MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

I - Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on notera $[\![a,b]\!] = \{k \in \mathbb{Z},\ a \leqslant k \leqslant b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min\limits_{i\in I} x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple, $\min\limits_{i\in[\![1,9]\!]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}$.

1. Un exemple : $\left\{\dfrac{(-1)^i}{i+1},\ i \in [\![1,4]\!]\right\} = \left\{1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5}\right\}$, il est donc clair que : $\min\limits_{i\in[\![0,4]\!]} \dfrac{(-1)^i}{i+1} = -\dfrac{1}{2}$.

2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs.

   a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} x_i$.

   Ainsi : pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_n(k)$ est la valeur minimale parmi les termes $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$, tandis que $u_n(k+1)$ est la valeur minimale parmi les termes $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, x_{n+k+1}$: il y a donc un terme de plus (x_{n+k+1}) dans cette deuxième liste qui coïncide par ailleurs avec la première, et donc :

   - Soit $\min\limits_{i\in[\![n,n+k+1]\!]} x_i = u_n(k+1)$ est l'un des x_j avec $n \leqslant j \leqslant n+k$: dans ce cas on a aussi $x_j = \min\limits_{i\in[\![n,n+k}} x_i$ et alors $u_n(k+1) = u_n(k)$

   - soit $u_n(k+1) = x_{n+k+1}$ et cela signifie alors que : $\forall i \in [\![n, n+k]\!]$, $x_{n+k+1} \leqslant x_i$; mais alors : $x_{n+k+1} \leqslant \min\limits_{i\in[\![n,n+k]\!]} x_i$, c'est-à-dire : $u_n(k+1) \leqslant u_n(k)$.

   Dans tous les cas : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_n(k+1) \leqslant u_n(k)$, la suite $(u_n(k))_{k\geqslant 0}$ et bien décroissante.

   b) Tous les termes de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ sont positifs, il en va donc de même de deux de la suite $(u_n(k))_{k\geqslant 0}$. Cette dernière est donc décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone.

   On note $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)$.

   c) Comme $u_{n+1}(k) = \min\limits_{i\in[\![n+1,n+k+1]\!]} x_i$ et $u_n(k+1) = \min\limits_{i\in[\![n,n+k+1]\!]} x_i$: le même principe que précédemment s'applique, qu'on peut aussi exprimer ainsi :
   $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k+1}\} \subset \{x_n, \dots, x_{n+k+1}\}$, donc $\min\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k+1}\} \geqslant \min\{x_n, \dots, x_{n+k+1}\}$, soit :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ u_n(k+1) \leqslant u_{n+1}(k)$$
   D'après la question précédente, on peut alors passer à la limite dans cette inégalité quand k tend vers $+\infty$, et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$
   On a bien prouvé que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   d) Le théorème de limite monotone affirme bien que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui est croissante, admet une limite : elle est soit convergente (si elle est majorée), soit divergente vers $+\infty$.

   Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = 1 + (-1)^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Remarquons d'emblée que l'expression de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est, plus simplement :
$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\{y_i,\ i \in [\![n, n+k]\!]\}$ contient toujours au moins deux termes consécutifs de la suite (y_n), et en fait uniquement les valeurs 0 et 2, éventuellement répétées un certain nombre de fois.

On peut donc affirmer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_n(k) = 0.$

La suite (z_n), de son côté, a pour premiers termes : $2, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, \ldots$ et donc :
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_0(k) = 1 = u_1(k)$ (dès que l'indice 1 est dans la liste des entiers $[\![n, n+k]\!]$, le terme $z_1 = 1$ est forcément la valeur minimale des termes considérés dans le calcul de $u_n(k)$), et :
$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_n(k) = 2$ (dès que $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, le terme 2 fait forcément partie de la liste de termes considérés, répété éventuellement plusieurs fois et accompagné de termes entiers qui lui sont supérieurs).

b) De ce qui précède on déduit immédiatement :

$$\liminf_{n\to+\infty} y_n = 0$$

Car dans ce cas, les suites $(u_n(k))_{k\geqslant 1}$ associées sont constantes nulles, ce qui entraîne :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k) = 0.$

On a ensuite :

$$\liminf_{n\to+\infty} z_n = 2$$

Car dans ce cas : la suite $(u_n)_n$ associée est stationnaire égale à 2, en effet :
$u_0 = \lim_{k\to+\infty} u_0(k) = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1 = u_1$, et pour tout $n \geqslant 2,\ u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k) = \lim_{k\to+\infty} 2 = 2.$

4. a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de réels positifs. La conséquence immédiate est que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_n(k) = \min_{i\in[\![n,n+k]\!]} x_i = x_n$ (indépendant de k !) et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k) = x_n$$

Les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont donc rigoureusement identiques, donc si la première converge en croissant vers un réel ℓ, il en est de même pour la seconde :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \liminf_{n\to+\infty} x_n$$

b) Si cette fois, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$, et par ailleurs :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_n(k) = x_{n+k}$, donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k) = \lim_{k\to+\infty} x_{n+k} = \ell.$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc constante, égale à ℓ ; il est donc clair que dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \liminf_{n\to+\infty} x_n$$

c) i. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des réels données et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, α_i appartient à I : il est donc alors évident que $\min_{i\in[\![1,r]\!]} \alpha_i$ appartient encore à I, puisque cette valeur minimale est l'un des r réels !

ii. Soit maintenant $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs convergente vers un réel ℓ positif : alors par définition de la convergence d'une suite, tout intervalle I contenant ℓ, contient aussi tous les termes de la suite (x_n) sauf peut-être un nombre fini d'entre eux : il existe un entier N, qui dépend de I tel que : $\forall n \geqslant N,\ x_n \in I$.

Mais alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et tout $n \geqslant N$: les réels $\{x_n, \ldots, x_{n+k}\}$ appartiennent tous à I, donc leur minimum aussi : $\forall n \geqslant N,\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_n(k) \in I$.

Comme la suite $(u_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante : sa limite u_n est alors, par passage à la limite, élément ou extrémité gauche de I.

Et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ensuite croissante : il existe un rang $N_1 \geqslant N$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_1,\ u_n$ est élément de I.

Bref, si on récapitule, on a démontré que : pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un entier N_1 ne dépendant que de I, tel que I contienne aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang N_1.

C'est la définition de la convergence de la suite (u_n) vers ℓ ! Donc :

$$\text{si } (x_n) \text{ converge vers } \ell, \text{ alors } \liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall h \geqslant 0, \quad \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} f(u).$$

Pour tous réels positifs h et h' tels que $h \leqslant h'$:

$[x, x+h] \subset [x, x+h']$, donc $\{f(u)|\ u \in [x, x+h]\} \subset \{f(u)|\ u \in [x, x+h']\}$, et par conséquent :

$$\min_{u\in[x,x+h']} f(u) \leqslant \min_{u\in[x,x+h]} f(u), \text{ soit : } \quad \forall (h,h') \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad h \leqslant h' \Longrightarrow \varphi_x(h') \leqslant \varphi_x(h)$$

ce qui prouve bien que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Il est aussi clair que, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, φ_x est une fonction minorée par 0, décroissante sur $\mathbb{R}^+$: le théorème de limite monotone pour les fonctions s'applique, qui assure que la fonction φ_x de la variable $h \in \mathbb{R}_+$, admet une limite quand h tend vers $+\infty$: on note $\Phi_x = \lim_{h\to+\infty} \varphi_x(gh)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c) On reprend ici, avec des fonctions, un raisonnement analogue à celui mené avec des suites :

soit $(x, x') \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x \leqslant x'$: alors pour tout réel $h \geqslant 0$, on peut écrire :

$x' + h = x + (x' - x) + h = x + h'$, où $h' = x' - x + h \geqslant 0$.

Et comme alors : $[x', x' + h] \subset [x, x' + h] = [x, x + h']$, donc : $\varphi_{x'}(h) \geqslant \varphi_x(h')$.

Quand h tend vers $+\infty$, $h' = x' - x + h$ aussi, et par passage à la limite dans cette inégalité :

$$\forall (x, x') \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leqslant x' \Longrightarrow \Phi_x \leqslant \Phi_{x'}$$

On a bien démontré de la sorte, que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d) La fonction $x \mapsto \Phi_x$ est ainsi croissante sur $\mathbb{R}^+$: d'après le théorème de limite monotone pour les fonctions, cette fonction-ci admet une limite en $+\infty$, qui est soit finie, soit égale à $+\infty$.

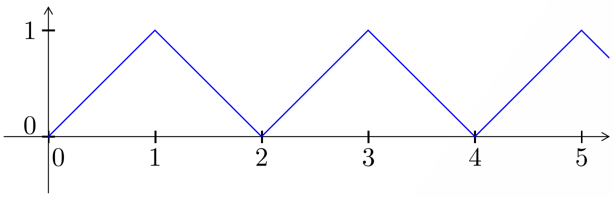
On la nomme la **limite inférieure de** f, notée $\liminf_{n\to+\infty} f(x)$.

e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (fonction périodique de période 2).

i. Graphiquement :



ii. Pour x positif et h supérieur ou égal à 2 : l'intervalle $[x, x+h]$ est un intervalle de longueur $h \geqslant 2$, donc sur cet intervalle, f atteint son minimum 0, et $\varphi_x(h) = 0$.

iii. La fonction φ_x étant constante nulle sur $[2; +\infty[$: $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi_x(h) = 0 = \Phi_x$, et par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi_x = 0 = \liminf_{x \to +\infty} f(x).$$

f) f est de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de 5.a) et 5.b).

i. Soit x un réel positif : pour tout h positif, il est évident que $f(x) \geqslant \min\limits_{u \in [x, x+h]} f(u) \iff f(x) \geqslant \varphi_x(h)$.

ii. Le passage à la limite (qui existe) dans l'inégalité précédente quand h tend vers $+\infty$ donne :

$$f(x) \geqslant \Phi_x$$

iii. On suppose ici que $\ell = \liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$: par définition de la limite $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ell - \varepsilon \leqslant \Phi_x$.

En posant $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0,\ \ell - \varepsilon = \dfrac{\ell}{2} = \varepsilon > 0$, et : $\quad \forall x \geqslant x_0,\ f(x) \geqslant \varepsilon$.

g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x positif, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell \geqslant 0$.

Par définition de la limite en $+\infty$ de g, cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0;\ \forall x \geqslant x_0, \quad \ell - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $x \geqslant x_0$ et tout $h \geqslant 0$:
$\forall u \in [x, x+h], \quad \ell - \varepsilon \leqslant g(u) \leqslant f(u)$, donc $\min\limits_{u \in [x, x+h]} f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$.

Par passage à la limite quand h tend vers $+\infty$, on en déduit : $\quad \forall x \geqslant x_0,\ \Phi_x \geqslant \ell - \varepsilon$.
Et par passage à la limite dans cette dernière inégalité, cette fois quand x tend vers $+\infty$:

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell - \varepsilon.$$

Ce résultat ne dépend plus de x_0, ni de ε d'ailleurs : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$, ce qui implique :

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \ell.$$

(sinon, $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) < \ell$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x) < \ell - \varepsilon$, ce qui est absurde !)

II - Lois sous-exponentielles

Dans la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera comme d'habitude, sous réserve d'existence, $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X.
Si x est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F, on notera systématiquement $\overline{F}$ la queue de la répartition définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout x positif.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\begin{cases} p_X(n) & = P(X=n) \\ p_Y(n) & = P(Y=n) \\ p_{X+Y}(n) & = P(X+Y=n) \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, $[X+Y=n] = \bigcup_{k=0}^{n} [X=k] \cap [Y=n-k]$; par union disjointe, puis par indépendance des v.a.r. X et Y :

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P([X=k] \cap [Y=n-k]) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times P(Y=n-k) \iff p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_Y(n-k)$$

Par analogie, on admet que si X et Y sont deux variables aléatoires rélles positives indépendantes, admettant respectivement les densités f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et continues à droite en 0, la variable $X+Y$ admet une densité $f_X * f_Y$ définie, pour x positif, par

$$(f_X * f_Y)(x) = \int_0^x f_X(u) f_Y(x-u) \mathrm{d}u.$$

(C'est le *produit de convolution* des deux densités).

On notera F_{X+Y} la fonction de répartition de la variable aléatoire $X+Y$.

7. Soit λ un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On note f une densité commune et F leur fonction de répartition. On prendra pour tout x positif ou nul, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

   a) pour tout réel x positif, d'après le cours sur la loi exponentielle :

   $$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{et} \quad \overline{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$$

   b) Pour tout réel positif x : $\forall u \in [0,x],\ u - x \in [0,x]$ donc :

   $$(f*f)(x) = \int_0^x f(u).f(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \lambda.e^{-\lambda u}.\lambda.e^{-\lambda.(x-u)}\mathrm{d}u = \lambda^2. \int_0^x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda^2.x.e^{-\lambda x}$$

   c) La variable aléatoire $X+Y$ est à valeurs positives comme somme de telles variables, donc : pour tout réel positif x,

   $$F_{X+Y} = \int_0^x (f*f)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x t.\lambda.e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

   On réalise ici une intégration par parties en posant :

   $$\begin{array}{lcl} u(t) = t & \longrightarrow & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \lambda.e^{-\lambda t} & \longrightarrow & v(t) = -e^{-\lambda t} \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc par intégration par parties :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_{X+Y}(x) = \lambda.\Big(\Big[-t.e^{-\lambda t}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\Big) = -\lambda.x.e^{-\lambda x} + \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_0^x = 1 - (\lambda x + 1).e^{-\lambda x}$$

   d) Au vu de tous les résultats précédents :

   pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F_{X+Y}}(x) = (\lambda x + 1).e^{-\lambda x}$ et $\dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lambda x + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ puisque $\lambda > 0$.

8. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que X est **à support illimité à droite** si pour tout x positif, $\overline{F}(x) > 0$.

   Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F.

a) Comme les variables aléatoires X et Y sont à valeurs positives : $X+Y \geqslant \max(X,Y)$, donc $[\max(X,Y) > x]$ implique $[X+Y > x]$: $[\max(X,Y) > x] \subset [\max(X,Y) > x]$, et par croissance de la probabilité,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P(\max(X,Y) > x) \leqslant P(X+Y > x) \iff \overline{F_{X+Y}}(x) \geqslant P(\max(X,Y) > x)$$

b) Pour tout réel positif x : $[\max(X,Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$. Comme X et Y sont indépendantes et de même loi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P(\max(X,Y) \leqslant x) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant x) = F^2(x)$$

$$\iff P(\max(X,Y) > x) = 1 - P(\max(X,Y) \leqslant x) = 1 - F^2(x)$$

c) Pour tout réel positif x : $\dfrac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{(1-F(x))(1+F(x))}{1-F(x)} = 1 + F(x)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ puisque F est une fonction de répartition, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-F^2(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \to +\infty} 1 + F(x) = 2$$

d) Au vu de ce qui précède : le résultat de la question 5.g) de la partie I s'applique avec $f : x \mapsto \dfrac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)}$ et $g : \ x \mapsto 1 - F^2(x)$ qui sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$, donc :

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2$$

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

où comme dans les notations précédentes, F_{X+Y} désigne la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positives X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F.

On considère alors deux variables aléatoires réelles positives, indépendantes X et Y de même loi sous-exponentielle.

a) Par définition de la probabilité conditionnelle : $P_{[X+Y>x]}(X > x) = \dfrac{P([X+Y > x] \cap [X > x])}{P(X > x)}$;

or $[X > x]$ implique $[X+Y > x]$, donc $[X+Y > x] \cap [X > x] = [X > x]$, et :

$P_{[X+Y>x]}(X > x) = \dfrac{P(X > x)}{P(X+Y > x)} = \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F_{X+Y}}(x)}$. Ainsi, par inverse de la limite définissant une loi sous-exponentielle :

$$\lim_{x \to +\infty} P_{[X+Y>x]}(X > x) = \frac{1}{2}$$

b) D'après les résultats précédents :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(X+Y > x)}{P(\max(X,Y) > x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{P(X+Y > x)}{P(X > x)} \times \frac{P(X > x)}{P(\max(X,Y) > x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F_{X+Y}}(x)}{\overline{F}(x)} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F}(x)}{1 - F^2(x)} = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

c) Soit x un réel positif quelconque, mais fixé : il est clair que les deux événements $[\max(X,Y) \leqslant x]$ et $[\max(X,Y) > x]$, contraires l'un de l'autre, forment un système complet d'événements, avec lequel la formule des probabilités totales s'écrit pour l'événement $[X+Y > x]$:

$$P(X+Y > x) = P\big([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]\big) + P\big([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) > x]\big)$$

Or : si $[\max(X,Y) > x]$, alors $[X+Y > x]$ l'est aussi : $[\max(X,Y) > x] \subset [X+Y > x]$, donc on a bien :

$$P(X+Y > x) = P\big([X+Y > x] \cap [\max(X,Y) \leqslant x]\big) + P\big([X+Y > x]\big)$$

d) La relation précédente donne :

$$\frac{P([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{P(\max(X,Y)>x)}=\frac{P(X+Y>x)-P(\max(X,Y)>x)}{P(\max(X,Y)>x)}=\frac{P(X+Y>x)}{P(\max(X,Y)>x)}-1$$

donc d'après 9.b) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P([X+Y>x]\cap[\max(X,Y)\leqslant x])}{P(\max(X,Y)>x)}=1-1=0.$$

e) Le résultat précédent exprime que lorsque x devient très grand, le fait que la somme $X+Y$ dépasse x, sera essentiellement dû au fait que l'une des deux variables aléatoires (la plus grande) dépasse elle-même x, de façon très prépondérante par rapport à l'obtention d'une telle valeur supérieure à x par cumul de deux valeurs de X et Y elles-mêmes inférieures à x. L'une des deux variables aléatoires finit presque sûrement par l'emporter sur l'autre.

III - Problèmes de queues

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et F la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour tout λ strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda>0$,

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x=+\infty.$$

10. Soit X une variable aléatoire de densité f. S'il existait le moindre réel $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\overline{F}(x_0)=0$: alors par décroissance et continuité de la fonction d'antirépartition sur $\mathbb{R}_+^*$ (propriétés directement héritées de F puisque $\overline{F}=1-F$), on aurait : $\forall x\geqslant x_0,\ \overline{F}(x)=0 \iff F(x)=1$. La fonction F, constante sur $]x_0;+\infty[$, aurait sur cet intervalle une dérivée f nulle, ce qui rendrait toute intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ convergente !

    Donc une loi à queue lourde est à support illimité à droite.

11. Étude de quelques lois particulières :

    a) Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, alors une densité f de X est bien nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et a pour expression : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\lambda.e^{-\lambda x}$.

    Mais alors : pour tout réel μ strictement compris entre 0 et λ :

    $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)e^{\mu x}\mathrm{d}x=\lambda\int_1^{+\infty} e^{(\mu-\lambda)x}\mathrm{d}x$ est une intégrale impropre convergente, puisque $\mu-\lambda<0$.

    Une loi exponentielle n'est donc pas à queue lourde.

    b) Soit f la fonction d'expression $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ si $x\geqslant 0$, et $f(x)=0$ pour tout $x<0$.

    i. La fonction f est bien positive et continue sur $\mathbb{R}_-^*$ comme fonction nulle, positive sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est donc positive sur tout $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. De plus :

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\Big[-\frac{1}{1+x}\Big]_0^a=\lim_{a\to+\infty}-\frac{1}{1+a}+1=1$$

    Donc f est bien une densité de probabilité.

    ii. Soit λ strictement positif fixé : $(1+x)^2\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$, et $x^2=o(e^{\lambda x})$ par croissances comparées, vu que $\lambda>0$: cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2}=+\infty$; il existe donc bien un réel $x_0>0$ à partir duquel :

    $$\forall x\geqslant x_0,\quad \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2}\geqslant 1.$$

    iii. Le résultat précédent implique que la fonction $x\mapsto f(x)e^{\lambda x}$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc ne vérifie pas le critère nécessaire de convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\lambda x}\mathrm{d}x$: cela suffit pour pouvoir affirmer qu'au contraire, cette intégrale est toujours divergente, et ce quel que soit $\lambda>0$: la loi définie par f est bien à queue lourde.

c) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

i. On vérifie que X est une variable à densité par le calcul de sa fonction de répartition F_X.
Il est d'abord clair que $X = e^Z$ est à valeurs strictement positives, donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leqslant x) = P(e^Z \leqslant x) \\ &= P(Z \leqslant \ln(x)) \qquad \text{par stricte croissance et continuité de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \Phi\big(\ln(x)\big) \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

La fonction $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \Phi\big(\ln(x)\big) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
Comme : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \Phi(X) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi\big(\ln(x)\big) = 0 = F_X(0)$, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$; finalement, X est bien une variable à densité, et une densité f de X est obtenue par dérivation de F_X sur $\mathbb{R}_+^*$; en 0, on donne à f la valeur arbitraire 0 et ainsi :

$$\forall x \in]-\infty; 0],\ f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x}.\Phi'\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-[\ln(x)]^2/2}$$

ii. Soit λ strictement positif. Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on écrit :
$\lambda x - \frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x) = x\left[\lambda - \frac{1}{2}\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right]$, où par croissances comparées :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda - \frac{1}{2}\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = \lambda > 0$, et ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\lambda - \frac{1}{2}\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right] = +\infty = \lim_{x \to +\infty} \lambda x - \frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x)$$

iii. Soit $\lambda > 0$; pour tout x strictement positif, on peut écrire :
$f(x)e^{\lambda x} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-[\ln(x)]^2/2} \cdot e^{\lambda x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\lambda x - \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 - \ln(x)}$ puisque $\frac{1}{x} = x^{-1} = e^{-\ln(x)}$. Comme d'après la question précédente, $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda x - \frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2 - \ln(x) = +\infty$, alors par composition avec exp qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$et par produit avec $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)e^{\lambda x} = +\infty$,donc il existe bien un réel x_0 strictement positif tel que :

$$\forall x \geqslant x_0, \quad f(x)e^{\lambda x} \geqslant 1.$$

iv. Là enncore, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$ ne vérifie pas le critère nécessaire, non suffisant de convergence de l'intégrale imporpre $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$, à savoir : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)e^{\lambda x} = 0$, impossible quel que soit $\lambda > 0$.
La loi de X est bien à queue lourde.

On désigne désormais par X une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition associée, et on pose alors $r(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ et $R(x) = \ln\big(\overline{F}(x)\big)$, pour x positif.

12. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue à droite en 0, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x r(y)\mathrm{d}y &= \int_0^x \frac{f(y)}{1 - F(y)}\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{F'(y)}{1 - F(y)}\mathrm{d}y \\ &= \Big[-\ln\big(1 - F(y)\big)\Big]_0^x = -\ln\big(1 - F(x)\big) + \ln\big(1 - F(0)\big) \end{aligned}$$

$$= -\ln\left(\overline{F}(x)\right) = R(x)$$

puisque $F(0) = 0$, ce qui donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln\left(\overline{F}(x)\right) = -\int_0^x r(y)\mathrm{d}y \iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y)\mathrm{d}y\right)$$

13. On suppose que $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$.

a) La fonction $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et se prolonge par continuité en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{R(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x r(y)\mathrm{d}y = r(0) = \dfrac{f(0)}{\overline{F}(0)} = f(0)$.

Cette fonction est également à valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ R(x) = \displaystyle\int_0^x r(y)\mathrm{d}y \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, la fonction $r:\ y \mapsto \dfrac{f(y)}{\overline{F}(y)}$ étant continue, positive sur $\mathbb{R}^+$.

Le résultat de la question 5.f)iii. s'applique ici avec cette fonction, qui assure qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ \frac{R(x)}{x} \geqslant \varepsilon \iff \forall x \geqslant x_0,\ R(x) \geqslant \varepsilon x \iff \forall x \geqslant x_0,\ -\ln\left(\overline{F}(x)\right) \geqslant \varepsilon x \iff \forall x \geqslant x_0,\ \overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon x}$$

b) Soit λ tel que $0 < \lambda < \varepsilon$. Soit A strictement positif donné ; dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & e^{\lambda x} & \longrightarrow & u'(x) & = & \lambda . e^{\lambda x} \\ v'(x) & = & f(x) & \longrightarrow & v(x) & = & -\overline{F}(x) \end{array}$$

Les fonctions u et v (ou du moins leur restriction à $\mathbb{R}_+$) sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x = \Big[-e^{\lambda x}\overline{F}(x)\Big]_0^A + \int_0^A \lambda e^{\lambda x}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$$
$$= -e^{\lambda A}\overline{F}(A) + e^0\overline{F}(0) + \lambda\int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$$

Ce qui est bien : $\displaystyle\int_0^A e^{\lambda x} f(x)\mathrm{d}x = 1 - \overline{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda\int_0^A e^{\lambda x}\overline{F}(x)\mathrm{d}x$ puisque $\overline{F}(0) = P(X > 0) = 1$.

c) Avec les notations introduites à la question 13.a) : pour $A > x_0$, on peut écrire : $0 \leqslant \overline{F}(A)e^{\lambda A} \leqslant e^{(\lambda-\varepsilon)A}$, où $\lambda - \varepsilon < 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors d'écrire : $\lim\limits_{A\to+\infty} \overline{F}(A)e^{\lambda A} = 0$.

De plus, l'inégalité : $\forall x \geqslant x_0,\ (0 \leqslant)\ \overline{F}(x)e^{\lambda x} \leqslant e^{(\lambda-\varepsilon)x}$ où $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} e^{(\lambda-\varepsilon)x}\mathrm{d}x$ converge puisque $\lambda - \varepsilon < 0$, assure par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, que $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \overline{F}(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ converge.

Par continuité de la fonction $x \mapsto \overline{F}(x)e^{\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{F}(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ est convergente, donc finalement :

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ converge, donc la loi de X n'est pas à queue lourde.

14. On rappelle l'inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant l'espérance $E(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a

$$P(Z \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}E(Z)$$

On suppose maintenant que la loi de X n'est pas à queue lourde.

a) Par négation de la proposition définissant une loi à queue lourde : il existe $\lambda > 0$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$. Comme la fonction $x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ (produit de deux fonctions positives sur cet intervalle) et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, cela revient à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{\lambda x}\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc que $c = E\big(e^{\lambda X}\big)$ existe, d'après le théorème de transfert.

b) Soit x strictement positif : la variable aléatoire $Z = e^{\lambda X}$ est positive et admet une espérance, donc l'inégalité de Markov s'applique à celle-ci et donne, pour $\alpha = e^{\lambda x} > 0$:

$$P\big(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}\big) \leqslant \frac{1}{e^{\lambda x}}E\big(e^{\lambda X}\big) \iff P(X > x) \leqslant e^{-\lambda x}\cdot c \iff \overline{F}(x) \leqslant c\cdot e^{-\lambda x}$$

L'égalité $P\big(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}\big) = P(X > x)$ étant assurée par la stricte croissance et bijectivité de exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

c) De l'inégalité précédente, on tire, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\forall x > 0,\ \ln\big(\overline{F}(x)\big) \leqslant \ln(c) - \lambda x \iff R(x) = -\ln\big(\overline{F}(x)\big) \geqslant \lambda x - \ln(c) \iff \dfrac{R(x)}{x} \geqslant \lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$.

On cherche ici à se rapporcher de la situation de la question 5.g) de la Partie I, avec $f :\ x \mapsto \dfrac{R(x)}{x}$ bien continue sur $\mathbb{R}_+$ (après prolongement par continuité en 0), à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ comme on a déjà eu l'occasion de le justifier ; il faut alors prendre la fonction $g :\ x \mapsto \max\big(\lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}, 0\big)$ pour avoir une deuxième fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant g(x)$.

Lorsque $x \to +\infty$: $\lambda - \dfrac{\ln(c)}{x}$ tend vers $\lambda > 0$, donc c'est aussi la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$: le résultat de la question 5.g) de la partie I s'applique, qui permet d'affirmer que $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \frac{R(x)}{x} \geqslant \lambda > 0$.

On a donc prouvé, dans les questions 12. à 14., l'équivalence :

$$X \text{ n'est pas à queue lourde} \iff \liminf_{n\to+\infty} \frac{R(x)}{x} > 0.$$

La condition $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \frac{R(x)}{x} > 0$ n'est pas forcément agréable à vérifier pour prouver qu'une loi possède une queue lourde. De ce fait, on introduit une autre notion plus simple dont on va montrer qu'elle suffit à assurer cette propriété.

15. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. On dit que la loi de X possède une **queue longue** si pour tout ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que pour tout réel $x \geqslant A$, et tout réel $y \in [0;1]$, on a :

$$\left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon.$$

Dans la suite, F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une telle loi.

a) La définition qui précède est exactement la définition de la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 = 0$

$\displaystyle\iff \lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} = 0$, sachant que le réel y ne dépend ni de ε, ni de A : il peut être fixé quelconque dans $[0;1]$ à n'importe quel moment.

b) Il suffit de reprendre ici la relation entre F et$\overline{F}$:

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \overline{F}(x+y) - \overline{F}(x) = 1 - F(x+y) - \big(1 - F(x)\big) = F(x) - F(x+y)$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x) - F(x+y)}{\overline{F}(x)} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\overline{F}(x)} = 0$ (le changement des signes au numérateur correspond à une multiplication par (-1), sans effet ici parce que la limite est nulle !)

c) Pour tout y de $[0;1]$, pour x au voisinage de $+\infty$:

$P_{[X>x]}(X > x+y) = \dfrac{P([X > x] \cap [X > x+y])}{P(X > x)} = \dfrac{P(X > x+y)}{P(X > x)}$ car $[X > x+y]$ implique $[X > x]$, donc :

$P_{[X>x]}(X > x+y) - 1 = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 = \dfrac{\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}$ qui tend vers 0 d'après b), ce qui prouve bien que :

$$\forall y \in [0;1], \quad \lim_{x\to+\infty} P_{[X>x]}(X > x+y) = 1.$$

d) Pour x au voisinage de $+\infty$:

$R(x+1) - R(x) = -\ln\left(\overline{F}(x+1)\right) + \ln\left(\overline{F}(x)\right) = -\ln\left(\dfrac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right).$

Comme on l'a vu en a) : pour tout y de $[0;1]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$, ce qui est en particulier le cas pour $y = 1$, et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1 \iff \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right) = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \left(R(x+1) - R(x)\right) = 0.$$

16. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à queue longue.

a) Soit λ strictement positif fixé.

i. Puisque $\lambda > 0$, alors $e^{-\lambda/2}$ appartient à $]0;1[$, donc peut s'écrire sous la forme : $e^{-\lambda/2} = 1 - \varepsilon$, où concrètement $\varepsilon = 1 - e^{-\lambda/2}$ appartient lui-même à $]0;1[$.

Avec cette valeur de ε : la définition d'une loi à queue longue s'applique, qui garantit l'existence d'un réel ici noté x_0, tel que :

$$\forall x \geqslant x_0,\ \forall y \in [0;1], \quad \left|\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1\right| < \varepsilon \iff 1 - \varepsilon < \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} < 1 + \varepsilon \Longrightarrow e^{-\lambda/2} < \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}$$

ce qui donne bien, par multiplication par $\overline{F}(x) > 0$, l'inégalité vraie pour tout $x \geqslant x_0$ et tout y de $[0;1]$:

$$\overline{F}(x+y) \geqslant \overline{F}(x)e^{-\lambda/2}$$

ii. Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\overline{F}(x_0+n) \geqslant \overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n}{2}}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: l'inégalité de la question précédente, appliquée avec $x = x_0$ et $y = 1$, donne :

$\overline{F}(x_0+1) \geqslant \overline{F}(x_0)e^{-\frac{\lambda}{2}}$, ce qui est bien la propriété $\mathcal{P}(1)$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certaine $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit : "$\overline{F}(x_0+n+1) \geqslant \overline{F}(x_0)e^{-\lambda\frac{n+1}{2}}$".

L'inégalité de la question précédente, appliquée avec $x = x_0 + n \geqslant x_0$ et $y = 1$, donne : $\overline{F}(x_0+n+1) \geqslant \overline{F}(x_0+n)e^{-\frac{\lambda}{2}}$.

Or (H.R.) : $\overline{F}(x_0+n) \geqslant e^{-\lambda\frac{n}{2}} \Longrightarrow \overline{F}(x_0+n)e^{-\frac{\lambda}{2}} \geqslant e^{-\lambda\frac{n+1}{2}}$ (multiplication des deux membres par $e^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$).

Ainsi par transitivité, on a bien : $\overline{F}(x_0+n+1) \geqslant e^{-\lambda\frac{n+1}{2}}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est intialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

iii. De l'inégalité précédente, on déduit (multiplication par $e^{\lambda(x_0+n)} > 0$) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n) \geqslant e^{\lambda(x_0+\frac{n}{2})}$. Puisque $\lambda > 0$ et $x_0 > 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda(x_0 + \frac{n}{2}) = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\lambda(x_0+\frac{n}{2})} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

On conclut par comparaison de limites, que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\lambda(x_0+n)}\overline{F}(x_0+n) = +\infty$$

b) Il est clair que le résultat précédent prouve que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$: pour tout réel $M > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $e^{\lambda(x_0+N)}\overline{F}(x_0+N) > M$, donc pour tout $M > 0$, il existe un réel x $(= x_0 + N)$ tel que $e^{\lambda x}\overline{F}(x) > M$.

c) On suppose, comme le suggère l'énoncé, que $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$; alors le résultat de 13.a) s'applique, qui assure l'existence de deux réels strictement positifs x_0 et ε tels que : $\forall x \geqslant x_0,\ \overline{F}(x) \leqslant e^{-\varepsilon x}$, qui implique : $\forall \lambda > 0,\ \forall x \geqslant x_0,\ e^{\lambda x}\overline{F}(x) \leqslant e^{(\lambda-\varepsilon)x}$.

Il suffit alors de prendre $\lambda < \varepsilon$ pour avoir : $\forall x \geqslant x_0,\ e^{\lambda x}\overline{F}(x) \leqslant e^{(\lambda-\varepsilon)x} \leqslant 1$ puisque $(\lambda-\varepsilon)x \leqslant 0$. La fonction $x \mapsto e^{\lambda x}\overline{F}(x)$ est alors bornée sur $[x_0;+\infty[$; comme elle est continue sur $[0;x_0]$, elle est aussi bornée sur ce segment, donc finalement bornée sur $\mathbb{R}_+$. C'est bien sûr absurde vu ce qu'on a obtenu en b) ! L'hypothèse $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} > 0$ est donc absurde, et ainsi : $\liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$.

d) Les questions 13. et 14. ont établi l'équivalence :

$$\text{La loi de } X \text{ possède une queue lourde} \iff \liminf_{n\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0 \qquad ,$$

et on vient de voir que : la loi de X possède une queue longue $\Longrightarrow \liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x)}{x} = 0$.

On a bien l'implication :

$$\text{La loi de } X \text{ possède une loi à queue longue} \Longrightarrow \text{la loi de } X \text{ possède une loi à queue lourde} \qquad .$$

⋆ ⋆ ⋆ FIN DU SUJET ⋆ ⋆ ⋆