac{1}{6}\big)^{n-1}\Big)$$

c) Le résultat de la question 1.b) de cette partie s'applique ici :
$$\lim_{n \to +\infty} m_n = \frac{1}{3} = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} b_n$$
À long terme, les trois évolutions possibles tendent vers l'équiprobabilité.

Exercice 2

Un système est constitué de n composants. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_n$ mesurant le temps de bon fonctionnement de chacun des n composants sont indépendantes, de même loi, la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

I. Calcul du nombre moyen de composants défaillants entre les instants 0 et t.

On note N_t la variable aléatoire égale au nombre de composants défaillants entre les instants 0 et t avec $t \geqslant 0$.

1. Pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $P(T_i < t) = P(T_i \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda.t}$ puisque T_i est une variable à densité qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. A l'instant t, et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, le i-ième composant est soit encore en marche : dans ce cas l'événement $[T_i \geqslant t]$ est réalisé avec la probabilité $e^{-\lambda.t}$, soit en panne avec la probabilité $1 - e^{-\lambda.t}$; ce dernier cas est ici considéré comme le succès d'une épreuve de Bernoulli, et la variable aléatoire N_t compte alors le nombre de succès lors la répétition de n de ces épreuves identiques et indépendantes.
Par conséquent, N_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda.t})$:
$N_t(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(N_t = k) = \binom{n}{k}(1 - e^{-\lambda.t})^k (e^{-\lambda.t})^{n-k}$.
On a aussi, d'après le cours sur la loi binomiale : $\quad E(N_t) = n.(1 - e^{-\lambda.t})$.

3. On cherche ici à résoudre l'inéquation :
$E(N_t) \geqslant \frac{n}{2} \iff n.(1-e^{-\lambda.t}) \geqslant \frac{n}{2} \iff \frac{1}{2} \geqslant e^{-\lambda.t} \iff -\ln(2) \geqslant -\lambda.t \iff t \geqslant \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
A partir de $t_0 = \frac{\ln(2)}{\lambda}$, le nombre moyen de composants défaillants dépasse la moitié du nombre total de composants.

II. Montage en série

On suppose que le système fonctionne correctement si tous les composants eux-même fonctionnent correctement, et on note S_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$: l'événement $[S_n > t]$ est réalisé si et seulement si le système est toujours en marche à l'instant t, donc si et seulement si *tous* les composants ont un temps de bon fonctionnement supérieur à t. Autrement dit :
$$[S_n > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap \ldots \cap [T_n > t]$$
2. Par indépendance des v.a.r. T_i :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ P(S_n \leqslant t) &= 1 - P(S_n > t) = 1 - P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) \times \ldots \times P(T_n > t)\\ &= 1 - [1 - P(T_1 \leqslant t)]^n \text{ car les } T_i \text{ suivent la même loi } \mathcal{E}(\lambda)\\ &= \begin{cases} 1-(1-0)^n = 0 & \text{si } t \leqslant 0\\ 1-(e^{-\lambda.t})^n = 1-e^{-n\lambda.t} & \text{si } t > 0\end{cases}\end{aligned}$$
On reconnaît en fait que S_n suit, d'après la fonction de répartition obtenue, la loi exponentielle $\mathcal{E}(n.\lambda)$. Sa densité est donnée par le cours : $f_n :\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0\\ n.\lambda.e^{-n\lambda.t} & \text{si } t > 0\end{cases}$.
3. Le cours donne également : $E(S_n) = \frac{1}{n\lambda}$ et $V(S_n) = \frac{1}{n^2\lambda^2}$.

III. Montage en parallèle

On suppose maintenant que le système fonctionne correctement si l'un au moins des composants fonctionne correctement, et on note U_n la variable aélatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. L'événement $[U_n < t]$ est réalisé si et seulement si le système est en panne à l'instant t. Cela signifie qu'à cet instant, *tous* les composants sont en panne, puisqu'ici il suffisait d'un seul en état pour assurer le fonctionnement du système. Ainsi :
$$[U_n < t] = [T_1 < t] \cap [T_2 < t] \cap \ldots \cap [T_n < t]$$
Remarque : la relation est encore valable avec des inégalités larges partout.
2. L'indépendance des variables T_i donne une fois de plus :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(U_n \leqslant t) = P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t) \times \ldots \times P(T_n \leqslant t)$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = [P(T_1 \leqslant t)]^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0\\ (1-e^{-\lambda.t})^n & \text{si } t > 0\end{cases}$$
Comme $G_n = \left[F_{T_1}\right]^n$, où T_1 est une variable à densité, $F[T_1]$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0. Par produit, F_{U_n} a donc les mêmes propriétés.

Cela prouve que U_n est une variable à densité ; une telle densité est donnée par la dérivée de G_n sur $\mathbb{R}^*$, et par une valeur arbitraire en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \begin{cases} n.\lambda.e^{-\lambda.t}(1-e^{-\lambda.t})^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On a utilisé la formule de dérivation : $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$ avec $u(t) = 1 - e^{-\lambda.t}$, donc $u'(t) = -(-e^{-\lambda.t}) = e^{-\lambda.t}$.

3. La variable aléatoire U_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.g_n(t)\mathrm{d}t$ est absolulement convergente. Comme $t \mapsto t.g_n(t)$ est nulle sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$ il suffit de prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.g_n(t)\mathrm{d}t$. Or :

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0,\ t.g_n(t) = n.\lambda.te^{-\lambda.t}.(-e^{-\lambda.t}+1)^{n-1} &= n.\lambda.te^{-\lambda.t}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-e^{-\lambda.t})^k.1^{n-k} \\ &= \lambda.\sum_{k=0}^{n-1} n.\binom{n-1}{k}(-1)^k.t.e^{-\lambda(k+1)t}\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton, où pour $A > 0$, on calcule $\displaystyle\int_0^A te^{-\lambda(k+1)t}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & \to\quad & u'(t) = 1 \\ v'(t) &= e^{-\lambda(k+1)t} & \to\quad & v(t) = -\frac{1}{\lambda(k+1)}e^{-\lambda(k+1)t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall A > 0,\ \int_0^A te^{-\lambda(k+1)t}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{\lambda(k+1)}e^{-\lambda(k+1)t}\right]_0^A + \frac{1}{\lambda(k+1)}\int_0^A e^{-\lambda(k+1)t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{Ae^{-\lambda(k+1)A}}{\lambda(k+1)} - \frac{1}{\lambda^2(k+1)^2}\left[e^{-\lambda(k+1)A} - 1\right]\end{aligned}$$

Comme $\lambda(k+1) > 0$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda(k+1)A} = \lim_{A\to+\infty} Ae^{-\lambda(k+1)A} = 0$ par croissances comparées.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\lambda(k+1)t}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda^2(k+1)^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.g_n(t)\mathrm{d}t = n\lambda.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\int_0^{+\infty} te^{-\lambda(k+1)t}\mathrm{d}t$ est convergente comme somme d'intégrales convergente, et U_n admet une espérance qui vaut :

$$E(U_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda.n.\binom{n-1}{k}(-1)^k.\frac{1}{\lambda^2(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$

Puisque, d'après la formule sans nom : $\dfrac{n}{k+1}\dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n}{k+1}$.

On peut alors écrire, pour tout entier n :

$$E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda}.\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n+1}{k+1} - \frac{1}{\lambda}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \left[\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} \right] + \frac{(-1)^n}{\lambda(n+1)} \binom{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} + \frac{(-1)^n}{\lambda(n+1)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$$

car d'après la formule de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

La formule sans nom donne aussi : $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \iff \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$,

d'où :

$$E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^k \overset{[j=k+1]}{=} \frac{1}{\lambda.(n+1)} \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{j-1}$$

$$= -\frac{1}{\lambda.(n+1)} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j - \binom{n+1}{0} (-1)^0 \right] = -\frac{1}{\lambda(n+1)} \cdot \left[\underbrace{(-1+1)^{n+1}}_{=0} - 1 \right]$$

Et on a bien obtenu : $E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda.(n+1)}$.

4. Par sommation de la relation précédente, pour k variant de 1 à $n-1$ (où $n \geqslant 2$), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(U_{k+1}) - E(U_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda(k+1)}$$

$$\iff E(U_n) - E(U_1) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$$

$$\iff E(U_n) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + E(U_1) - \frac{1}{\lambda}$$

L'équivalence : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$, et le fait que $E(U_1)$ et λ soient des constantes, permet de conclure :

$$E(U_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda} . \ln(n)$$

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} = a \iff f_n(x) = 0$$

où $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a$

I. Étude d'un cas particulier

Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.

1. La fonction f_1 est ici définie par : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{11}{6}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$.
Elle est dérivable sur cet ensemble en tant que fonction rationnelle, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0.$$

La fonction f_1 eest donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.

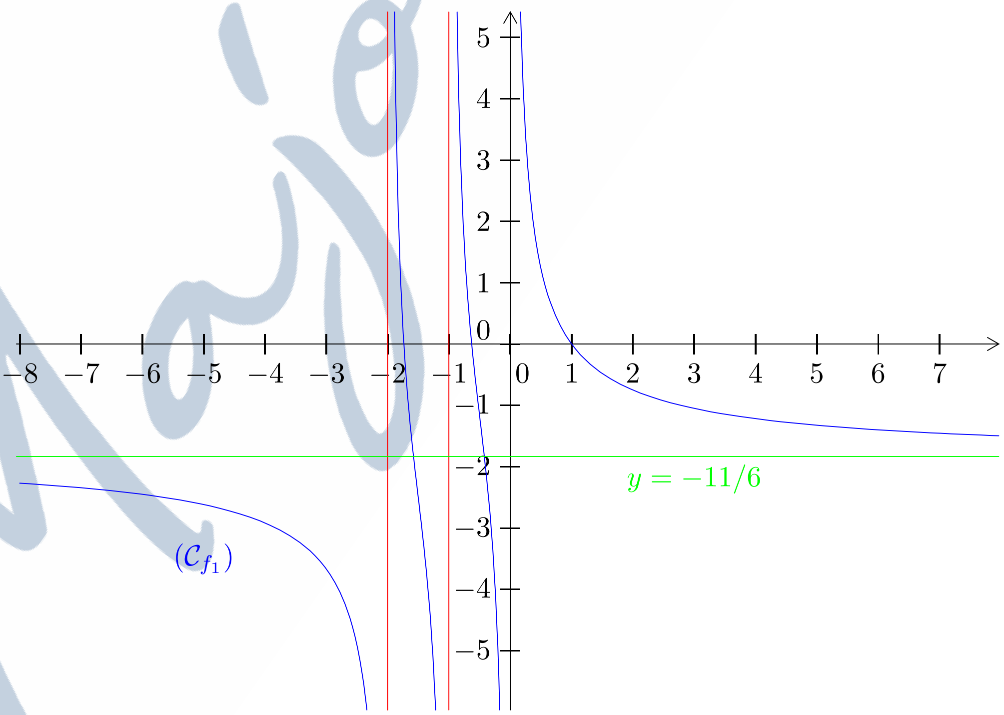
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\dfrac{11}{6}$, de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\dfrac{11}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = -\infty$.

De la même façon : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f_1(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to -2^-} f_1(x)$,
et $\lim\limits_{x\to -1^+} f_1(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to -2^+} f_1(x)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
f_1	$-a$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-a$

2. On peut en déduire l'allure de la courbe de f_1, sachant qu'elle admet les asymptotes verticales d'équation $x = 0$, $x = -1$ et $x = -2$, et l'asymptote horizontale d'équation $y = -\dfrac{11}{6}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



3. $f_1(1) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{11}{6} = \dfrac{6+3+2}{6} - \dfrac{11}{6} = 0.$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{6} = \frac{6(x+1)(x+2) + 6x(x+2) + 6x(x+1) - 11x(x+1)(x+2)}{6x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{6(x^2+3x+2) + 6(x^2+2x) + 6(x^2+x) - 11x(x^2+3x+2)}{6x(x+1)(x+2)} = \frac{-11x^3 - 15x^2 + 14x + 12}{6x(x+1)(x+2)}$$

Ainsi :
$f_1(x) = 0 \iff -11x^3 - 15x^2 + 14x + 12 = 0$. Le réel 1 est une racine évidente de ce polynôme de degré 3, qu'on peut alors factoriser par $(x-1)$ à l'aide d'une division euclidienne,on obtient :

$$-11x^3 - 15x^2 + 14x + 12 = (x-1)(-11x^2 - 26x - 12) = -(x-1)(11x^2 + 26x + 12)$$

donc : $\quad f_1(x) = 0 \iff x = 1$ ou $11x^2 + 26x + 12 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 26^2 - 4.12.11 = 4.(13^2 - 12.11)$
$= 4.(169 - 132) = 4.37 > 0$.

Les solutions de l'équation $f_1(x) = 0$ sont donc 1, $\dfrac{-26 - 2\sqrt{37}}{22} = -\dfrac{13 + \sqrt{37}}{11}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{37}}{11}$.

II. Dénombrement des racines de (E_n)

1. La fonction $f_n :\ x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \cdots + \dfrac{1}{x+2n} - a$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \cdots, -2n\}$; elle est aussi dérivable sur cet ensemble en tant que fonction rationnelle, et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f_n'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+2n)^2} < 0.$$

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles
$]-\infty, -2n[,]-2n, -2n+1[,]-2n+1, -2n+2[, \cdots,]-2, -1[,]-1, 0[,]0, +\infty[$.

En écrivant $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+k} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+k} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -a$.

Soit $j \in [\![0, 2n]\!]$: $\quad \displaystyle\lim_{x \to -j^-} \frac{1}{x+j} = \lim_{y \to 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{x \to -j^+} \frac{1}{x+j} = \lim_{x \to 0^+} = +\infty$.

Pour $k \neq j$: $\quad \displaystyle\lim_{x \to -j^-} \frac{1}{x+k} = \lim_{x \to -j^+} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{k-j}$ (bien défini car $k \neq j$).

Par conséquent : $\quad \forall j \in [\![0, 2n]\!], \ \displaystyle\lim_{x \to -j^-} f_n(x) = -\infty$ (un seul terme tend vers $-\infty$, les autres ont une limite finie), et de même, $\displaystyle\lim_{x \to -j^+} f_n(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations de f_n :

x	$-\infty$ … $-2n$	$-2n$ … $-2n+1$	$\cdots$	-2 … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$
f_n	$-a \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$\cdots$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -a$

2. Sur $]-\infty,-2n[$, f_n est strictement décroissante ; puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -a < 0$, f_n ne prend que des valeurs strictement négatives sur cet intervalle, donc ne s'y annule jamais.

   Soit maintenant $k \in [\![1,2n]\!]$: sur l'intervalle $]-k,-k+1[$, la fonction f_n est strictement décroissante et continue (car dérivable) ;

   d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]-k,-k+1[$ dans $]-\infty,+\infty[$.

   Comme 0 appartient à l'intervalle image, il existe donc une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]-k,-k+1[$; on obtient ainsi $2n$ solutions distinctes à l'équation.

   Enfin sur $]0,+\infty[$, f_n est strictement décroissante et continue, elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x), \lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)[=]-a,+\infty[$;

   puisque $a > 0$, alors 0 appartient à l'intervalle image donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0,+\infty[$.

   L'équation (E_n) admet donc $2n+1$ solutions distinctes.

III. Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$

On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

1. D'après l'étude précédente, la plus grande des racines de (E_n) appartient à l'intervalle $]0,+\infty[$: on a bien $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On utilise très classiquement la première forme de l'Inégalité des Accroissements Finis dans cette question :

   La fonction ln est bien définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de dérivée la fonction inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2\ (a<b),\ \forall t \in]a,b[:\quad \frac{1}{b} < \frac{1}{t} < \frac{1}{a}$$

   Le théorème stipule donc que :

$$\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2\ (a<b) :\quad \frac{1}{b}.(b-a) < \ln(b) - \ln(a) < \frac{1}{a}.(b-a)$$

   Il suffit donc de réécrire cette double inégalité avec $b = x \in]1,+\infty[$, et $a = x-1 \in]0,+\infty[$ (on a bien sûr $a < b$) :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{x} < \ln(x) - \ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$$

   puisque $b - a = x - (x-1) = 1$.

   Au vu de l'expression de $f_n(x)$, on est alors naturellement amené à utiliser la double inégalité précédente sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{x+k+1} < \ln(x+k+1) - \ln(x+k) < \frac{1}{x+k}$$

   et on doit passer à la somme dans cette double inégalité ; on peut réaliser quelques essais pour voir entre quelles valeurs faire varier k : lorsque k varie de 0 à $2n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{x+k+1} < \sum_{k=0}^{2n-1} \ln(x+k+1) - \ln(x+k) < \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{x+k}$$
$$\iff \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{x+j} < \sum_{j=1}^{2n} \ln(x+j) - \sum_{k=0}^{2n-1} \ln(x+k) < \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{x+k}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} < \ln(x+2n) - \ln(x) < \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+2n}$$
$$\iff f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$

Pour $x = x_n$, vu que $f_n(x_n) = 0$, on obtient bien la relation :

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

3. Comme $x_n > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a$, ce qui donne par composition avec la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$1 + \frac{2n}{x_n} < \exp(a) \iff \frac{2n}{x_n} < \exp(a) - 1 \iff \frac{2n}{\exp(a) - 1} < x_n$$

puisque $x_n > 0$ et $\exp(a) - 1 > 0$ (car $a > 0$).

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{\exp(a) - 1} = +\infty$ car $\exp(a) - 1 > 0$, donc par comparaison de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} a - \frac{1}{x_n} = a = \lim\limits_{n\to+\infty} a - \frac{1}{x_n + 2n}$.

Le théorème d'encadrement, utilisé avec celui de la question c), donne donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) = a$$

5. De la question précédente, on déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2n}{x_n} = \exp(a) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{x_n} = \exp(a) - 1 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{(\exp(a) - 1)x_n} = 1$,

ce qui démontre que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\exp(a) - 1} \qquad \left(\text{donc } \delta = \frac{2}{\exp(a) - 1}\right)$$