MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2013

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.

Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.

Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$.
- Il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la « Value at Risk »

1. Soit $X \in \mathcal{D}$; il existe donc un unique intervalle I_X tel que F_X réalise une bijection de I_X dans $]0,1[$ auquel appartient β :

   il existe donc un unique réel $v \in I_X$ tel que $F_X(v) = \beta \iff \mathbb{P}(X \leqslant \beta)$, ce qui est aussi équivalent à $v = G_X(\beta)$ par définition de la bijection réciproque.

   Par ailleurs, comme F_X est une fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X \in [0,1]$, donc tout réel x qui n'appartiendrait pas à I_X, aurait pour image 0 ou 1 par F_X, donc pas β. Ainsi, v est bien l'unique réel vérifiant les relations ci-dessus.

   - On définit alors $r_\beta(X)$, appelé la « Value at Risk » au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.

   - **On remarque que $r_\beta(X)$ est égale au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β.**

2. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$.

   a) D'après le cours sur la loi exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   b) On sait aussi que X est une variable à densité qui admet une espérance (valant $\dfrac{1}{\lambda}$), et que :

   sur $]0,+\infty[$, F_X est bien de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante donc bijective, à valeurs dans $]0,1[$.
   Donc $X \in \mathcal{D}$, et pour $\beta \in]0,1[,\ v \in]0,+\infty[$:

   $$F_X(v) = \beta \iff 1 - e^{-\lambda v} = \beta \iff e^{-\lambda v} = 1 - \beta \iff v = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta) = r_\beta(X).$$

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X, et de paramètres μ et s^2 pour Y.
   On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ la densité usuelle de cette loi.

a) i. La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, de densité $\Phi' = \varphi : \ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-x^2/2}$, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Cela implique que les limites de cette fonction de répartition en $-\infty$ et $+\infty$, ne sont jamais atteintes, et donc que Φ réalise bien, d'après le théorème éponyme, une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

ii. On utilise ici le théorème de stabilité par transformation affine de la loi normale : puisque X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors sa variable centrée, réduite associée $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

puisque $\sigma > 0$.

iii. On sait d'après i. que Φ réalise une bijection de $I_X = \mathbb{R}$ dans $]0,1[$, et X admet une espérance qui vaut m : alors $X \in \mathcal{D}$, et $r_\beta(X)$ est l'unique réel v vérifiant :

$$\mathbb{P}(X \leqslant v) = \beta \iff \Phi\left(\frac{v-m}{\sigma}\right) = \beta \iff \frac{v-n}{\sigma} = \Phi^{-1}(\beta) \iff v = m + \sigma.\Phi^{-1}(\beta).$$

b) Toujours d'après le théorème de stabilité de la loi normale, puisque X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi normale, alors :

$$X+Y \text{ suit la loi normale de paramètres } (m+\mu, \sigma^2+s^2)$$

D'après 3.a).iii., on a donc :

$$r_\beta(X+Y) = m + \mu + \sqrt{\sigma^2+s^2}.\Phi^{-1}(\beta).$$

c) Au vu des calculs précédents, on a donc :

$$r_\beta(X+Y) - r_\beta(X) - r_\beta(Y) = (\sqrt{\sigma^2+s^2} - \sigma - s).\Phi^{-1}(\beta)$$

Or, puisque σ et s sont strictement positifs :
$\sigma^2 + s^2 < \sigma^2 + 2s\sigma + s^2 = (\sigma+s)^2 \iff \sqrt{\sigma^2+s^2} < \sigma + s$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, la forme factorisée de $r_\beta(X+Y) - r_\beta(X) - r_\beta(Y)$ est négative si et seulement si :
$\Phi^{-1}(\beta) \geqslant 0 \iff \beta \geqslant \Phi(0) \iff \beta \in [\frac{1}{2}, 1[$ puisque Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel, et λ un réel strictement positif.
On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

a) D'après l'étude précédente, on obtient $r_\beta(Y)$ comme l'unique réel v tel que :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant v) = \beta \iff \mathbb{P}(X + c \leqslant v) = \beta \iff \mathbb{P}(X \leqslant v - c) = \beta \iff v - c = r_\beta(X)$$

par définition de $r_\beta(X)$, d'où, en effet, la relation : $\quad r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.

b) De même : $r_\beta(Z)$ est l'unique réel v vérifiant :

$$\mathbb{P}(Z \leqslant v) = \beta \iff \mathbb{P}(\lambda X \leqslant v) = \beta \overset{\lambda>0}{\iff} \mathbb{P}(X \leqslant \frac{v}{\lambda}) = \beta \iff \frac{v}{\lambda} = r_\beta(X)$$

toujours par définition de $r_\beta(X)$, d'où : $\quad r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X)$.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, \ X(\omega) \leqslant Y(\omega).$$

a) Pour tout réel x, au vu des hypothèses faites sur X et Y : pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) \leqslant x$, alors $X(\omega) \leqslant Y(\omega) \leqslant x$, donc par transitivité : la réalisation de $[Y \leqslant x]$ implique celle de $[X \leqslant x]$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [Y \leqslant x] \subset [X \leqslant x] \Longrightarrow \mathbb{P}(Y \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x), \text{ soit : } \forall x \in \mathbb{R}, \ F_Y(x) \leqslant F_X(x)$$

b) La relation précédente, écrire avec $x = r_\beta(X)$ par exemple, donne :

$$F_Y(r_\beta(X)) \leqslant F_X(r_\beta(X)) \iff F_Y(r_\beta(X)) \leqslant \beta \iff F_Y(r_\beta(X)) \leqslant F_Y(r_\beta(Y))$$

La fonction F_Y étant supposée strictement croissante sur I_Y auquel appartient $r_\beta(Y)$ par définition, cela implique bien $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$ si $r_\beta(X)$ appartient lui aussi à I_Y. Et sinon, $r_\beta(X)$ est forcément inférieur à la borne inférieure de I_Y (son image par F_Y ne peut valoir que 0, et pas 1), et l'inégalité :

$$r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y) \text{ est toujours vraie}$$

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition : $N_{x,n}$ compte le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels $[X_k \leqslant x]$ est réalisé.
   Comme les variables X_k suivent toutes la même loi que X, et sont indépendantes :
   $N_{x,n}$ **compte le nombre de succès** ($[X_k \leqslant x]$ réalisé) dans une répétition de n **épreuves de Bernoulli identiques** et de **même probabilité de succès** $P(X_k \leqslant x) = F_X(x)$.
   Donc en effet, $N_{x,n}$ suit une loi **binomiale**, de paramètres $(n, F_X(x))$.
   Le cours donne alors, sans calcul :
   $$E(N_{x,n}) = nF_X(x) \quad \text{et} \quad V(N_{x,n}) = nF_X(x)(1 - F_X(x)).$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$:
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) \overset{n \geq 0}{=} \mathbb{P}\left(|N_{x,n} - nF_X(x)| \geqslant n\varepsilon\right) = \mathbb{P}(|N_{x,n} - \mathbb{E}(N_{x,n})| \geqslant n\varepsilon)$$
   On se retrouve donc dans le cas d'utilisation de l'**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, qui donne :
   $$\mathbb{P}(|N_{x,n} - \mathbb{E}(N_{x,n})| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(N_{x,n})}{(n\varepsilon)^2} \iff 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{F_X(x)(1 - F_X(x))}{n\varepsilon^2}$$
   Comme x et ε sont indépendants de n : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{F_X(x)(1 - F_X(x))}{n\varepsilon^2} = 0$, et comme une probabilité est toujours positive, le **théorème d'encadrement** permet de conclure :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: dire que l'événement $[X_{k,n} \leqslant x]$ est réalisé signifie que la k-ième plus grande valeur de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est inférieure ou égale à x.
   C'est bien équivalent au fait de trouver, dans ce même échantillon, *au moins* k variables X_i telles que $[X_i \leqslant x]$ soit réalisé, ce qui est le cas si et seulement si $N_{x,n}$ prenne une valeur supérieure ou égale à k. Il y a donc bien égalité des événements $[X_{k,n} \leqslant x]$ et $[N_{x,n} \geqslant k]$.
   b) Les probabilités de ces deux événements sont donc toujours égales, et au vu de la loi binomiale suivie par $N_{x,n}$:
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_{k,n} \leqslant x) = \mathbb{P}(N_{x,n} \geqslant k) = \sum_{r=k}^{n} P(N_{x,n} = r) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}.$$
   Par hypothèse, $X \in \mathcal{D}$ est une variable à densité, dont la fonction de répartition F_X doncest de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier : c'est donc aussi le cas, par somme et produit de telles fonctions, de la fonction de répartition de $X_{k,n}$ donnée par la formule précédente : $X_{k,n}$ est donc également une variable aléatoire réelle à densité.

9. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:
   $$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|U_n - c| \geqslant \varepsilon) = 0.$$
   On considère $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite convergente de réels et on pose $\ell = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.
   a) Distinguons les deux cas indiqués par l'énoncé :
   - Si $t > c$: cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $t = c + \varepsilon$ (en posant $\varepsilon = t - c$), et alors :
     $\mathbb{P}(U_n \geqslant t) = \mathbb{P}(U_n \geqslant c + \varepsilon)$, or : $[|U_n - c| \geqslant \varepsilon] = [U_n \leqslant c - \varepsilon] \cup [U_n \geqslant c + \varepsilon]$, la distance de U_n à c est supérieure à ε. Ainsi :
     $[U_n \geqslant t] \subset [|U_n - c| \geqslant \varepsilon]$, donc $0 \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant t) \leqslant P(|U_n - c| \geqslant \varepsilon)$.
     On conclut donc, grâce à l'hypothèse faite et par encadrement, que :
     $$\forall t > c, \quad \lim_{n \to +\infty} P(U_n \geqslant t) = 0.$$

- Si $t < c$: il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $t = c - \varepsilon$, et alors, $[t, +\infty[$ contient $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, donc :

$$\mathbb{P}(c-\varepsilon < U_n < c+\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant t) \iff \mathbb{P}(|U_n - c| < \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant t) \leqslant 1$$

Or : $P(|U_n - c| < \varepsilon) = 1 - P(|U_n - c| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - 0$, donc à nouveau par encadrement :

$$\forall t < c, \quad \lim_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant t) = 1.$$

b) On suppose que $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2} > 0$.

On a alors : $\ell - \varepsilon = \dfrac{\ell + c}{2} = \dfrac{2c + \ell - c}{2} = c + \varepsilon$. Par définition de la convergence de la suite (u_n) vers ℓ, il existe donc bien un rang à partir duquel $u_n \geqslant \ell - \varepsilon \iff u_n \geqslant c + \varepsilon$.
De la sorte, à partir de ce rang :
$[U_n \geqslant u_n]$ implique $[U_n \geqslant c+\varepsilon]$, donc : $0 \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant u_n) \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant c+\varepsilon)$.
Puisque $c + \varepsilon > c$, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \geqslant c+\varepsilon) = 0$, donc à nouveau par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \geqslant u_n) = 0$.

c) De même si $\ell < c$, en posant $\varepsilon = \dfrac{c-\ell}{2} > 0$: alors $c - \varepsilon = \dfrac{c+\ell}{2} = \dfrac{2\ell + c - \ell}{2} = \ell + \varepsilon$, et d'après la convergence de (u_n) vers ℓ, il existe un rang à partir duquel $u_n \leqslant \ell + \varepsilon \iff u_n \leqslant c - \varepsilon$.
On a donc, à partir de ce rang :

$$[U_n \geqslant c-\varepsilon] \subset [U_n \geqslant u_n] \Longrightarrow \mathbb{P}(U_n \geqslant c-\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant u_n) \leqslant 1.$$

Comme $c - \varepsilon < c$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant c-\varepsilon) = 1$, donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant u_n) = 1$ dans ce cas.

10. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geqslant 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

a) D'après l'équivalence classique avec la valeur absolue, et les propriétés de calcul d'une fonction de répartition :

$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\theta' - \varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon) = F_{Y_n}(\theta'+\varepsilon) - F_{Y_n}(\theta'-\varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant \theta'+\varepsilon) - \mathbb{P}(Y_n \leqslant \theta'-\varepsilon).$$

b) D'après l'égalité d'événements obtenue à la question 8.a) :

$$[Y_n \leqslant \theta' + \varepsilon] = [X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leqslant \theta' + \varepsilon] = [N_{\theta'+\varepsilon, n} \geqslant \lfloor n\beta \rfloor] \overset{n \geq 0}{=} \left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]$$

et de même :

$$[Y_n \leqslant \theta' - \varepsilon] = [X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} \leqslant \theta' - \varepsilon] = [N_{\theta'-\varepsilon, n} \geqslant \lfloor n\beta \rfloor] \overset{n \geq 0}{=} \left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]$$

d'où en effet :

$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

c) Il reste alors à faire la synthèse de toutes les questions précédentes :
- D'après la question 7., en posant $x = \theta' + \varepsilon$, pour tout $\alpha > 0$ (il faut changer la notation puisque x dépend ici de ε, ce qui n'est pas le cas dans le résultat de 7.) :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{\theta'+\varepsilon}}{n} - F_X(\theta'+\varepsilon)\right| \geqslant \alpha\right) = 0$$

Ainsi, en posant $U_n = \dfrac{N_{\theta'+\varepsilon}}{n}$ et $c = F_X(\theta'+\varepsilon)$, le résultat de la question 9. s'applique.

- On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}$, dont on cherche à prouver la convergence et à obtenir la limite. C'est une question classique faisant intervenir la double inégalité issue de la définition même de la partie entière :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
Donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\beta - 1 < \lfloor n\beta \rfloor \leqslant n\beta \overset{n>0}{\iff} \beta - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \leqslant \beta$$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \beta - \dfrac{1}{n} = \beta$, donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} = \beta = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Or par croissance de F_X sur $\mathbb{R}$ et par unicité de $\theta' = r_\beta(X)$: $F_X(\theta' + \varepsilon) > F_X(\theta')$ où $F_X(\theta') = F_X(r_\beta(X)) = \beta$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < c$ avec les notations introduites ci-dessus.
On en déduit, d'après le résultat de 9.c), que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \geqslant u_n) = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 1$$
- De même, en posant cette fois $x = \theta' + \varepsilon$:
$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} - F_X(\theta' - \varepsilon)\right| \geqslant \alpha\right) = 0$$
Ainsi, en posant $U_n = \dfrac{N_{\theta'-\varepsilon}}{n}$ et $c = F_X(\theta' - \varepsilon)$, le résultat de la question 9. s'applique.
Toujours avec $u_n = \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}$, on a donc cette fois :
$$F_X(\theta') > F_X(\theta' - \varepsilon) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n > c$$
Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \geqslant u_n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geqslant \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) = 0$$

On obtient donc bien, en définitive : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - \theta'| \leqslant \varepsilon) = 1 - 0 = 1$, résultat valable pour tout $\varepsilon > 0$.

Cela signifie que la suite d'estimateurs (Y_n) *converge en probabilité* vers θ'. On dit simplement que (Y_n) est une **suite d'estimateurs convergente** de $\theta' = r_\beta(X)$.

11. Au vu des définitions des variables $X_{k,n}$ et Y_n : il s'agit de réordonner le tableau `X` dans l'ordre croissant, puis d'en extraire la valeur d'indice $k = \lfloor n\beta \rfloor$ qui est alors une réalisation de $X_{\lfloor n\beta \rfloor, n} = Y_n$, estimateur convergent de $r_\beta(X)$.

```
function r = VaR(X,beta)
    n = length(X)
    k = floor(n*beta)
    Y = triCroissant(X)
    r = Y(k)
endfunction
```

Partie III - L'« Expected Shortfall » (ES)

On conserve les notations de la partie 1.

Pour qu'une mesure de risque soit acceptable, on souhaite qu'elle vérifie un certain nombre de propriétés.

On dit qu'une fonction ρ définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles est une **mesure de risque cohérente** sur $\mathcal{D}$ si elle vérifie les quatre propriétés :

(R_1) $\quad \forall X \in \mathcal{D},\ \forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X + c) = \rho(X) + c\,;$

$(R_2)\quad \forall X \in \mathcal{D},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$;

$(R_3)\quad \forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2$, si pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$;

$(R_4)\quad \forall (X,Y) \in \mathcal{D}^2$, telles que $X+Y \in \mathcal{D},\ \rho(X+Y) \leqslant \rho(X)+\rho(Y)$.

12. La propriété de linéarité de l'espérance donne déjà, pour toutes variables aléatoires X et Y de $\mathcal{D}$, qui admettent donc une espérance :

    $\forall c \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(X+c) = \mathbb{E}(X)+c$ donc (R_1) est vraie ; $\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X)$ donc (R_2) est vraie ; $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$, ce qui est un cas particulier de (R_4) qui est alors vraie.

    Enfin, la propriété de croissance de l'espérance donne bien : si pour tout $\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$, donc (R_3) est vraie.

    L'espérance est donc bien une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

13. On rappelle ici les résultats des questions 4. et 5. du sujet :
    - D'après 4.a), pour tout $X \in \mathcal{D}$ et tout réel c, $X+c \in \mathcal{D}$ et $r_\beta(X+c) = r_\beta(X)+c$, donc (R_1) est vérifiée.
    - D'après 4.b), pour tout $X \in \mathcal{D}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $\lambda X \in \mathcal{D}$ et $r_\beta(\lambda X) = \lambda r_\beta(X)$, donc (R_2) est vérifiée.
    - D'après 5.b), pour toutes variables aléatoires X et Y de $\mathcal{D}$ telles que : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $r_\beta(X) \leqslant r_\beta(Y)$ et (R_3) est vérifiée.
    - Par contre, d'après 3.c) :

      il existe des variables X et Y appartenant à $\mathcal{D}$ telles que $r_\beta(X+Y) > r_\beta(X)+r_\beta(Y)$ lorsque $\beta \in]0,\frac{1}{2}[$. La propriété (R_4) n'est donc pas vérifiée pour tout $\beta \in]0,1[$, et on ne peut donc pas considérer en toute généralité, que la « Value at Risk » est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, admettant une densité f_X. On définit l'« Expected Shortfall » de X de niveau de confiance β par

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout $\beta \in]0,1[$, ES_β est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$ assez « proche » de r_β.

14. Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

    a) Puisque X appartient à $= \mathcal{D}$, c'est une variable à densité qui admet une espérance, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

    Par conséquent, $\displaystyle\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est a fortiori aussi convergente, et $ES_\beta(X)$ est bien définie.

    De plus : pour tout $x \in [r_\beta(X),+\infty[$: $x \geqslant r_\beta(X) \Longrightarrow x f_X(x) \geqslant r_\beta(X) f_X(x)$ puisque $f_X(x) \geqslant 0$ (f_X est une densité), et :

    $$\begin{aligned}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X) f_X(x)\mathrm{d}x = r_\beta(X)\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x &= r_\beta(X).P(X \geqslant r_\beta(X)) \\ &= r_\beta(X).(1-F_X(r_\beta(X))) = r_\beta(X).(1-\beta) \quad \text{par définition de } r_\beta(X).\end{aligned}$$

    Les intégrales des fonctions concernées étant convergentes, la propriété de croissance de l'intégrale donne :

    $$\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} r_\beta(X).f_X(x)\mathrm{d}x \iff \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \geqslant r_\beta(X).(1-\beta)$$

    $$\iff ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \geqslant r_\beta(X) \qquad \text{puisque } 1-\beta > 0$$

    b) On souhaite réaliser le changement de variable : $t = F_X(x)$ dans l'intégrale définissant $ES_\beta(X)$. Remarquons ici que, X appartenant à $\mathcal{D}$, la fonction F_X n'est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ que sur l'intervalle I_X.

    Que la borne supérieure de cette intervalle, notée a, soit un nombre fini ou $+\infty$: comme on a déjà eu l'occasion de le dire, pour tout $x > a$, $F_X(x) = 1$ et $f_X(x) = 0$, donc on peut en fait écrire

    $ES_\beta(X) = \displaystyle\frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{a} x f_X(x)\mathrm{d}x$ et le changement de variable est licite car alors :

- F_X est alors bien de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante donc bijective de $[r_\beta(X), a[$ dans $[F_X(r_\beta(X)), \lim\limits_{x\to a^-} F_X(x)[=[\beta,1[$.
- élément différentiel : $\mathrm{d}t = F_X'(x)\mathrm{d}x = f_X(x)\mathrm{d}x$
- pour tout $x \in [r_\beta(X), a[$: $t = F_X(x) \iff x = G_X(t)$, donc : $xf_X(x)\mathrm{d}x = G_X(t)\mathrm{d}t$.

L'intégrale définissant $ES_\beta(X)$ étant convergente, le théorème de changement de variable donne bien :

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{a} xf_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\beta}\int_\beta^1 G_X(t)\mathrm{d}t \qquad (2)$$

15. a) Montrons que ES_β vérifie la propriété (R_1), on prend pour cela $X\in\mathcal{D}$ et $c\in\mathbb{R}$ quelconques ; on sait qu'alors $r_\beta(X+c) = r_\beta(X)+c$, et qu'une densité de $Y = X+c$ est la fonction $x\mapsto f_X(x-c)$, d'où :

$$\begin{aligned}
ES_\beta(X+c) &= \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X+c)}^{+\infty} xf_X(x-c)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)+c}^{+\infty} xf_X(x-c)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} (u+c)f_X(u)\mathrm{d}u \qquad \text{changement de variable affine : } u = x-c\\
&= \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} uf_X(u)\mathrm{d}u + \frac{c}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est $ES_\beta(X)$, le second vaut : $\dfrac{c}{1-\beta}\times\big(1-F_X(r_\beta(X))\big) = \dfrac{c}{1-\beta}\times(1-\beta) = c$ par définition de $r_\beta(X)$. On a bien :

$$\forall X\in\mathcal{D},\ \forall c\in\mathbb{R},\quad ES_\beta(X+c) = ES_\beta(X)+c$$

Donc ES_β vérifie la propriété (R_1).

b) Soient maintenant $X\in\mathcal{D}$ et $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$: on sait que $r_\beta(\lambda X) = \lambda r_\beta(X)$, et qu'une densité de $Z = \lambda X$ est la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\lambda}f_X(\dfrac{x}{\lambda})$, donc :

$$\begin{aligned}
ES_\beta(\lambda X) &= \frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(\lambda X)}^{+\infty} x\times\frac{1}{\lambda}f_X(\frac{x}{\lambda})\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{\lambda}\int_{r_\beta(X)/\lambda}^{+\infty} xf_X(\frac{x}{\lambda})\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{\lambda}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty}(\lambda u)f_X(u)\times\lambda\mathrm{d}u \qquad \text{changement de variable affine : } u = \frac{x}{\lambda}\\
&= \frac{\lambda}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} uf_X(u)\mathrm{d}u = \lambda ES_\beta(X)
\end{aligned}$$

Donc ES_β vérifie bien la condition (R_2).

16. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

a) Les calculs effectués à la question 2.a) donnent : $r_\beta(X) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta) = G_X(\beta)$, donc en utilisant la formule (2) pour $ES_\beta(X)$:

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_\beta^1 G_X(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda(1-\beta)}\int_\beta^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t$$

C'est une intégrale impropre en 1. Soit un réel a tel que $\beta<a<1$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_\beta^a \ln(1-t)\mathrm{d}t$, on pose d'abord le changement de variable affine $u = 1-t$:

$$\int_\beta^a \ln(1-t)\mathrm{d}t = -\int_{1-\beta}^{1-a}\ln(u)\mathrm{d}u = \big[u\ln(u)-u\big]_{1-a}^{1-\beta} = (1-\beta)\ln(1-\beta)-(1-\beta)-(1-a)\ln(1-a)+(1-a)$$

Or : $\lim\limits_{a\to1^-} 1-a = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X) = 0$ par croissances comparées, donc :

$\lim\limits_{a\to 1^-}(1-a)\ln(1-a)-(1-a)=0-0=0$, et $\displaystyle\int_\beta^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t=(1-\beta)\ln(1-\beta)-(1-\beta)$. On en déduit :

$$ES_\beta(X)=-\frac{(1-\beta)\ln(1-\beta)-(1-\beta)}{\lambda(1-\beta)}=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)+\frac{1}{\lambda}=r_\beta(X)+\frac{1}{\lambda}$$

b) Lorsque β tend vers 1 (par valeurs inférieures) : $r_\beta(X)=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\beta)$ tend vers $+\infty$, donc le terme constant $\dfrac{1}{\lambda}$ est évidemment négligeable devant $r_\beta(X)$, et :

$$ES_\beta(X)\underset{\beta\to 1}{=}r_\beta(X)+o(r_\beta(X))\iff ES_\beta(X)\underset{\beta\to 1}{\sim}r_\beta(X)$$

17. On suppose dans cette question que X suit la loi normale centrée réduite.

a) Dans ce cas, en utilisant la forme (1) de $ES_\beta(X)$:

$$\begin{aligned}ES_\beta(X)&=\frac{1}{1-\beta}\int_{r_\beta(X)}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r_\beta(X)}^{A}xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{A\to+\infty}\big[-e^{-x^2/2}\big]_{r_\beta(X)}^{A}=\frac{1}{1-\beta}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-r_\beta(X)^2/2}\\&=\frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\beta}=\frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))}\quad\text{par définition de } r_\beta(X)\end{aligned}$$

b) Soit $x>0$, et $A>x$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, on pose :

$$\begin{aligned}u(t)&=\varphi(t)\quad\to\quad u'(t)=\varphi'(t)=-t\varphi(t)\\v'(t)&=\frac{1}{t^2}\quad\to\quad v(t)=-\frac{1}{t}\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_x^A\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\Big[-\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A-\int_x^A\varphi(t)\mathrm{d}t=-\frac{\varphi(A)}{A}+\frac{\varphi(x)}{x}-\big[\Phi(A)-\Phi(x)\big]$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(A)=0$, donc a fortiori $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\varphi(A)}{A}=0$, et $\lim\limits_{A\to+\infty}\Phi(A)=1$: cela prouve la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, et donne surtout la relation :

$$\text{Pour tout } x>0,\quad\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\varphi(x)}{x}-1+\Phi(x)\iff 1-\Phi(x)=\frac{\varphi(x)}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

c) Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[x,+\infty[$ (où $x<+\infty$), donc par positivité de l'intégrale : $0\leqslant\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Par ailleurs, pour tout $t\in[x;+\infty[$: $\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ par stricte décroissance de la fonction inverse au carré sur $\mathbb{R}^{+*}$. En multipliant les deux membres par $\varphi(t)>0$, on obtient : $\forall t\in[x;+\infty[,\ \dfrac{\varphi(t)}{t^2}\leqslant\dfrac{\varphi(t)}{x^2}$.
Les deux fonctions de la variable t sont continues, intégrables sur $[x;+\infty[$, donc par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{x^2}\mathrm{d}t$, où la deuxième intégrale vaut : $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\big(1-\Phi(x)\big)$.

On a bien démontré que pour tout $x>0$: $0\leqslant\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}\big(1-\Phi(x)\big)$.

Puisque pour tout $x > 0,\ 1-\Phi(x) > 0$, on peut aussi écrire : $0 \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t}{1-\Phi(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, ce qui donne par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t}{1-\Phi(x)} = 0$, soit : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\big(1-\Phi(x)\big)$, et donc :

$$\frac{\varphi(x)}{x} = 1-\Phi(x) + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 1-\Phi(x) + o_{+\infty}\big(1-\Phi(x)\big) \iff 1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

d) Puisque $\displaystyle\lim_{\beta\to1^-} r_\beta(X) = +\infty$, alors d'après ce qui précède : $1-\Phi(r_\beta(X)) \underset{\beta\to1}{\sim} \dfrac{\varphi(r_\beta(X))}{r_\beta(X)}$, et d'après les règles de calcul avec les équivalents :

$$ES_\beta(X) = \frac{\varphi(r_\beta(X))}{1-\Phi(r_\beta(X))} \underset{\beta\to1}{\sim} \varphi(r_\beta(X)) \times \frac{r_\beta(X)}{\varphi(r_\beta(X))} \iff ES_\beta(X) \underset{\beta\to1}{\sim} r_\beta(X)$$

Dans les questions qui suivent, X est une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$.

- On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \max(x, 0)$.
- On admet que si U et V sont deux variables aléatoires telles que $0 \leqslant U \leqslant V$ et $\mathbb{E}(V)$ existe, alors $\mathbb{E}(U)$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}(U) \leqslant \mathbb{E}(V)$.
- On note pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A. Rappelons qu'il s'agit de la variable aléatoire prenant la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.

18. a) Il est assez clair que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant h(x) \leqslant |x|$; en effet : pour tout réel $x \leqslant 0,\ h(x) = 0 \leqslant |x|$, et pour tout réel $x \geqslant 0,\ h(x) = x = |x|$. Ainsi :

$h(X - r_\beta(X)) \leqslant |X - r_\beta(X)| \leqslant |X| + |r_\beta(X)|$, la dernière inégalité provenant de l'inégalité triangulaire.

Puisque $X \in \mathcal{D}$, X admet une espérance et $|X|$ aussi (pour une variable à densité, on demande bien l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$).

Puisque $|r_\beta(X)|$ est une constante, la variable $V = |X| + |r_\beta(X)|$ admet donc une espérance. La propriété admise dans le deuxième point précédant cette question 18., d'applique donc à $U = h(X - r_\beta(X))$ et à V, qui assure que $h(X - r_\beta(X))$ admet une espérance.

Il n'est pas difficile de vérifier que h est continue (et positive) sur $\mathbb{R}$; l'espérance de $h(X - r_\beta(X))$ est donc donnée par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(h(X - r_\beta(X))\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - r_\beta(X)).f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{r_\beta(X)} \underbrace{h(t - r_\beta(X))}_{=0 \text{ car } t\leqslant r_\beta(X)}.f_X(t)\mathrm{d}t + \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} \underbrace{h(t - r_\beta(X))}_{=t-r_\beta(X)}.f_X(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t - r_\beta(X).\int_{r_\beta(X)}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t - r_\beta(X) \times \big(1 - \underbrace{F_X(r_\beta(X))}_{=\beta}\big)$$

$$\mathbb{E}\big(h(X - r_\beta(X))\big) = \int_{r_\beta(X)}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t - r_\beta(X).(1-\beta)$$

b) On reconnaît bien sûr dans l'intégrale de la dernière relation ci-dessus, au facteur $1-\beta$ près, la définition de $ES_\beta(X)$, donc :

$$\mathbb{E}\big(h(X - r_\beta(X))\big) = (1-\beta).ES_\beta(X) - r_\beta(X).(1-\beta) \iff ES_\beta(X) = r_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}\big(h(X - r_\beta(X))\big)$$

19. La méthode de Monte-Carlo permet d'estimer $ES_\beta(X)$ utilisant l'estimation de $r_\beta(X)$ fournie par la fonction `VaR`, et la moyenne empirique des valeurs de $h(X - r_\beta(X))$ calculée à partir de l'échantillon de taille n de la loi de X dont les valeurs se trouvent dans le tableau `X` :

```
r = VaR(X,beta)      // estimation de r_beta(X) à partir de l'échantillon
H = max(X-r,0)       // la fonction max est compatible avec les opérations terme à terme
ES = r + mean(H)/(1-beta)
disp('Valeur approchée de ES_beta(X) : '+string(ES))
```

20. Soit Z une variable aléatoire telle que : $\quad \mathbb{E}(Z)=1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$h(X(\omega)-r_\beta(X)) = \begin{cases} X(\omega)-r_\beta(X) & \text{si } X(\omega)-r_\beta(X)>0 \\ 0 & \text{si } X(\omega)-r_\beta(X)\leqslant 0 \end{cases}$$
$$= h(X(\omega)-r_\beta(X)) \times \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega)>r_\beta(X) \\ 0 & \text{si } X(\omega)\leqslant r_\beta(X) \end{cases}$$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad h(X(\omega)-r_\beta(X)) = (X(\omega)-r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)$$

ce qui assure bien l'égalité de variables aléatoires : $\quad h(X-r_\beta(X)) = (X-r_\beta(X)) \times \mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$.

b) Puisque $X \in \mathcal{D}$, cette variable aléatoire à densité admet une espérance, ce qui implique aussi par définition, que $|X|$ admet une espérance.

L'inégalité : $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$ implique aussi : $0 \leqslant |XZ| = |X|Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}|X|$, où $\dfrac{1}{1-\beta}|X|$ admet une espérance, par linéarité de celle-ci.

La propriété de croissance de l'espérance assure que $|X|Z$, et donc XZ, admet une espérance, et on peut écrire, d'après les relations précédemment obtenues :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[(X-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}-(1-\beta)Z)] &= \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[(X-r_\beta(X))\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}] - \mathbb{E}[(X-r_\beta(X))Z] \\ &= \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[h(X-r_\beta(X))] - \mathbb{E}(XZ) + r_\beta(X)\mathbb{E}(Z) \\ &= r_\beta(X) + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[h(X-r_\beta(X))] - \mathbb{E}(XZ) \\ &= ES_\beta(X) - \mathbb{E}(XZ) \qquad CQFD\end{aligned}$$

c) Montrons ici que $(X-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}-(1-\beta)Z)$ est une variable aléatoire positive ; pour tout $\omega \in \Omega$:

- Si $X(\omega) > r_\beta(X)$, alors $X(\omega)-r_\beta(X)>0$, et $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega) = 1-(1-\beta)Z(\omega) \geqslant 0$ puisque $0 \leqslant Z(\omega) \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.
  Le produit de ces deux réels positifs implique que $(X(\omega)-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega)) \geqslant 0$ dans ce premier cas.

- Si $X(\omega) \leqslant r_\beta(X)$, alors $X(\omega)-r_\beta(X) \leqslant 0$ et $\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega) = -(1-\beta)Z(\omega) \leqslant 0$, donc le produit de ces deux réels négatifs implique que $(X(\omega)-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega)) \geqslant 0$ dans ce second cas.

Ainsi : $\quad \forall \omega \in \Omega,\ (X(\omega)-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega)) \geqslant 0$, donc par positivité de l'espérance :

$$\frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[(X(\omega)-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}(\omega)-(1-\beta)Z(\omega))] \geqslant 0 \iff ES_\beta(X)-\mathbb{E}(XZ) \geqslant 0$$

Pour que cette inégalité devienne une égalité, il suffit que :

$\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} = (1-\beta)Z \iff Z = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}$ car alors $(X-r_\beta(X))(\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}-(1-\beta)Z)$ est la variable constante nulle, d'espérance nulle à son tour.

Il est important ici de justifier que Z vérifie bien les propriétés nécessaires : $0 \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]} \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$, et $\mathbb{E}(\dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X>r_\beta(X)]}) = \dfrac{1}{1-\beta} \times \mathbb{P}(X>r_\beta(X)) = \dfrac{1}{1-\beta} \times (1-\beta) = 1$.

21. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des variables aléatoires Z sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(Z)=1$ et $0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{1-\beta}$.

D'après ce qui précède : pour toute variable aléatoire $Z \in \mathcal{K}$, $\mathbb{E}(XZ) \leqslant ES_\beta(X)$, l'inégalité devenant une égalité pour $Z = \dfrac{1}{1-\beta}\mathbb{1}_{[X > r_\beta(X)]}$ qui appartient bien à $\mathcal{K}$; ceci signifie effectivement que :

$$ES_\beta(X) = \max_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ)$$

22. On sait déjà depuis les questions 15.a) et 15.b), que pour tout $\beta \in]0;1[$, la fonction ES_β vérifie les propriétés (R_1) et (R_2).

Montrons que ES_β possède la propriété (R_3) : soit $(X,Y) \in \mathcal{D}^2$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors pour toute variable aléatoire Z élément de $\mathcal{K}$, positive par définition :

$\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega)Z(\omega) \leqslant Y(\omega)Z(\omega)$, donc par croissance de l'espérance : $\forall Z \in \mathcal{K}$, $\mathbb{E}(XZ) \leqslant \mathbb{E}(YZ)$.

D'après le résultat de la question 21 : $\mathbb{E}(YZ) \leqslant ES_\beta(Y)$, donc par transitivité de l'inégalité :

$\forall Z \in \mathcal{K}$, $\mathbb{E}(XZ) \leqslant ES_\beta(Y)$. Par conséquent : $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(XZ) \leqslant ES_\beta(Y) \iff ES_\beta(X) \leqslant ES_\beta(Y)$.

Vérifions enfin que ES_β possède la propriété (R_4) : soit $(X,Y) \in \mathcal{D}^2$ telle que $X+Y \in \mathcal{D}$; pour toute variable aléatoire $Z \in \mathcal{K}$:

$\mathbb{E}((X+Y)Z) = \mathbb{E}(XZ+YZ) = \mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(YZ)$ par linéarité de l'espérance. On a aussi :

$\forall Z \in \mathcal{K}$, $\mathbb{E}(XZ) \leqslant ES_\beta(X)$ et $\mathbb{E}(YZ) \leqslant ES_\beta(Y)$, donc $\mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(YZ) \leqslant ES_\beta(X) + ES_\beta(Y)$.
Par conséquent :

$\forall Z \in \mathcal{K}$, $\mathbb{E}((X+Y)Z) \leqslant ES_\beta(X) + ES_\beta(Y)$, donc :

$$\max_{Z \in \mathcal{K}} \mathbb{E}((X+Y)Z) \leqslant ES_\beta(X) + ES_\beta(Y) \iff ES_\beta(X+Y) \leqslant ES_\beta(X) + ES_\beta(Y)$$

La fonction ES_β vérifie bien les quatre propriétés permettant de conclure qu'elle est une mesure de risque cohérente sur $\mathcal{D}$.

★★★ FIN DU SUJET ★★★