MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2016

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

I Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité d'événements :

$$[X > j-1] = [X \geqslant j] = [X = j] \cup [X > j]$$

puisque X est à valeurs entières. L'union est disjointe, donc :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(X > j-1) = P(X = j) + P(X > j) \iff \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j)$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} jP(X = k) &= \sum_{j=1}^{p} j\big(P(X > j-1) - P(X > j)\big) \quad \text{d'après a)} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} (i+1)P(X > i) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) \qquad [i = j-1] \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) + \sum_{j=0}^{p-1} jP(X > j) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p) \qquad \text{après télescopage}
\end{aligned}$$

2. a) On suppose ici que X admet une espérance $E(X) = \mu$.

i. Par définition de l'espérance : le fait que X admet une espérance vient de la convergence absolue de la série de terme général $kP(X = k)$, qui entraîne la convergence simple de la série.

ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k)$ représente le *reste* d'ordre p de la série : comme celle-ci converge, on sait que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0$

(Il suffit, si on veut vraiment tout écrire, de voir que :
$\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) - \sum_{k=1}^{p} kP(X = k)$, la somme partielle convergeant vers la somme totale quand p tend vers l'infini.)

iii. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad [X > p] = \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X = k]$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

L'union est disjointe, donc : $\quad P(X > p) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X = k)$.

On remarque alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout entier $k \geqslant p+1$:

$$0 \leqslant pP(X = k) \leqslant kP(X = k)$$

Comme les séries de termes généraux $kP(X = k)$ et $pP(X = k)$ sont convergentes, le passage à la somme dans l'inégalité est possible lorsque k varie de $p+1$ à $+\infty$, ce qui donne :

$$0 \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X = k) \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) \iff 0 \leqslant pP((X > p) \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k)$$

Le résultat de la question précédente, et le théorème d'encadrement permettent alors de conclure :

$$\lim_{p \to +\infty} pP(X > p) = 0$$

iv. De 1.b) on déduit : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = \sum_{j=1}^{p} jP(X = k) + pP(X > p)$,

donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{p \to +\infty} P(X > j) = E(X) + 0$$

ce qui prouve bien que la série de terme général $P(X > j)$ converge.

v. Le résultat précédent exprime également que la série de terme général $P(X > j)$ a pour somme totale $E(X) = \mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$.

b) On suppose ici que $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$ converge.

i. Pour tout entier $p \geqslant 1$: $\quad v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^{p} P(X > j) - \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = P(X > p) \geqslant 0$ puisqu'il s'agit d'une probabilité, donc la suite $(v_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante.

ii. Toujours d'après 1.b) :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{j=1}^{p} jP(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p) \leqslant \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$$

puisque $pP(X > p) \geqslant 0$, et puisque la série de terme général positif $P(X > j)$, qui converge, voit toutes ses somme partielles v_p qui forment une suite croissante, majorées par sa somme totale $\lim_{p \to +\infty} v_p$.

iii. De tout ce qui précède, on déduit que les sommes partielles de la séries à termes positifs $jP(X = j)$ sont majorées par la constante $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$: il s'agit donc d'une série (absolument) convergente, ce qui signifie donc que X admet une espérance.

c) On a bien démontré une implication et sa réciproque : X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > j)$. De plus, le cas échéant, on dispose d'une valeur sommatoire alternative pour l'espérance de X :

$$E(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$$

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$:

$$P(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (\star)$$

a) La relation $(\star)$ doit donner, d'après la question 1.a) :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

On a clairement, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, puisque $j+1 > j$ et $\alpha > 0$:

$$0 \leqslant \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{j^\alpha} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(X = j) \leqslant 1$$

et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(X = j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} P(X = j) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = 1 = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j)$$

ce qui achève de prouver que $(\star)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

b) D'après l'équivalence obtenue en 2.c) : X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > j) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha}$ est convergente.

Il s'agit, à un décalage d'indice près, d'une série de Riemann, qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Par équivalence, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

c) Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j(1+\frac{1}{j}))^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

d) i. La fonction $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ est bien définie et dérivable sur $[0,1]$, avec :

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = -(-\alpha).(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha.\left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right)$$

où : $\forall x \in [0,1],\ (1+x) \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} \leqslant 1$, et ainsi : $\forall x \in [0,1],\ f'(x) \leqslant 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $[0,1]$, et comme $f(0) = 1 - 1^{-\alpha} - 0 = 0$, on peut en déduire :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant 0 \iff \forall x \in [0,1], \quad 1 - (1+x)^{-\alpha} \leqslant \alpha x$$

ii. L'inégalité précédente permet alors d'écrire, en reprenant le résultat de 3.c) :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^{\alpha}} \leqslant \alpha . \frac{1}{j} \iff \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=j) = \frac{1}{j^{\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}}\Big) \leqslant \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

e) Le résultat de c) permet aussi d'utiliser le développement limité de $(1+x)^{-\alpha}$ au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{-\alpha} = 1 - \alpha x + o(x)$$

Lorsque j tend vers $+\infty$, $x = \dfrac{1}{j}$ tend vers 0, donc :

$$\left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{j} + o\big(\frac{1}{j}\big) \iff 1 - \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} = \frac{\alpha}{j} + o\big(\frac{1}{j}\big)$$

et donc :

$$1 - \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j} \iff P(X=j) = \frac{1}{j^{\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}}\Big) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

ce qui revient bien à dire que $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}P(X=j) = \alpha$.

f) On sait déjà que X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$; cette variable aléatoire admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, donc si et seulement si la série à termes positifs $\sum\limits_{j\geqslant 1} j^2 P(X=j)$ est (absolument) convergente.

Or d'après ce qui précède : $\quad j^2P(X=j) \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{j\geqslant 1} j^2P(X=j)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$, qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$.

On a bien démontré que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné

4. a) Le réel u_1 est la probabilité de l'événement A_1 : « la composant en place au jour 1 tombe en panne. » Il s'agit forcément du premier composant, et la probabilité que celui-ci tombe en panne au jour 1 est bien : $P(X_1 = 1) = p_1$ qui est donc aussi la valeur de u_1.

b) i. Il y a deux possibilités pour que le composant en place le jour 2, tombe en panne :
- Soit il s'agit du premier composant, qui a bien fonctionné à l'instant 1 mais est tombé en panne à l'instant 2 : c'est l'événement $[X_1 = 2]$
- Soit le premier composant est tombé en panne à l'instant 1, il a été remplacé par le deuxième composant qui est aussitôt tombé en panne à l'instant 2 : c'est l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$.

Il ne peut pas y avoir eu plus d'un remplacement à l'instant 2, donc :

$$A_2 = [X_1 = 2] \cup \big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big)$$

ii. L'union précédente est disjointe, et puisque X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$u_2 = P(A_2) = P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) = p_2 + (p_1)^2$$

c) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

a) S'agissant d'un simple décalage d'indice : l'indépendance des variables aléatoires $(\tilde{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*} = (X_i)_{i\geqslant 2}$ vient de celle des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, et elles sont toutes indépendantes de X_1, et suivent la même loi que X_1.

b) Soit k un entier naturel tel que $1 \leqslant k < n$: l'événement $A_n \cap [X_1 = k]$ est réalisé si et seulement si le premier composant a fonctionné jusqu'à l'instant k où il tombe en panne, et après un certain nombre de remplacements, le composant en place à l'instant n tombe en panne.

Il existe donc un certain entier $j \geqslant 1$ tel que la somme des durées de vie des j composants qui suivent le premier, est exactement égale à $n-k$, de sorte qu'ajoutée à la durée de vie $X_1 = k$ du premier, la somme des durées de vie des $j+1$ premiers composants est exactement égale à n, ce qui est la seule façon de réaliser l'événement A_n. Cela s'écrit bien :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 2} [X_2 + X_3 + \ldots + X_{j+1} = n-k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k]$$

c) L'indépendance des variables $\tilde{X}_i$ avec X_1 implique celle des événements $[X_1 = k]$ et $[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k]$ (d'après le lemme des coalitions notamment) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, d'où :

$$P(A_n \cap [X_1 = k]) = P(X_1 = k) \times P\Big(\bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k]\Big)$$

or $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ suit la même loi que $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ donc :

$$P(A_n \cap [X_1 = k]) = P(X_1 = k) \times P\left(\bigcup_{j\geqslant 1} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\right) = P(X_1 = k) \times P(A_{n-k})$$

ce qui est bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\quad P_{[X_1=k]}(A_n) = \frac{P(A_n \cap [X_1 = k]}{P(X_1 = k)} = P(A_{n-k})$$

d) La probabilité $u_n = P(A_n)$ s'obtient à partir du résultat précédent, via la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \times P_{[X_1=k]}(A_n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k) \times P(A_{n-k}) + P(X_1 = n) \times P_{[X_1=n]}(A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p_k \times u_{n-k} + p_n \times 1 = u_{n-1}p_1 + \ldots + u_0 p_n \end{aligned}$$

Il est clair en effet que $[X_1 = k] \cap A_n$ est un événement impossible dès que $k > n$, puisqu'alors le tout premier composant est encore en fonctionnement à l'instant n.

e) En `Scilab`, soit $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ le vecteur-ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.

La formule précédente permet de calculer de proche en proche les réels u_i, jusqu'à u_n ; chaque u_i dépend de tous les précédents selon la formule $u_i = u_{i-1}p_1 + \ldots + u_0 p_i$, valable pour tout $i \in \mathbb{N}^*$; on rajoute chaque nouveau calcul d'un terme de la suite u à la fin d'un tableau, et on fait attention au décalage d'indice dans les termes du tableau, dû au fait que la suite u commence à l'indice 0 alors que `Scilab` ne numérote les éléments des vecteurs qu'à partir de l'indice 1. On suppose que n et P sont connus.

```
u = [1]
for i = 1:n
    s = 0
    for j=1:i
        s = s + u(i-j+1)*p(j)
    end
    u = [u,s]
end
disp(u(n+1))
```

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.

a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_1 > k) = 1 - P(X_1 \leqslant k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P(X_1 = j) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda(1-\lambda)^i$$
$$= 1 - \lambda \times \frac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} = 1 - 1 + (1-\lambda)^k = (1-\lambda)^k$$

b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{[X_1>k]}(X_1 = k+1) = \frac{P\big([X_1 > k] \cap [X_1 = k+1]\big)}{P(X_1 > k)} = \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)} = \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda$$

puisque $[X_1 = k+1] \subset [X_1 > k]$.

c) Il est intéressant dans le cas d'une loi géométrique, d'utiliser la relation : $\forall j \geqslant 2,\ p_j = \lambda(1-\lambda)^{j-1} = (1-\lambda)p_{j-1}$ pour voir que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n_2}p_2 + \ldots + u_1 p_{n-1} + u_0 p_n$$
$$= u_{n-1}p_1 + (1-\lambda)\big(u_{n-2}p_1 + \ldots + u_1 p_{n-2} + u_0 p_{n-1}\big)$$
$$= u_{n-1}.\lambda + (1-\lambda)u_{n-1} = u_{n-1}$$

c'est-à-dire que la suite u est stationnaire à partir du rang 1. Comme $u_1 = p_1 = \lambda$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(A_n) = \lambda$$

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$. Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Les hypothèses faites signifient donc que la loi commune des X_j est :

$$X_j(\Omega) = \{1,2\} \quad \text{et} \quad P(X_j = 1) = p,\ P(X_j = 2) = 1 - p.$$

Conséquence immédiate : $\forall i \geqslant 3,\ p_i = 0.$

b) Soit la matrice : $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la reprise de la relation de la question 4.d) donne :

$$u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + 0 = p.u_{n-1} + (1-p).u_{n-2}$$

puisque les autres termes de la somme sont nuls. De la sorte, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p.u_{n-1} + (1-p).u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

c) i. On commence la diagonalisation de M par la recherche de ses valeurs propres, les réels λ tels que $M - \lambda.I_2$ est non-inversible, ce qui est équivalent à :

$$\det\big(M - \lambda.I_2\big) = 0 \iff \det\begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\iff -\lambda(p-\lambda) - (1-p) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda.p - (1-p) = 0$$

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = (-p)^2 - 4(-(1-p)) = p^2 - 4p + 4 = (p-2)^2 > 0$, la matrice M admet donc les deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{p-(p-2)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{p+(p-2)}{2} = p-1$$

Il suffit alors de trouver un vecteur propre pour chacune des valeurs propres. On voit très facilement que : $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1-p \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

On cherche ensuite un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que :

$$MX = (p-1)X \iff (M-(p-1).I_2)X = 0_{2,1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il est alors clair que $\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un tel vecteur propre.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est alors une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour M, et la formule de changement de base donne :

$$M = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

ii. La récurrence habituelle donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = PD^nP^{-1}$, où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^n \end{pmatrix}$ puisque D est diagonale.

Par ailleurs : $\det(P) = 1-(p-1) = 2-p$, donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et ainsi :

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$\forall n \geqslant 2, \quad M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) a) La relation de 6.b) donne aussi : $\forall n \geqslant 2,\ \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$.

En multipliant à droite par cette matrice colonne, la matrice de la question précédente, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix}p-p^2+p-1\\-p+1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{2-p} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}(-p^2+2p-1) = \frac{1}{2-p} - \frac{(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

b) Puisque $0 < p < 1$, alors $0 < 1-p < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(p-1)^{n+1} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2-p}$$

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement.

7. Les hypothèses faites et la linéarité de l'espérance donnent :

$$E(T_k) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = k\mu$$

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. X_1 admet donc une variance σ^2.

   a) L'indépendance mutuelle des variables X_i, et le fait qu'elles suivent la même loi, permettent d'écrire :

$$V(T_k) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) = k\sigma^2$$

   b) La variable T_k admet une espérance et une variance, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec le réel $k\varepsilon$, qui donne :

$$P\big(|T_k - E(T_k)| \geqslant k\varepsilon\big) \leqslant \frac{V(T_k)}{(k\varepsilon)^2} \iff P\big(|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\big) \leqslant \frac{k\sigma^2}{k^2\varepsilon^2} \iff P\big(|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

   c) L'événement contraire à $\big[|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\big]$ est :

$$\big[|T_k - k\mu| < k\varepsilon\big] = \big[-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon\big] = \big[\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\big].$$

   Le résultat précédent se réécrit donc (une probabilité est positive) :

$$0 \leqslant 1 - P\Big(\big[\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\big]\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

   Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} = 0$, le théorème d'encadrement donne alors :

$$\lim_{k\to+\infty} 1 - P\Big(\big[\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\big]\Big) = 0 \iff \lim_{k\to+\infty} P\Big(\frac{T_k}{k} \in \big]\mu - \varepsilon; \mu + \varepsilon\big[\Big) = 1$$

9. On suppose maintenant que $\alpha > 1$, et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance.
   On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante :

$$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Pour tout $\omega \in \Omega$, en distinguant deux cas :

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$, alors $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) + 0 = X_i(\omega)$.
- Sinon $X_i(\omega) > m$, et alors $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = 0 + X_i(\omega) = X_i(\omega)$.

Ainsi dans tous les cas : $\forall \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) = Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega)$, ce qui signifie bien l'égalité de variables aléatoires :

$$X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$$

b) i. La loi de $Z_1^{(m)}$ est donc donnée par :

$$P(Z_1^{(m)} = 0) = P(X_i \leqslant m) \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant m+1,\ P(Z_1^{(m)} = i) = P(X_1 = i)$$

L'existence de l'espérance de la variable aléatoire $Z_1^{(m)}$ est donc conditionnée à la convergence (absolue) de la série $\sum_{i \geqslant m+1} iP(Z_1^{(m)} = i) = \sum_{i \geqslant m+1} iP(X_1 = i)$, qui est assurée par le fait que X_1 admet une espérance.

L'inégalité obtenue en 3.d)ii. : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X_1 = i) \leqslant \dfrac{\alpha}{i^{\alpha+1}}$ donne ici :

$$\forall i \geqslant m+1, \quad iP(Z_1^{(m)} = i) \leqslant \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

Comme $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{\alpha}{i^\alpha}$ converge, on peut donc passer à la somme dans l'inégalité pour i variant de $m+1$ à $+\infty$, ce qui donne :

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(Z_1^{(m)} = i) = E(Z_1^{(m)}) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$$

ii. La fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x^\alpha}$ est, puisque $\alpha > 0$, strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Ainsi, pour tout entier $i \geqslant m+1$, et tout réel $x \in [i-1, i]$:

$$\frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{x^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{(i-1)^\alpha}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x^\alpha}$ étant continue sur $]0; +\infty[$, l'inégalité de la moyenne donne alors, pour tout $i \geqslant m+1$:

$$\big(i - (i-1)\big) \times \frac{\alpha}{i^\alpha} = \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

Le passage à la somme dans l'inégalité (on ne se sert que de celle de gauche), pour i variant de $m+1$ à un entier $N > m+1$ donne :

$$\forall N \geqslant m+1, \quad \sum_{i=m+1}^{N} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \sum_{i=m+1}^{N} \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{m}^{N} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles. Puisque la série à gauche, et l'intégrale impropre à droite, sont convergentes, on peut passer à la limite dans l'inégalité lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui donne :

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \int_{m}^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

Or : $E(Z_1^{(m)}) \leqslant \displaystyle\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}$, donc : $E(Z_1^{(m)}) \leqslant \displaystyle\int_{m}^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ par transitivité de l'inégalité.

iii. Pour tout réel $A > m$:

$$\int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_m^A \alpha.x^{-\alpha}\mathrm{d}x = \Big[\alpha.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_m^A = -\frac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$$

Comme $\alpha > 1$: $\alpha - 1 > 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} = 0$, donc :

$$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$$

iv. La variable aléatoire $Z_1^{(m)}$ étant positive, les résultats précédents donnent :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant E(Z_1^{(m)}) \leqslant \frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$$

où $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}} = 0$, ce qui donne bien par encadrement :

$$\lim_{m\to+\infty} E(Z_1^{(m)}) = 0$$

v. L'égalité : $\quad X_1 = Z_1^{(m)} + Y_1^{(m)} \iff Y_1^{(m)} = X_1 - Z_1^{(m)}$ entraîne, par linéarité de l'espérance :

$$E(Y_1^{(m)}) = E(X_1) - E(Z_1^{(m)}) = \mu - E(Z_1^{(m)}) \quad \text{donc} \quad \lim_{m\to+\infty} E(Y_1^{(m)}) = \mu - 0 = \mu$$

c) i. Soit $\omega \in \Omega$ quelconque, on distingue deux cas pour prouver l'inégalité demandée :

- soit $X_1(\omega) \leqslant m$, et alors $\big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 = \big(X_1(\omega)\big)^2 = X_1(\omega) \times X_1(\omega) \leqslant m.X_1(\omega)$.
- soit $X_1(\omega) > m$, et alors $\big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 = 0 \leqslant m.X_1(\omega)$.

On a donc bien : $\quad \forall \omega \in \Omega,\ \big(Y_1^{(m)}(\omega)\big)^2 \leqslant m.X_1(\omega)$, donc :

$$\big(Y_1^{(m)}\big)^2 \leqslant m.X_1$$

ii. Comme la variable aléatoire $Y_1^{(m)}$ est finie (à valeurs dans $[\![0, m]\!]$), elle admet bien un moment d'ordre 2 ; l'inégalité précédente et la croissance de l'espérance donnent alors :

$$E\big((Y_1^{(m)})^2\big) \leqslant m.E(X_1) = m\mu$$

et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V\big(Y_1^{(m)}\big) = E\big((Y_1^{(m)})^2\big) - E(Y_1^{(m)})^2 \leqslant E\big((Y_1^{(m)})^2\big) \leqslant m\mu$$

d) Soit ε un réel strictement positif : comme on a déjà eu l'occasion de le voir, $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}} = 0 = \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha-1}.m^{1-\alpha}$; par définition de la limite de cette suite positive : il existe bien un entier m_0 tel que :

$$\forall m \geqslant m_0, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}.m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon.$$

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

e) On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \quad \text{et} \quad V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}.$$

Alors bien sûr :

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)} = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$$

f) i. La linéarité de l'espérance et le fait que chaque v.a.r. $Z_i^{(m)}$ admet une espérance inférieure ou égale à $\dfrac{\alpha}{(\alpha-1)} m^{1-\alpha}$ donne :

$$E(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_i^{(m)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha}{(\alpha-1)} m^{1-\alpha} \iff E(V_k^{(m)}) \leqslant k \times \frac{\alpha}{(\alpha-1)} m^{1-\alpha}$$

ii. L'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire $V_k^{(m)}$ avec le réel $k\varepsilon$, donne :

$$P(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{E(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} \Longrightarrow P(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \cancel{k} \times \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\cancel{k}\varepsilon}$$

par transitivité de l'inégalité.

g) i. La relation vérifiée à la question e) donne : $E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)})$, où $E(T_k) = k\mu$ et $E(V_k^{(m)}) \leqslant k\dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$ d'arpès ce qui précède ; par opérations sur les inégalités, on obtient bien :

$$E(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$$

ii. On sait déjà que $E(U_k^{(m)}) \leqslant E(T_k) = k\mu$, et d'après ce qui précède, vu qu'on a pris $m \geqslant m_0$ tel que $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon$, alors :

$$k\mu \geqslant E(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\varepsilon \iff 0 \geqslant E(U_k^{(m)}) - k\mu \geqslant -k\varepsilon \Longrightarrow \left|E(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leqslant k\varepsilon$$

puisque la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

iii. Écrivons : $\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| = \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) + E(U_k^{(m)}) - \mu\right|$, alors l'*inégalité triangulaire* donne :

$$\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + \left|E(U_k^{(m)}) - \mu\right| \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + k\varepsilon$$

d'après la question précédente.

Ainsi : si $\left[\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right]$ est réalisé, alors :

$$2k\varepsilon \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + k\varepsilon \Longrightarrow k\varepsilon \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right|.$$

Ce rapport d'implication de traduit par l'inclusion d'événements :

$$\left[\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\right] \subset \left[\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\varepsilon\right]$$

et la croissance de la probabilité donne bien :

$$P\Big(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\varepsilon\Big) \leqslant P\Big(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\varepsilon\Big)$$

iv. L'indépendance mutuelle des variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ entraîne naturellement celle des variables aléatoires $(Y_i^{(m)})_{i\in\mathbb{N}^*}$; ainsi :

$$V(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} V(Y_i^{(m)}) = kV(Y_1^{(m)}) \leqslant km\mu$$

puisque les $Y_i^{(m)}$ suivent toutes la loi de $Y_1^{(m)}$, et d'après l'inégalité obtenue en 9.c)ii.

v. On peut alors appliquer l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* à la variable $U_k^{(m)}$, qui donne :

$$P\Big(\big|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\big| \geqslant k\varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(U_k^{(m)})}{k^2\varepsilon^2}$$

Les deux dernières inégalités qui précèdent donnent donc :

$$P\Big(\big|U_k^{(m)} - k\mu\big| \geqslant 2k\varepsilon\Big) \leqslant P\Big(\big|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\big| \geqslant k\varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(U_k^{(m)})}{k^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2}$$

ce qui implique bien, par transitivité de l'inégalité :

$$P\Big(\big|U_k^{(m)} - k\mu\big| \geqslant 2k\varepsilon\Big) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

h) i. Une question facile au milieu de toutes ces questions techniques! Pour tout couple d'événement A et B de la tribu $\mathcal{A}$, d'après la formule du crible :

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \iff P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$,

où $P(A\cup B) \leqslant 1$ puisque c'est une probabilité. Cela implique bien :

$$P(A\cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

ii. Considérons alors les événements :

$$A = \Big[V_k^{(m)} < k\varepsilon\Big] \quad \text{et} \quad B = \Big[U_k^{(m)} \in \big]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\big[\Big]$$

alors :

$$\Big(V_k^{(m)} < k\varepsilon \quad \text{et} \quad k(\mu-2\varepsilon) < U_k^{(m)} < k(\mu+2\varepsilon)\Big) \Longrightarrow k(\mu-2\varepsilon) < U_k^{(m)} + V_k^{(m)} < k(\mu+3\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow k(\mu-3\varepsilon) < T_k < k(\mu+3\varepsilon)$$

ce qui se traduit par l'inclusion d'événements : $A\cap B \subset \Big[k(\mu-3\varepsilon) < T_k < k(\mu+3\varepsilon)\Big]$, et ainsi :

$$P\Big(T_k \in \big]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\big[\Big) \geqslant P(A\cap B) \geqslant P\Big(V_k^{(m)} < k\varepsilon\Big) + P\Big(U_k^{(m)} \in \big]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\big[\Big) - 1$$

d'après ce qui précède.

iii. Le résultat de 9.f)ii. donne, en passant à l'événement contraire :

$$P(V_k^{(m)} < k\varepsilon) = 1 - P(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

et de même, 9.g)v. donne :

$$P\Big(U_k^{(m)} \in \big]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)\big[\Big) = 1 - P\Big(\big|U_k^{(m)} - k\mu\big| \geqslant 2k\varepsilon\Big) \geqslant 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

et ainsi, par sommation membre à membre de ces deux inégalités, et d'après le résultat précédent : on en déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $m \geqslant m_0$,

$$P\Big(T_k \in \big]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)\big[\Big) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} + \cancel{1} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} - \cancel{1}$$

iv. Pour k assez grand, si m_k est un entier appartenant à l'intervalle $[\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$, alors :

$$-\frac{\sqrt{k}\mu}{k\varepsilon^2} \geqslant -\frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} \geqslant -\frac{2\sqrt{k}\mu}{k\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad k^{\frac{1-\alpha}{2}} \geqslant m_k^{1-\alpha} \geqslant 2^{1-\alpha}.k^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad \text{car } 1-\alpha < 0$$

et la fonction puissance $1-\alpha$ est donc décroissante sur $]0, +\infty[$. Cela donne alors :

$$-\frac{\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} \geqslant -\frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} \geqslant -\frac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad -2^{1-\alpha}.\frac{\alpha}{(\alpha-1)\varepsilon}.k^{\frac{1-\alpha}{2}} \geqslant -\frac{\alpha}{(\alpha-1)\varepsilon}m_k^{1-\alpha} \geqslant -\frac{\alpha}{(\alpha-1)\varepsilon}.k^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

Et on peut donc écrire, pour k assez grand :

$$1 \geqslant P\Big(T_k \in \,]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)[\Big) \geqslant 1 - \frac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)\varepsilon}.k^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

où : $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)\varepsilon}.k^{\frac{1-\alpha}{2}} = 0$ puisque $\dfrac{1-\alpha}{2} < 0$.

Le théorème d'encadrement permet donc, une dernière fois, de conclure :

$$\lim_{k\to+\infty} P\Big(T_k \in \,]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)[\Big) = 1$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★