MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2006

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Notation introduite par l'énoncé : si a et b sont deux nombres réels, on désigne par $a \wedge b$ le plus petit de ces deux nombres. Toutes les variables aléatoires considérées sont définie sur un même espace probabilisé $(\Omega, , \mathcal{F}, P)$.

Problème 1 : Distance en variation et couplage.

Partie I : Distance en variation.

Dans cette première partie on considère un ensemble discret $\mathcal{K}$ dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à $\mathbb{N}$ tout entier. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{K}$.
Soient P et Q deux lois de probabilité sur $\mathcal{K}$. Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = P(\{k\})$. Alors pour tout $k \in \mathcal{K}$, $p_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k = 1$. Tout probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k\in\mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{k\in A} p_k$.

Lorsque $\mathcal{K}$ est fini, on définit la **distance en variation** entre les probabilités P et Q par :

$$(i) \qquad D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k|$$

1. Lorsque $\mathcal{K} = \{0;1\}$:

   $$D(P,Q) = \frac{1}{2}\big(|p_0-q_0|+|p_1-q_1|\big) = \frac{1}{2}\big(|(1-p_1)-(1-q_1)|+|p_1-q_1|\big) = \frac{1}{2}\big(|q_1-p_1|+|p_1-q_1|\big) = |p_1-q_1|$$

   puisque l'univers se réduit à deux issues, contraires l'une de l'autre.
2. Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$: pour tout $k \in \mathcal{K} = \mathbb{N}$, $|p_k - q_k| \leqslant |p_k| + |-q_k| = p_k + q_k$ d'après l'inégalité triangulaire, et puisque p_k et q_k sont positifs. Mais les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} p_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} q_k$ sont alors convergentes et de somme totale 1, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(p_k+q_k)$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}|p_k-q_k|$ est également convergente.

   On peut donc étendre la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.
3. Pour tout événement A de $\mathcal{A}$: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -Q(A) \leqslant 0$, donc par sommation membre à membre des deux inégalités :

   $$-1 \leqslant P(A) - Q(A) \leqslant 1 \iff 0 \leqslant |P(A) - Q(A)| \leqslant 1$$

4. Soit $A \in \mathcal{A}$:

   $$\Big|\sum_{k\in A}(p_k-q_k)\Big| + \Big|\sum_{k\in\overline{A}}(p_k-q_k)\Big| = \Big|\sum_{k\in A}p_k - \sum_{k\in A}q_k\Big| + \Big|\sum_{k\in\overline{A}}p_k - \sum_{k\in\overline{A}}q_k\Big| = \big|P(A)-Q(A)\big| + \big|P(\overline{A})-Q(\overline{A})\big|$$

$$= \big|P(A) - Q(A)\big| + \big|1 - P(A) - (1 - Q(A))\big|$$
$$= \big|P(A) - Q(A)\big| + \big|Q(A) - P(A)\big|$$
$$= 2\big|P(A) - Q(A)\big|$$

5. En remarquant alors que :
$$2D(P,Q) = \sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k| = \sum_{k\in A} |p_k - q_k| + \sum_{k\in\overline{A}} |p_k - q_k|$$
L'inégalité triangulaire intervient alors pour qu'on puisse écrire :
$$2\big|P(A) - Q(A)\big| = \Big|\sum_{k\in A} p_k - q_k\Big| + \Big|\sum_{k\in\overline{A}} (p_k - q_k)\Big| \leqslant \sum_{k\in A} |p_k - q_k| + \sum_{k\in\overline{A}} |p_k - q_k| = 2D(P,Q)$$
Ce qui donne bien en effet : $\quad (ii) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \big|P(A) - Q(A)\big| \leqslant D(P,Q)$.

6. Soit $A_0 = \big\{k \big|\ k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geqslant p_k\big\}$: alors $\overline{A_0} = \big\{k \big|\ k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k < p_k\big\}$, donc : pour tout $k \in A_0$, $(p_k - q_k) \leqslant 0$ et pour tout $k \in \overline{A_0}$, $(p_k - q_k) > 0$, et :
$$2\big|P(A_0) - Q(A_0)\big| = \Big|\sum_{k\in A_0} (p_k - q_k)\Big| + \Big|\sum_{k\in\overline{A_0}} (p_k - q_k)\Big| = -\sum_{k\in A_0} (p_k - q_k) + \sum_{k\in\overline{A_0}} (p_k - q_k)$$
$$= \sum_{k\in A_0} |p_k - q_k| + \sum_{k\in\overline{A_0}} |p_k - q_k| = \sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k| = 2D(P,Q)$$
et on a bien montré que A_0 réalise l'égalité : $\quad \big|P(A_0) - Q(A_0)\big| = D(P,Q)$.

7. La partie A_0 est très pratique dans cette question, puisque : $\quad \forall k \in A_0,\ p_k \wedge q_k = p_k$, et $\forall k \in \overline{A_0},\ p_k \wedge q_k = q_k$; on peut donc écrire :
$$\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k = \sum_{k\in A_0} p_k \wedge q_k + \sum_{k\in\overline{A_0}} p_k \wedge q_k = \sum_{k\in A_0} p_k + \sum_{k\in\overline{A_0}} q_k = P(A_0) + Q(\overline{A_0})$$
$$= P(A_0) + 1 - Q(A_0) = 1 + \big(P(A_0) - Q(A_0)\big)$$
Or : $\quad P(A_0) - Q(A_0) = \sum\limits_{k\in A_0} (p_k - q_k) \leqslant 0$ puisque pour tout $k \in A_0$, $q_k \geqslant p_k$, donc :
$P(A_0) - Q(A_0) = -\big|P(A_0) - Q(A_0)\big| = -D(P,Q)$, et on peut donc réécrire ce qui précède sous la forme :
$$\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k = 1 - D(P,Q) \iff D(P,Q) = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k$$

8. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires tel que X est de loi P, et Y est de loi Q, ce qui signifie :
$$\forall k \in \mathcal{K},\ P(X = k) = p_k \quad \text{et} \quad P(Y = k) = q_k.$$
Considérons l'événement : $\quad [X = Y] = \bigcup\limits_{k\in\mathcal{K}} [X = k] \cap [Y = k]$.

L'union étant disjointe, il vient : $P(X = Y) = \sum\limits_{k\in\mathcal{K}} P\big([X = k] \cap [Y = k]\big)$, où on ne sait pas calculer $P\big([X = k] \cap [Y = k]\big)$; par contre, on peut écrire :

Pour tout $k \in \mathcal{K}$, $[X = k] \cap [Y = k] \subset [X = k]$ et $[X = k] \cap [Y = k] \subset [Y = k]$, donc par croissance de la probabilité :
$$P\big([X = k] \cap [Y = k]\big) \leqslant p_k \quad \text{et} \quad P\big([X = k] \cap [Y = k]\big) \leqslant q_k \quad \Longrightarrow \quad P\big([X = k] \cap [Y = k]\big) \leqslant p_k \wedge q_k$$
Et ainsi, par sommation de cette dernière inégalité :
$$P(X = Y) \leqslant \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k \iff 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} \leqslant 1 - P(X = Y) \iff D(P,Q) \leqslant P(X \neq Y)$$

Partie II : Couplage Binomiale-Poisson

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda < n$.

1. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n. On sait alors, d'après le cours, que Y_i suit encore une loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramètres des Y_i, soit : $n \times \dfrac{\lambda}{n} = \lambda$.

2. La fonction $f : x \mapsto 1 - (1-x)\exp(x)$ est bien définie et dérivable sur $[0,1]$, avec : $\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = 0 - (-1).\exp(x) - (1-x).\exp(x) = x\exp(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur $[0,1]$, et ainsi :
$$\forall x \in [0,1], \quad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad CQFD$$

Soient $U_1, \ldots, U_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$.

On suppose que les variables $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ de la question II.1.

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $X_i = 0$ si $U_i = Y_i$ et $X_i = 1$ sinon.

3. Par définition, $x_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_i est une variable de Bernoulli, et son paramètre est : $P(X_i = 1) = P(U_i \neq Y_i) = 1 - P(U_i = Y_i = 0) = 1 - P(U_i = 0) \times P(Y_i = 0)$ puisque U_i et Y_i sont indépendantes.

   Au vu des lois suivies par U_i et Y_i : $\quad P(U_i = 0) = 1 - f(\lambda/n) = \big(1 - \dfrac{\lambda}{n}\big).e^{\lambda/n}$ et $P(Y_i = 0) = e^{-\lambda/n}$,

   donc : $\qquad P(X_i = 1) = 1 - \big(1 - \dfrac{\lambda}{n}\big) \times e^{\lambda/n} \times e^{-\lambda/n} = \dfrac{\lambda}{n}$.

   La variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est alors la somme de n v.a.r. de Bernoulli indépendantes (car X_i ne dépend que de Y_i et U_i, qui sont indépendantes de toutes les autres variables aléatoires de ces deux familles), de même probabilité de succès $\dfrac{\lambda}{n}$: elle suit donc la loi binomiale de paramètres $\big(n, \dfrac{\lambda}{n}\big)$.

4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$; puisque X_i est une variable de Bernoulli, et Y_i est une variable de Poisson :
$$[X_i = Y_i] = \big([X_i = 0] \cap [Y_i = 0]\big) \cup \big([X_i = 1] \cap [Y_i = 1]\big)$$
   où : $\quad [X_i = 0] = [U_i = 0] \cap [Y_i = 0]$, donc $[X_i = 0] \cap [Y_i = 0] = [U_i = 0] \cap [Y_i = 0]$,

   et : $\quad [X_i = 1] \cap [Y_i = 1] = \big([U_i \neq 0] \cup [Y_i \neq 0]\big) \cap [Y_i = 1] = \big([U_i = 1] \cap [Y_i = 1]\big) \cup [Y_i = 1] = [Y_i = 1]$ puisque $\big([U_i = 1] \cap [Y_i = 1]\big) \subset [Y_i = 1]$, donc :
$$[X_i = Y_i] = \big([U_i = 0] \cap [Y_i = 0]\big) \cup [Y_i = 1]$$
   par union disjointe et indépendance de U_i et Y_i, on obtient :
$$P(X_i = Y_i) = P(U_i = 0) \times P(Y_i = 0) + P(Y_i = 1) = \big(1 - \frac{\lambda}{n}\big).e^{\lambda/n}.e^{-\lambda/n} + \frac{\lambda}{n}.e^{-\lambda/n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}.e^{-\lambda/n}$$
   L'inégalité classique : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ 1 + x \leqslant \exp(x)$ vient de la convexité de exp sur $\mathbb{R}$, dont la courbe est donc entièrement située au-dessus de chacun de ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0 qui a pour équation : $\quad y = \exp'(0).(x - 0) + \exp(0) \iff y = x + 1$.

   Elle donne ici : $\quad e^{-\lambda/n} \geqslant 1 - \dfrac{\lambda}{n} \iff 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{\lambda}{n}.e^{-\lambda/n} \geqslant 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{\lambda}{n}.\big(1 - \dfrac{\lambda}{n}\big) = 1 - \dfrac{\lambda^2}{n^2}$, donc :
$$P(X_i = Y_i) \geqslant 1 - \frac{\lambda^2}{n^2} \iff \frac{\lambda^2}{n^2} \geqslant 1 - P(X_i = Y_i) \iff P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$$

5. L'inclusion évidente : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = Y_i] \subset \Big[\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big]$ donne par passage au complémentaire :

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big] \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = Y_i]} \iff \Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big] \subset \bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]$$

La propriété de croissance de la probabilité donne alors en effet :

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) \leqslant P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]\Big)$$

6. L'inégalité classique pour deux événements A et B :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geqslant 0} \leqslant P(A) + P(B)$ se généralise ici en :

$\displaystyle P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i \neq Y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}$, d'après 4.

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$: le résultat de I.8. s'applique pour donner :

$$D\big(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)\big) \leqslant P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]\Big) \leqslant \frac{\lambda^2}{n} \qquad CQFD$$

7. L'encadrement : $\displaystyle 0 \leqslant D\big(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)\big) \leqslant \frac{\lambda^2}{n}$ donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} D\big(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)\big) = 0$.

Ce résultat redonne la convergence en loi de la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, en effet :
Si $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et si $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |P(Z_n = k) - P(Z = k)| \leqslant 2D\big(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)\big)$ donc toujours par encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = k) = P(Z = k)$$

Problème 2 : Couplage exponentielle-normale

Dans ce problème, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ a pour densité φ et pour fonction de répartition Φ.

On note f une densité de la loi exponentielle de paramètre 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

On définit également, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = -\ln\big(1 - \Phi(x)\big)$ et $Y = g(X)$.
On admet que X possède des moments de tout ordre.

Partie I : Quantiles gaussiens

1. La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction φ : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$: Φ est donc continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$; et comme toute fonction de répartition, elle vérifie $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$, donc d'après le théorème éponyme, Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$. On note Φ^{-1} sa bijection réciproque.

2. Conséquence de ce qui précède : pour tout $x \in R$, $0 < \Phi(x) < 1$, donc $0 < 1 - \Phi(x) < 1$ et $\ln\big(1-\Phi(x)\big) < 0 \iff -\ln\big(1-\Phi(x)\big) > 0$, ce qui assure que $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à valeurs positives.

   On en déduit que : $\quad \forall x \in]-\infty, 0],\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0$.

   Pour tout $x > 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\big(-\ln(1-\Phi(X)) \leqslant x\big) = P\big(\ln(1-\Phi(X)) \geqslant -x\big) = P\big(1-\Phi(X) \geqslant e^{-x}\big)$$

par stricte croissance et bijectivité de exp de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$

$$= P\big(1-e^{-x} \geqslant \Phi(X)\big) = P\big(\Phi^{-1}(1-e^{-x}) \geqslant X\big)$$

par stricte croissance et bijectivité de Φ de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ qui contient $1-e^{-x}$ pour tout $x>0$

$$= P\big(X \leqslant \Phi^{-1}(1-e^{-x})\big) = \Phi\big(\Phi^{-1}(1-e^{-x})\big) = 1-e^{-x}$$

   Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, et on reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, loi que suit donc Y.

3. a) Pour tout $x > 0$: $\quad 1 - \Phi(x) = P(X > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$.

   Soit alors $A > x$; on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, en posant :

$$\begin{array}{lll} u(t) = \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} & \longrightarrow & u'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{-t^2/2} = -t\varphi(t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} & \longrightarrow & v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A - \int_x^A \varphi(t)\mathrm{d}t = -\frac{\varphi(A)}{A} + \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^A \varphi(t)\mathrm{d}t$$

   Lorsque A tend vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\varphi(A)}{A} = 0$; l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $1-\Phi(x)$.

   Pour tout $t \geqslant x$: $0 < \dfrac{\varphi(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\varphi(t)$, donc d'après ce qu'on vient de dire, par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. On peut donc passer à la limite quand A tend vers $+\infty$ dans la formule d'intégration par parties, et on obtient ainsi :

$$\forall x > 0,\quad \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \iff 1-\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

   b) Démontrons l'une après l'autre les deux inégalités demandées :

   - Pour tout $x > 0$: sur $[x;+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ est continue et positive, d'intégrale convergente sur cet intervalle. La propriété de positivité de l'intégrale assure alors que pour tout $x > 0$: $\quad \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t > 0$, et donc :

$$\forall x > 0,\quad 1-\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \iff x\big(1-\Phi(x)\big) \leqslant \varphi(x) \underset{\varphi(x)>0}{\iff} \frac{x\big(1-\Phi(x)\big)}{\varphi(x)} \leqslant 1.$$

- Suivons pour la minoration, l'indication de l'énoncé : pour tout $x > 0$ et tout $t \in [x, +\infty[$, $t \geqslant x$ donc $t^3 \geqslant x^3$ par croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$; on en déduit : $\quad \forall t \in [x, +\infty[,\ \dfrac{t}{x^3} \geqslant \dfrac{1}{t^2}$, en divisant les deux membres à la fois par $x^3 > 0$ et par $t^2 > 0$.

  Et comme φ est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x > 0,\ \forall t \in [x, +\infty[,\quad \frac{\varphi(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{x^3}.t\varphi(t)$$

  Les fonctions concernées sont continues sur $[x, +\infty[$. On a vu que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge ; l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t$ converge également, on peut même la calculer explicitement :

$$\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^A t.e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-e^{-t^2/2} \Big]_x^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big(-e^{-A^2/2} + e^{-x^2/2} \big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \varphi(x)$$

  On peut donc appliquer la propriété de croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), qui donne :

$$\forall x > 0,\quad \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^3} \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t \iff \frac{\varphi(x)}{x} - 1 + \Phi(x) \leqslant \frac{1}{x^3}\varphi(x)$$

$$\iff \frac{1}{x}\varphi(x)\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \leqslant 1 - \Phi(x) \iff 1 - \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{x\big(1 - \Phi(x)\big)}{x}$$

Et on a bien démontré l'encadrement : $\quad (E)\quad 1 - \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{x\big(1 - \Phi(x)\big)}{\varphi(x)} \leqslant 1 \quad$ pour tout $x > 0$.

c) L'encadrement précédent et le fait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - 0 = 1$, donnent sans difficulté, d'après le théorème du même nom :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\big(1 - \Phi(x)\big)}{\varphi(x)} = 1 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \Phi(x)}{\dfrac{\varphi(x)}{x}} = 1 \iff 1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

d) Pour tout réel $x > 1$: $\dfrac{1}{x^2} < 1 \iff 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0$, donc on peut appliquer la fonction ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, aux trois membres de (E), pour obtenir :

$$\ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \leqslant \ln\Big(\frac{x\big(1 - \Phi(x)\big)}{\varphi(x)}\Big) \leqslant 0 \iff \ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \leqslant \ln(x) + \ln\big(1 - \Phi(x)\big) - \ln(\varphi(x)) \leqslant 0$$

Comme $\ln\big(1 - \Phi(x)\big) = -g(x)$ et $\ln\big(\varphi(x)\big) = \ln\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\Big) = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \dfrac{x^2}{2}$, on a bien obtenu :

$$\forall x > 1,\quad \ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \leqslant \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leqslant 0$$

En divisant les trois membres par $x^2 > 0$, on obtient :

$$\forall x > 1,\quad \frac{1}{x^2}\ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) \leqslant \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \leqslant 0$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) = 0 \times \ln(1) = 0$, le théorème d'encadrement assure à nouveau que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{g(x)}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2}\ln(2\pi) + \dfrac{1}{2} = 0\,;$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2}\ln(2\pi) = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1 \iff g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Partie II : Inégalité de transport

On définit une application h sur $[0,+\infty[$ par : $\quad h(t) = t\ln(t) - t + 1$ pour tout $t > 0$, et $h(0) = 1$.

1. La fonction h est d'abord dérivable,, donc continue sur $]0,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions de référence qui le sont.

   De plus : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) - t + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$, soit : $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = h(0)\,$; la fonction h est donc également continue en 0, donc sur $[0;+\infty[$.

   $$\forall t > 0 : \quad h'(t) = 1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t} - 1 + 0 = \ln(t)$$

   (on reconnaît en fait en h une primitive de ln sur $]0,+\infty[$). Le tableau de variations de h est donc le suivant :

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Pour tout $t > 0$: $\quad h(t) = t\big(\ln(t) - 1\big) + 1$, où $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.

   D'après le tableau, l'intervalle-image de $[0,+\infty[$ par la fonction continue h est bien $[0,+\infty[$.

Sous réserve qu'elle converge, on note $K(f,\varphi)$ la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) h\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x$.

On désire vérifier l'inégalité (dite **de transport**) suivante :

$$(iv) \qquad E\big((X-Y)^2\big) \leqslant 2K(f,\varphi)$$

2. Comme on l'a déjà vu : la fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, donc $x \mapsto 1 - \Phi(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $]0,1[$ encore, sur lequel ln est dérivable : par composition, $g :\ x \mapsto -\ln\big(1-\Phi(x)\big)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\frac{0 - \Phi'(x)}{1 - \Phi(x)} = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}$$

   donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x).f\big(g(x)\big) = \dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}.e^{\ln(1-\Phi(x))} = \dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \times \big(1 - \Phi(x)\big) = \varphi(x).$

3. Examinons plus précisément la fonction $x \mapsto \varphi(x) h\Big(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)$:

   Pour tout $x \in]-\infty, 0]$: $\quad \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, donc $\varphi(x).h\Big(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\Big) = \varphi(x) \times 1.$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge (et vaut $\frac{1}{2}$), donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x).h\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x$ converge (et vaut $\frac{1}{2}$ aussi).

Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\varphi(x).h\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big) = \varphi(x) \times \Big[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big) - \frac{f(x)}{\varphi(x)} + 1\Big] = f(x).\ln\big(\sqrt{2\pi}.e^{-x+x^2/2}\big) - f(x) + \varphi(x)$$

$$= \big(\frac{1}{2}\ln(2\pi) - 1\big).f(x) - xf(x) + \frac{1}{2}x^2.f(x) + \varphi(x)$$

Chacune des intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ converge d'après le cours qui garantit l'existence de l'espérance et de la variance, donc du moment d'ordre 2 d'une loi exponentielle dont f est une densité.

L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge également, donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi(x).\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x = K(f,\varphi)$ est bien convergente.

Au vu des calculs précédents, on est amené à écrire :

$$K(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x).h(0)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) \times \Big[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big) - \frac{f(x)}{\varphi(x)} + 1\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \Big[f(x)\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big) - f(x) + \varphi(x)\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(x)\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Or f est une densité de probabilité nulle sur $]-\infty,0[$, donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ qui est aussi la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$, les deux dernière intégrales se compensent donc.

On souhaite alors poser le changement de variable $x = g(u)$, et pour cela on complète l'étude de g sur son domaine $\mathbb{R}$:

$\forall u \in \mathbb{R},\ g'(u) = \dfrac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)} < 0$ puisque $\varphi(u) > 0$ et $1-\Phi(u) > 0$; la fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} 1-\Phi(u) = 1-0$, donc $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} -\ln\big(1-\Phi(u)\big) = 0 = \lim_{u\to-\infty} g(u)$.

$\displaystyle\lim_{u\to+\infty} 1-\Phi(u) = 1-1 = 0^+$ ($\Phi(u) < 1$ pour tout u de $\mathbb{R}$), donc :

$\displaystyle\lim_{u\to+\infty} -\ln\big(1-\Phi(u)\big) = \lim_{X\to0^+} -\ln(X) = +\infty = \lim_{u\to+\infty} g(u)$.

D'après le théorème éponyme, la fonction g réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.
On peut donc poser $x = g(u)$: $\mathrm{d}x = g'(u)\mathrm{d}u$, et :

$$K(f,\varphi) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\ln\Big(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f\big(g(u)\big)\ln\left(\frac{f\big(g(u)\big)}{\varphi\big(g(u)\big)}\right).g'(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g'(u) \times f\big(g(u)\big)}_{=\varphi(u)}\ln\left(\frac{f\big(g(u)\big)}{\varphi\big(g(u)\big)}\right)\mathrm{d}u \qquad \mathit{CQFD}$$

4. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2 \mathrm{d}x$ converge : la fonction $x \mapsto \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

- Au voisinage de $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$, donc $\varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^2\varphi(x)$: comme l'énoncé le rappelle au début de ce problème, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2\varphi(x)\mathrm{d}x$ converge ; par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$ converge.
- Au voisinage de $+\infty$: $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ d'après 3.d), donc $\varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \varphi(x)\times\dfrac{x^4}{4}$.
  Or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)x^4\mathrm{d}x$ converge (toujours d'après le préambule), donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$ converge.

Or, d'après le théorème de transfert : $(X-Y)^2 = \big(X-g(X)\big)^2$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente, ce qui est bien le cas ! Et :

$$E\big((X-Y)^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

5. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x$ converge :

- Au voisinage de $-\infty$: $g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}$ tend vers $\dfrac{0}{1-0} = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$, donc $|\varphi(x)\big(1-g'(x)\big)| \underset{x\to-\infty}{\sim} \varphi(x)$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x$ converge, donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
- Lorsque x tend vers $+\infty$: on a vu en 3.c) que $1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$,
  donc $\dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} = g'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, et $|\varphi(x)(1-g'(x))| \underset{x\to+\infty}{\sim} |\varphi(x).(-x)| = x\varphi(x)$.
  Or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x$ converge, donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\big(1-g'(x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}x$ est convergente.

6. On repart ici du résultat de la question 3. :

$$K(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left(\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{g'(x)\varphi(g(x))}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{d'après 2.}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\right)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\big(g'(x)\big)\mathrm{d}x$$

Or une inégalité de concavité donne : $\forall u > 0,\ \ln(u) \leqslant u_1$. En effet, la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa courbe se situe entièrement au-dessous de n'importe laquelle de ses tangentes, notamment cete au point d'abscisse 1, qui a pour équation : $y = \ln'(1).(x-1) + \ln(1) \iff y = x - 1$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0$ donc on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\big(g'(x)\big) \leqslant g'(x) - 1 \iff -\varphi(x)\ln\big(g'(x)\big) \geqslant \varphi(x)\big(-g'(x)+1\big).$$

Les fonctions concernées sont continues, d'intégrales convergente sur $\mathbb{R}$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\big(g'(x)\big)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(-g'(x)+1\big)\mathrm{d}x$$

En ajoutant aux deux membres l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\right)\mathrm{d}x$, on obtient bien :

$$K(f,\varphi) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\right)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(-g'(x)+1\big)\mathrm{d}x$$

7. On réalise pour finir une intégration par parties pour transformer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(-g'(x)+1)\big)\mathrm{d}x$; soient $A > 0$ et $B < 0$, dans $\displaystyle\int_B^A \varphi(x)\big(-g'(x)+1\big)\mathrm{d}x$, on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x) && \longrightarrow && u'(x) = -x\varphi(x) \\ v'(x) &= -g'(x)+1 && \longrightarrow && v(x) = x - g(x) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par intégration par parties :

$$\int_B^A \varphi(x)\big(-g'(x)+1\big)\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\big(x-g(x)\big)\Big]_B^A + \int_B^A \varphi(x).x\big(x-g(x)\big)\mathrm{d}x$$

où, de façon analogue au travail réalisé à la question 4. : $\varphi(A)\big(A-g(A)\big) \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A^2}{2}\varphi(A)$ et $\varphi(B)\big(B-g(B)\big)\underset{B\to-\infty}{B}\varphi(B)$.

Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\mathrm{d}x$, le critère nécessaire de convergence assure que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\varphi(A)\big(A-g(A)\big) = 0 = \lim_{B\to-\infty}\varphi(B)\big(B-g(B)\big)$.

Le passage à la limite dans l'égalité précédente lorsque $A \to +\infty$ et $B \to -\infty$ est donc possible et donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\big(-g'(x)+1)\big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).x\big(x-g(x)\big)\mathrm{d}x$$

(la convergence de l'intégrale de gauche assure la convergence de celle de droite).

Il reste à voir que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln\big(\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\big)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\ln(e^{-x^2/2}\times e^{g(x)^2/2})\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2}\big)\mathrm{d}x$$

Et donc, en reprenant l'inégalité obtenue à la question 6., et par linéarité de l'intégrale :

$$K(f,\varphi) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2} + x^2 - xg(x)\big)\mathrm{d}x$$

$$\iff K(f,\varphi) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\big(\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2} - xg(x)\big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\big(x-g(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

$$\iff 2K(f,\varphi) \geqslant E\big((X-Y)^2\big) \qquad CQFD$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★