MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2017

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

I Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leqslant \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2).$$

On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

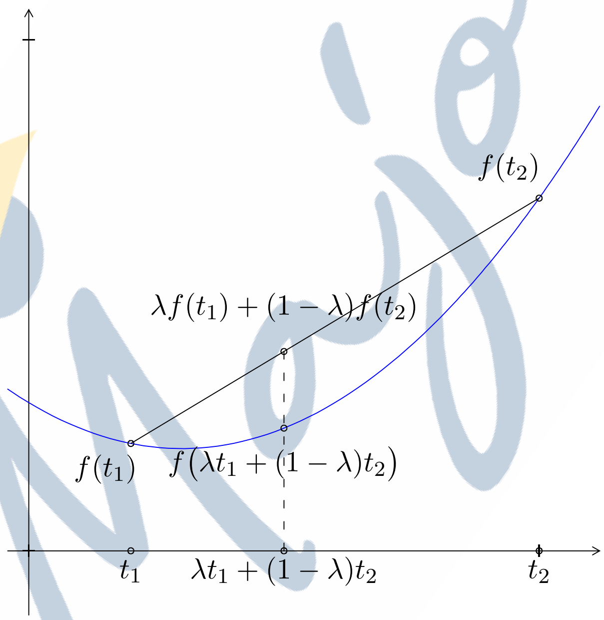
Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par :

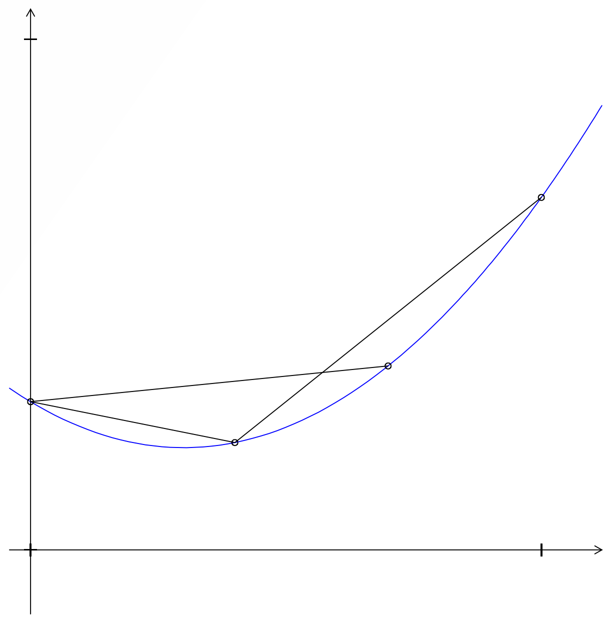
$$\tilde{f}(t) = t - f(t).$$

On pose enfin : $\qquad I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t.$

Le réel $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1. a) On rappelle ici que l'inégalité de convexité pour une fonction f sur un intervalle J, se traduit géométriquement par le fait que pour tous réels t_1 et t_2 de J, la courbe de f entre les abscisses t_1 et t_2 est située en-dessous de la *corde* correspondante, le segment de droite qui relie les points de la courbe de f d'abscisses respectives t_1 et t_2 :





b) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on dispose de l'équivalence suivante :

$$f \text{ est convexe sur } [0,1] \iff f' \text{ est croissante sur } [0,1]$$

2. a) Sous la seule hypothèse que f est convexe sur $[0,1]$, montrons que $\tilde{f}$: $t \mapsto t - f(t)$ est, elle, concave sur ce même intervalle.

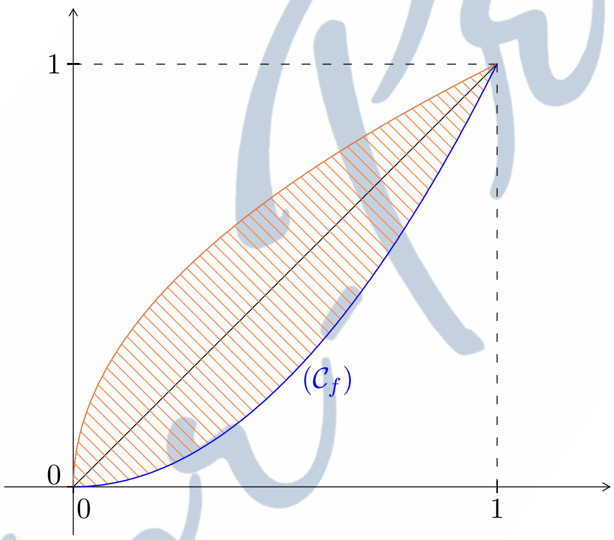
Pour tous réels (t_1, t_2) de $[0,1]^2$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$: puisque f est convexe sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
& f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leqslant \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) \\
\iff\ & f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) - \big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leqslant \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) - \big(\lambda t_1 + (1-\lambda t_2)\big) \\
\iff\ & -\tilde{f}\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leqslant \lambda\big(f(t_1) - t_1\big) + (1-\lambda)\big(f(t_2) - t_2\big) \\
\iff\ & -\tilde{f}\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leqslant -\lambda \tilde{f}(t_1) - (1-\lambda)\tilde{f}(t_2)
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que la fonction $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$, donc que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

b) Par simple linéarité de l'intégrale :

$$I(f) = 2\int_0^1 t\mathrm{d}t - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$



Géométriquement, $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t$ est le double de la surface du domaine compris entre la courbe de f et la droite représentant la fonction $t \mapsto t$, laquelle est d'ailleurs la corde entre les points d'abscisses 0 et 1, puisque f appartient à E.

On peut par exemple symétriser le domaine compris entre la droite et la courbe pour matérialiser le domaine double.

Plus traditionnellement, l'indice de Gini est surtout une question de rapport entre l'aire du domaine situé sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1, qui vaut $\dfrac{1}{2}$ (la moitié de l'aire d'un carré de côté 1), et l'aire du domaine situé *entre* cette droite et la courbe de f, qui vaut $\displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t$. Le quotient vaut bien :

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t}{1/2} = 2\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t = I(f)$$

C'est le même rapport qui existe entre l'aire du domaine double dessiné ci-dessus, et l'aire du domaine $[0;1]^2$.

3. Un premier exemple.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

a) La fonction f est bien positive et continue sur $[0,1]$, et vérifie : $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$; elle est bien convexe sur $[0,1]$, où la dérivée $f' : t \mapsto 2t$ est strictement croissante. C'est d'ailleurs la fonction qui est dessinée dans le graphique ci-dessus !

b) $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = 1 - 2\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Propriétés de l'indice de Gini.

a) Soit f élément de E : comme f est convexe avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, la droite représentant la fonction $t \mapsto t$ est une corde de la courbe de f, et par conséquent :

$\forall t \in [0,1],\ f(t) \leqslant t \iff \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = t - f(t) \geqslant 0$. La fonction $\tilde{f}$ étant continue, positive sur $[0,1]$, la propriété de positivité de l'intégrale donne :

$$\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) = 2\int_0^1 \big(t - f(t)\big)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

b) La propriété de stricte positivité de l'intégrale stipule également, par contraposée :

$$I(f) \geqslant 0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1],\ t - f(t) = 0 \iff \forall t \in [0,1],\ f(t) = t$$

c) On utilise ici le résultat de 2.b) : $\quad I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Or la fonction f, en tant qu'élément de E, est continue et positive ; et comme $f(1) = 1$, elle n'est pas la fonction nulle. La propriété de stricte positivité de l'intégrale implique alors : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow I(f) < 1$.

d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

i. Pour tout entier $n > 0$:

$$I(f_n) = 1 - 2\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 1 - 2\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

ii. Il est clair, d'après le calcul précédent, que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I(f_n) = \dfrac{n-1}{n+1} < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n+1} = 1^-$.

Par définition de la limite, cela siginifie bien que pour tout réel A tel que $0 \leqslant A < 1$, il existe un entier N tel que : $\quad A < I(f_N) < 1$.

Or la fonction f_n est continue, positive sur $[0,1]$; $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, de dérivée $f_n' : t \mapsto nt^{n-1}$ qui est bien croissante sur $[0,1]$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n appartient à E !

On a bien démontré, de cette façon, que pour tout réel A tel que $0 \leqslant A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

5. Minoration de l'indice de Gini.

a) Soit f élément de E. On a déjà vu qu'alors, la fonction $\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$ est continue, positive sur le segment fermé $[0,1]$. À ce titre, elle admet un maximum sur $[0,1]$.

Comme $\tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1 - f(1) = 0$: ce maximum est atteint à l'intérieur de l'intervalle $]0,1[$ (c'est encore vrai même si $\tilde{f}$ s'avère nulle sur $[0,1]$) : il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \displaystyle\max_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

b) On a vu à la question 2.a) que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$. Cela signifie que tout arc de courbe de $\tilde{f}$ est, cette fois, situé *au-dessus* de la corde correspondante. Entre les points d'abscisses 0 et t_0, la corde a pour équation : $y = \dfrac{\tilde{f}(t_0) - \tilde{f}(0)}{t_0 - 0}.(t-0) + \tilde{f}(0) \iff y = \tilde{f}(t_0).\dfrac{t}{t_0}$, et en effet :

$$\forall t \in [0, t_0], \quad \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0).\frac{t}{t_0}$$

c) Pour la même raison, l'arc de courbe de $\tilde{f}$ entre les abscisses t_0 et 1, est entièrement situé au-dessus de la corde correspondante ; cette dernière a pour équation :
$y = \dfrac{\tilde{f}(1) - \tilde{f}(t_0)}{1 - t_0}.(t-1) + \tilde{f}(1) \iff y = \dfrac{-\tilde{f}(t_0)}{1-t_0}.(t-1) \iff y = \tilde{f}(t_0).\dfrac{t-1}{t_0-1}$ puisque $\tilde{f}(1) = 0$.
On a bien :

$$\forall t \in [t_0, 1], \quad \tilde{f}(t) \geqslant \tilde{f}(t_0).\frac{t-1}{t_0-1}.$$

d) Il s'agit ici d'utiliser intelligemment les deux résultats précédents : on sait que $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$, qu'on est incité à séparer en deux intégrales, grâce à la relation de Chasles :

$$I(f) = 2\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t + 2\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t.$$

Les deux inégalités précédentes, la continuité des fonctions concernées sur $[0,1]$, et la propriété de croissance de l'intégrale permettent alors d'écrire :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}.\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_0}$$

$$\iff \int_0^{t_0} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}\cdot\frac{t_0^2}{2} = \frac{t_0}{2}\tilde{f}(t_0)$$

$$\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1}\int_{t_0}^1 (t-1)\mathrm{d}t = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1}\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{t_0}^1$$

$$\iff \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1}\cdot\frac{-(t_0-1)^2}{2} = \frac{1-t_0}{2}\tilde{f}(t_0)$$

Ainsi :

$$I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant t_0.\tilde{f}(t_0) + (t_0-1).\tilde{f}(t_0) \iff I(f) \geqslant \tilde{f}(t_0)$$

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

II Le cas à densité.

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(\nu)\mathrm{d}\nu$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. a) La fonction $\nu \mapsto \nu g(\nu)$ est continue, strictement positive sur $]0;+\infty[$, par produit de deux termes qui le sont. Comme l'intégrale $m = \displaystyle\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu$ est convergente, la propriété de stricte croissance de l'intégrale (ici impropre) s'applique, qui garantit que $m > 0$.

b) La fonction G, de par sa définition intégrale, la primitive de g sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. Comme g est strictement positive sur $]0;+\infty[$, G est bien continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$), strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Comme $G(0) = \displaystyle\int_0^0 g(\nu)\mathrm{d}\nu = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} g(\nu)\mathrm{d}\nu = 1$ (car g est une densité nulle sur $]-\infty, 0]$) : le théorème éponyme assure que la fonction G est une bijection de $[0;+\infty[$ dans $[0,1[$.

On note G^{-1} son application réciproque.

c) C'est une conséquence du théorème de la bijection : la fonction réciproque G^{-1} est elle-même strictement croissante sur $[0,1[$.

7. a) Le changement de variable $u = G(\nu)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$,
avec : $\quad \mathrm{d}u = G'(\nu)\mathrm{d}\nu = g(\nu)\mathrm{d}\nu$,
et : $\quad u = 0 \iff G(\nu) = 0 \iff \nu = 0$, tandis que $u = t \iff \nu = G^{-1}(t)$.
Ainsi, par changement de variable, pour tout $t \in [0,1[$:

$$\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u = \int_0^{G^{-1}(t)} G^{-1}\big(G(\nu)\big)g(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^{G^{-1}(t)} \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu.$$

b) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1 \iff \lim_{t\to1^-} G^{-1}(t) = +\infty$ par bijection réciproque. Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu$ est convergente, on peut passer à la limite quand t tend vers 1^- dans la relation précédente, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)\mathrm{d}u$, avec :

$$\int_0^1 G^{-1}(u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu = m$$

8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\quad f(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u$ pour tout $t \in [0,1[$, et $f(1) = 1$.

a) i. Tout d'abord : la fonction f est continue sur $[0,1[$ comme fonction définie par l'intégrale entre 0 et $t \in [0,1[$ de G^{-1}, continue sur $[0,1[$.

Par ailleurs, comme on l'a vu à la question précédente :

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 G^{-1}(u)\mathrm{d}u = m \iff \lim_{t\to1^-}\frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u = \frac{m}{m} = 1$$
$$\iff \lim_{t\to1^-} f(t) = f(1).$$

La fonction f est donc continue en 1 : elle est finalement continue sur $[0,1]$.

ii. Sur $[0,1[$, f est à un facteur constant positif $\dfrac{1}{m}$ près, la primitive de la fonction G^{-1} qui s'annule en 0 : elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et : $\forall t \in [0,1[$, $f'(t) = \dfrac{1}{m}G^{-1}(t)$ est bien l'expression d'une fonction croissante sur $[0,1]$ (d'après 6.c), et puisque $\dfrac{1}{m} > 0$).

La fonction f est donc bien convexe sur $[0,1[$. L'énoncé admet à ce stade, qu'elle est en fait convexe sur $[0,1]$.

iii. La fonction G^{-1} étant positive et continue sur $[0,1[$, la propriété de positivité de l'intégrale s'applique à nouveau pour garantir que : $\forall t \in [0,1[, \ \int_0^t G^{-1}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1[, \ f(t) \geqslant 0$ puisque $\dfrac{1}{m} > 0$. Puisque $f(1) = 1$, f est bien : positive, continue et convexe sur $[0,1]$. On a également $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc f appartient à l'ensemble E.

b) On reprend ici la formule : $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$; soit alors $A \in]0, A[$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^A f(t)\mathrm{d}t$ en posant :

$$\begin{array}{lll} u(t) = f(t) & \longrightarrow & u'(t) = f'(t) = \dfrac{1}{m}G^{-1}(t) \\ v'(t) = 1 & \longrightarrow & v(t) = t \end{array}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, donc :

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_0^A - \frac{1}{m}\int_0^A tG^{-1}(t)\mathrm{d}t = Af(A) - \frac{1}{m}\int_0^A tG^{-1}(t)\mathrm{d}t$$

On y réalise alors, comme en 7.a), le changement de variable $t = G(\nu)$ pour obtenir :

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = Af(A) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(t)} G(\nu) \times \nu g(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Lorsque A tend vers 1^- : $f(A)$ tend vers $f(1) = 1$, et $G^{-1}(A)$ tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)G(\nu)\mathrm{d}\nu$$

et donc :

$$I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)G(\nu)\mathrm{d}\nu$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

a) La densité g étant nulle sur $]-\infty, 0]$, la fonction G est confondue sur $]0, +\infty[$ avec la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ, donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

b) Pour tout réel $u \in [0,1[$, on trouve $G^{-1}(u)$ comme l'unique solution $x \in [0, +\infty[$ de l'équation :

$$G(x) = u \iff 1 - e^{-\lambda x} = u \iff e^{-\lambda x} = 1 - u \iff x = \boxed{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) = G^{-1}(u)}$$

c) C'est du cours : m correspond ici à l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ, donc $\boxed{m = \dfrac{1}{\lambda}}$.

d) Pour tout réel $t \in [0,1[$: $\quad f(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u = \lambda.\int_0^t -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)\mathrm{d}u = -\int_0^t \ln(1-u)\mathrm{d}u.$

e) On calcule l'intégrale précédente grâce au changement de variable affine $y = 1 - u$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1[, \quad f(t) &= -\int_1^{1-t} \ln(y)(-\mathrm{d}y) = \int_1^{1-t} \ln(y)\mathrm{d}y = \Big[y\ln(y) - y\Big]_1^{1-t} \\ &= (1-t)\ln(1-t) - (1-t) - 1\ln(1) + 1 = (1-t)\ln(1-t) + t. \end{aligned}$$

f) La fonction $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$, et $\lim_{t\to 1^-}(1-t)\ln(1-t) \overset{[x=1-t]}{=} \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ d'après les croissances comparées classiques en 0. La fonction se prolonge donc par continuité en 1, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement impropre en 1.

Pour calculer cette intégrale, on pose $A \in]0,1[$ et on calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^A (1-t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$ en commençant par le changement de variable $x = 1-t$:
$\displaystyle\int_0^A (1-t)\ln(1-t)\mathrm{d}t = \int_1^{1-A} x\ln(x)(-\mathrm{d}x) = \int_{1-A}^1 x\ln(x)\mathrm{d}x$; on enchaîne avec une Intégration Par Parties, en posant :

$$u(x) = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \quad \longrightarrow \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, donc :

$$\begin{aligned}\int_{1-A}^1 x\ln(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{1-A}^1 - \int_{1-A}^1 \frac{x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}(1-A)^2\ln(1-A) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{1-A}^1\\ &= -\frac{1}{2}(1-A)^2\ln(1-A) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-A)^2\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre A vers 1^- : comme $\lim_{A\to 1^-}(1-A)^2\ln(1-A) = \lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ toujours par croissances comparées :

$$\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\mathrm{d}t = \lim_{A\to 1^-} -\frac{1}{2}(1-A)^2\ln(1-A) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-A)^2 = -\frac{1}{4}$$

g) On en déduit, pour cette fonction f :

$$I(f) = 1-2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1-2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\mathrm{d}t - \int_0^1 2t\mathrm{d}t = 1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right) - \left[t^2\right]_0^1 = 1+\frac{1}{2}-1 = \frac{1}{2}$$

III Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant un tableau à double entrée où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1,n]\!]$ sont des entiers naturels. On suppose en outre que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $x_i \neq 0$.

On pose $n_i = x_i + y_i$, $\quad X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$, $\quad Y = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.

Pour i appartenant à $[\![1,n]\!]$, on adpote les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad q_i = \frac{x_i}{X}, \quad r_i = \frac{y_i}{Y}.$$

On note aussi $\varepsilon_i = \dfrac{x_i}{n_i}$ et $\varepsilon = \dfrac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de sorte que

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_n.$$

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: p_i; q_i et r_i sont des réels positifs comme quotients de réels positifs, et :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{N}{N} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{X}{X} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{Y}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{Y}{Y} = 1$$

ce qui prouve que $P = (p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $Q = (q_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $R = (r_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des distributions de probabilités.

b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\dfrac{q_i}{p_i} = \dfrac{x_i}{X} \times \dfrac{N}{n_i} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$.

Or on a supposé les catégories numérotées telles que : $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_n$.

En divisant par $\varepsilon > 0$, on ne change pas l'ordre des termes, donc :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} \iff \frac{p_1}{q_1} \leqslant \frac{p_2}{q_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{p_n}{q_n} \quad (*)$$

c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $n_i = x_i + y_i$, donc $\dfrac{r_i}{p_i} = \dfrac{y_i}{Y} \times \dfrac{N}{n_i} = \dfrac{N}{Y} \times \dfrac{n_i - x_i}{n_i} = \dfrac{N}{Y}(1-\varepsilon_i)$. Or :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_n &\iff 1-\varepsilon_1 \geqslant 1-\varepsilon_2 \geqslant \ldots \geqslant 1-\varepsilon_n \\
&\iff \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_1) \geqslant \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_2) \geqslant \ldots \geqslant \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_n) \qquad (\frac{N}{Y} > 0) \\
&\iff \frac{r_1}{p_1} \geqslant \frac{r_2}{p_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{r_n}{p_n}
\end{aligned}$$

d) On se contente d'utiliser les définitions : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$r_i = \frac{y_i}{Y} = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{\cancel{N}(\frac{n_i}{N} - \frac{x_i}{N})}{\cancel{N}(1 - \frac{X}{N})} = \frac{p_i - \frac{X}{N}\cdot\frac{x_i}{X}}{1-\varepsilon} = \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1-\varepsilon}$$

11. Dans un premier temps, on construit une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

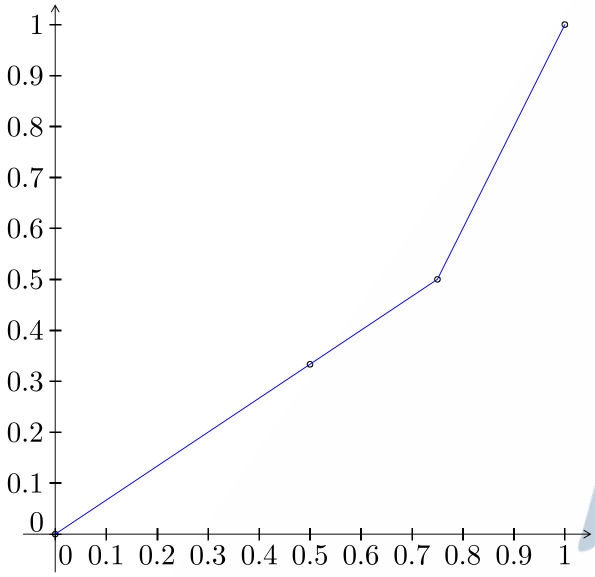
On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $P_i = \displaystyle\sum_{h=1}^{i} p_h$ et $Q_i = \displaystyle\sum_{h=1}^{i} q_h$. On définit alors l'application φ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0,n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) On suppose dans cette question $n = 3$, $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

La fonction φ est alors affine par morceaux, et passe par les points de coordonnées (P_0, Q_0), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) et (P_3, Q_3), ou plus précisément :

$$P_0 = 0,\ P_1 = p_1 = \frac{1}{2},\ P_2 = p_1 + p_2 = \frac{3}{4},\ P_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$Q_0 = 0,\ Q_1 = q_1 = \frac{1}{3},\ Q_2 = q_1 + q_2 = \frac{1}{2},\ Q_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 1$$



b) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est : $\quad u_i = \dfrac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \dfrac{q_i}{p_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

c) Pour tout i de $[\![0, n-1]\!]$: la fonction $t \mapsto u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$ est affine, et vaut respectivement : $u_{i+1} \times 0 + Q_i = Q_i$ en $t = P_i$, et $u_{i+1}(P_{i+1} - P_i) + Q_i = \dfrac{q_{i+1}}{p_{i+1}} \times p_{i+1} + Q_i = q_{i+1} + Q_i = Q_{i+1}$ en $t = P_{i+1}$; c'est donc bien l'expression de la fonction φ sur l'intervalle $[P_i, P_{i+1}]$.

d) En admettant que les inégalités $(*)$ de la question 10.b) permettent d'affirmer que φ est convexe : cette fonction est aussi continue (chaque extrémité droite d'un segment de la courbe de φ est l'extrémité gauche du segment suivant), positive sur $[0, 1]$, avec $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$, et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$, ce qui prouve bien que φ appartient à E.

e) Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\mathrm{d}t &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} \big(u_{i+1}(t - P_i) + Q_i\big)\mathrm{d}t = \left[u_{i+1}\frac{(t-P_i)^2}{2} + Q_i.t\right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1}.\frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i.P_{i+1} - u_{i+1}.\frac{0^2}{2} - Q_i.P_i \\
&= \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}.\frac{{p_{i+1}}^2}{2} + Q_i.(P_{i+1} - P_i) = (P_{i+1} - P_i) \times \frac{q_{i+1} + 2Q_i}{2} \\
&= (P_{i+1} - P_i) \times \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}
\end{aligned}$$

f) Il suffit alors d'invoquer ici la relation de Chasles pour le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$, qui vaut aussi, puisque $P_0 = 0$ et $P_n = 1$:

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{P_0}^{P_1} \varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{P_1}^{P_2} \varphi(t)\mathrm{d}t + \ldots + \int_{P_{n-1}}^{P_n} \varphi(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

et ainsi :

$$I(\varphi) = 1 - 2\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i)(Q_i + Q_{i+1})$$

12. On étudie maintenant l'application correspondante pour la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum_{h=1}^{i} p_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^{i} r_h$. De même on définit pour $i \in [\![0, n]\!]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$.

On considère l'application ψ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout entier $i \in [\![0n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

a) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est : $v_i = \dfrac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \dfrac{r_i}{p_i}$ au vu de la définition sommatoire des R_i et P_i.

b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$ par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

   i. On suppose dans cette question que $n = 3$. Comme dans le graphique précédent : la courbe de ψ est une ligne brisée passant par les quatre points de coordonnées (P_0, R_0), (P_1, R_1), (P_2, R_2) et (P_3, R_3) avec, ici :

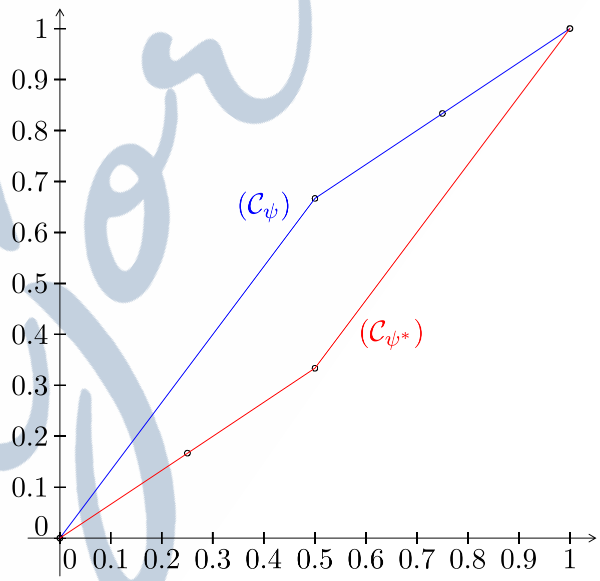
$$P_0 = 0,\ P_1 = p_1 = \frac{1}{2},\ P_2 = p_1 + p_2 = \frac{3}{4},\ P_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$R_0 = 0,\ R_1 = r_1 = \frac{2}{3},\ R_2 = r_1 + r_2 = \frac{5}{6},\ R_3 = r_1 + r_2 + r_3 = 1$$

   À chacun de ces points correspondent des points de la courbe de ψ^*, qu'on note (P_i^*, R_i^*) pour $i \in \{0,1,2,3\}$, tels que :
   $P_i^* = 1 - P_i$, de sorte que $R_i^* = \psi^*(P_i^*) = 1 - \psi(1 - P_i^*) = 1 - \psi(P_i) = 1 - R_i$.

$$P_0^* = 1 - P_0 = 1 \text{ et } R_0^* = 1 - R_0 = 1,\ P_1^* = 1 - P_1 = \frac{1}{2} \text{ et } R_1^* = 1 - R_1 = \frac{1}{3},$$

$$P_2^* = 1 - P_2 = \frac{1}{4} \text{ et } R_2^* = 1 - R_2 = \frac{1}{6},\ P_3^* = 1 - P_3 = 0 \text{ et } R_3^* = 1 - R_3 = 0$$



   ii. Si les inégalités $(*)$ de la question 10.b) permettent à l'énoncé d'admettre que φ est convexe sur $[0,1]$, alors on peut aussi considérer par analogie, que les inégalités de la question 10.c) font de la fonction ψ une fonction **concave** sur $[0,1]$.
   La fonction $-\psi$ est donc, elle, **convexe** sur $[0,1]$, et par conséquent, pour tout couple (t_1, t_2) de $[0,1]^2$ et tout réel λ de $[0,1]$:

$$\psi^*\big(\lambda.t_1 + (1-\lambda).t_2\big) = 1 - \psi\Big(1 - \big(\lambda.t_1 + (1-\lambda).t_2\big)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\psi\Big(\lambda.(1-t_1)+(1-\lambda).(1-t_2)\Big)\\
&\leqslant 1-\lambda.\psi(1-t_1)-(1-\lambda).\psi(1-t_2) \qquad -\psi \text{ est convexe sur } [0,1]\\
&\leqslant \lambda\Big(1-\psi(1-t_1)\Big)+(1-\lambda)\Big(1-\psi(1-t_2)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\psi^*\big(\lambda.t_1+(1-\lambda).t_2\big) \leqslant \lambda.\psi^*(t_1)+(1-\lambda).\psi^*(t_2)$$

La fonction ψ^* vérifie bien l'inégalité de convexité, elle est donc convexe sur $[0,1]$.

iii. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$; un réel t appartient à l'intervalle $\big[\Pi_{i-1}, \Pi_i\big]$ si et seulement si :

$$\Pi_{i-1} \leqslant t \leqslant \Pi_i \iff 1-P_{n-i+1} \leqslant t \leqslant 1-P_{n-i} \iff P_{n-i+1} \geqslant t \geqslant P_{n-i} \iff 1-t \in \big[P_{n-i}, P_{n-i+1}\big]$$

Comme la fonction ψ est affine sur chaque intervalle $\big[P_{j-1}, P_j\big]$ ($j \in [\![1,n]\!]$), de pente $v_j = \dfrac{r_j}{p_j}$, alors on peut écrire : $\quad \forall t \in \big[P_{j-1}, P_j\big],\ \psi(t) = v_j(t-P_{i-1})+R_{i-1}$ et ainsi pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\forall t \in \big[\Pi_i, \Pi_{i+1}\big], \quad \psi(1-t) = v_{n-i+1}(1-t-P_{n-i})+R_{n-i}$$

donc :

$$\forall t \in \big[\Pi_i, \Pi_{i+1}\big], \quad \psi^*(t) = 1-\psi(1-t) = 1-v_{n-i+1}(1-t-P_{n-i})-R_{n-i}$$

ce qui correspond bien à l'expression d'une fonction affine sur $\big[\Pi_i, \Pi_{i+1}\big]$.

iv. Le calcul précédent montre bien, si on extrait de l'expression le seul terme de degré 1, à savoir : $\quad v_{n-i+1}.t$, que sur $\big[\Pi_i, \Pi_{i+1}\big]$, la pente de ψ^* est v_{n-i+1} pour $i \in [\![1,n]\!]$.

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour "mesurer les inégalités" entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.
Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale.

13. a) Si $\varphi = \psi^*$, alors les deux fonctions affines par morceaux ont la même pente sur le même i-ième intervalle de la subdivision de $[0,1]$, soit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u_i = v_{n-i+1} \iff \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{p_{n-i+1}-\varepsilon q_{n-i+1}}{p_{n-i+1}(1-\varepsilon)} \iff \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon.\dfrac{q_{n-i+1}}{p_{n-i+1}}}{1-\varepsilon} \iff \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$$

d'après les relations obtenues à la question 10.

b) Si $\varphi = \psi^*$, l'égalité précédente est vraie si les indices sont échangés : il suffit pour le voir de faire le changement d'indice $j = n-i+1$, et on obtient : $\quad \forall j \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{\varepsilon_{n-j+1}}{\varepsilon} = \dfrac{1-\varepsilon_j}{1-\varepsilon}$.

En réécrivant cette relation avec un indice i, et par sommation membre à membre avec l'égalité de la question précédente, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{2-(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1})}{1-\varepsilon} \iff (1-\varepsilon)(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon-\varepsilon(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1})$$

ce qui donne bien : $\quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

c) On déduit des deux questions précédentes, que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i de $[\![1,n]\!]$:

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-(2\varepsilon-\varepsilon_i)}{1-\varepsilon} \iff \varepsilon_i(1-\varepsilon) = \varepsilon-\varepsilon(2\varepsilon-\varepsilon_i) \iff \varepsilon_i(1-\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)+\varepsilon_i\times\varepsilon \iff \varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)$$

d) On suppose $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$: alors $1 - 2\varepsilon \neq 0$ et on peut simplifier ce facteur commun dans l'égalité précédente, ce qui donne : si $\varphi = \psi^*$, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \varepsilon_i = \varepsilon$$

c'est-à-dire : $\quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \dfrac{x_i}{n_i} = \dfrac{X}{N}$: la proportion de chaque classe est la même dans chacune des catégories, ce qui garantit bien qu'il y a absence totale d'inégalité sociale : il n'existe aucune catégorie où une classe est sous-représentée, ou sur-représentée.

⋆ ⋆ ⋆ FIN DU SUJET ⋆ ⋆ ⋆