

Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , où a et b sont réels ou infinis.

On dit qu'une densité de probabilité f vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- continue sur I ;
- strictement positive sur I ;
- nulle en dehors de I .

On écrira alors simplement : f est CSP(I).

L'énoncé admet que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes, s'appliquent également aux variables aléatoires continues.

Partie 1 : Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I , de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X .
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$P([U \leq h(X)]) = P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)dt.$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\forall x \in I, \Psi(x) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max_{t \in [x, y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min_{t \in [x, y]} h(t)$.

a) Soit x dans I ; pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$: la fonction h étant continue sur $]a, b[$, elle l'est aussi sur le segment fermé $[x, y]$ qui est inclus dans I .

Un théorème sur les fonctions continues assure alors que h atteint un maximum sur $[x, y]$ en un point α_y tel que : $h(\alpha_y) = \min_{t \in [x, y]} h(t) \iff h(\alpha_y) = M(x, y)$.

b) Lorsqu'on fait tendre y vers x par valeurs supérieures : puisque $x \leq \alpha_y \leq y$, le théorème d'encadrement implique

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} \alpha_y = x \implies \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} h(\alpha_y) = h(x)$$

la deuxième limite étant une conséquence de la continuité de h sur $[0, 1]$. Cela s'écrit bien :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)$$

c) On suit le même raisonnement en échangeant cette fois les rôles de x et y : pour tout y élément de I fixé, et tout réel $x \in]a, y[$: la fonction h est continue sur le segment $[x, y] \subset I$, donc admet un maximum, qui se note toujours $M(x, y)$, atteint en $\beta_x \in [x, y]$, de sorte que :

$$\forall x \in]a, y[, \quad x \leq \beta_x \leq y \quad \text{et} \quad h(\beta_x) = M(x, y)$$

Lorsque x tend vers y par valeurs inférieures, à nouveau par encadrement : $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} \beta_x = y$,

donc par continuité de h sur I : $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} h(\beta_x) = h(y) \iff \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)$.

On montrerait de manière analogue (l'énoncé demandait pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} m(x, y) = h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} m(x, y) = h(y)$$

2. Soient x et y des réels de I tels que $x < y$.

a) Pour toute issue $\omega \in \Omega$ telle que $x < X(\omega) \leq y$: la valeur prise par h en $X(\omega)$ est alors bien inférieure ou égale au maximum de cette fonction sur l'intervalle $[x, y]$, qui vaut $M(x, y)$: $h(X(\omega)) \leq M(x, y)$, et alors : $U(\omega) \leq h(X(\omega))$ implique bien $U(\omega) \leq M(x, y)$ par transitivité de l'inégalité.

On a donc bien l'implication :

$$(x < X(\omega) \leq y) \text{ et } (U(\omega) \leq h(X(\omega))) \implies (x < X(\omega) \leq y) \text{ et } (U(\omega) \leq M(x, y))$$

qui se traduit par l'inclusion d'événements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$$

La propriété de croissance de la probabilité donne déjà :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) \leq P([x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)])$$

où :

- Par indépendance des variables aléatoires X et U :

$$P([x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]) = P(x < X \leq y) \times P(U \leq M(x, y)) = (F(y) - F(x)) \times M(x, y)$$

puisque U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, et $M(x, y)$ est bien dans cet intervalle puisque c'est une valeur de la fonction h .

- en écrivant : $[X \leq y] = [X \leq x] \cup [x < X \leq y]$, union disjointe, on obtient :

$$[X \leq y] \cap [U \leq h(X)] = ([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) \cup ([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)])$$

par distributivité de l'intersection sur l'union, qui est toujours disjointe, de sorte que le passage à la probabilité donne :

$$P([X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) + P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)])$$

$$\iff \Psi(y) = \Psi(x) + P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)])$$

de sorte que l'inégalité précédente se réécrit effectivement :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

b) Un raisonnement analogue donne l'inclusion d'événements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq m(x, y)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq h(X(\omega))]$$

puisque cette fois, $x < X(\omega) \leq y$ et $U \leq m(x, y)$ impliquent : $U \leq m(x, y) \leq h(X(\omega))$.

La croissance de la probabilité et l'indépendance de X et U donnent :

$$P(x < X \leq y) \times P(U \leq m(x, y)) \leq P([x < X \leq y] \cap [U \leq h(X(\omega))])$$

et $m(x, y)$, valeur prise par h quelque part sur I , appartient à $[0, 1]$, donc

$P(U \leq m(x, y)) = m(x, y)$. Le membre de droite de l'inégalité est le membre de gauche de l'inégalité précédente, donc :

$$(F(y) - F(x))m(x, y) \leq \Psi(y) - \Psi(x)$$

ce qui donne l'encadrement :

$$(F(y) - F(x))m(x, y) \leq \Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

et comme $x < y \iff y - x > 0$, la division de tous les membres par $y - x$ donne bien :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x}M(x, y)$$

c) Soit x un élément de I , et $y \in I$ tel que $x < y$: comme la densité f est continue sur I , F est de classe \mathcal{C}^1 , donc dérivable en tout point de I , et : $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = F'(x) = f(x)$.

Mais comme on l'a aussi vu : $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} M(x, y) = h(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} m(x, y)$, de sorte que le théorème d'encadrement s'applique avec celui qui a été obtenu à la question précédente, pour donner :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x) \times h(x)$$

ce qui prouve que Ψ est dérivable à droite en tout point x de I , avec $\Psi'_{(d)}(x) = f(x)h(x)$.

Il faut aussi prouver la dérivabilité à gauche : si on fixe y dans I et $x \in I$ tel que $x < y$, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = F'(y) = f(y)$ puisque F est dérivable à droite et à gauche en tout point.

Les résultats précédents donnent à nouveau :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}m(x, y) = f(y) \times h(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}M(x, y)$$

donc toujours d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(y) \times h(y)$$

ce qui prouve que Ψ est dérivable à gauche en tout point y de I , avec $\Psi'_{(g)}(y) = f(y)h(y)$.

On a ainsi démontré, en utilisant provisoirement deux notations différentes pour la variable, que Ψ est dérivable à gauche et à droite en tout point de I , et a les mêmes dérivées à gauche et à droite : on conclut que Ψ est dérivable en tout point x de I , avec :

$$\forall x \in I, \quad \Psi'(x) = f(x) \times h(x)$$

3. a) Conséquence directe du résultat précédent : Ψ est une primitive de $f \times h$ sur I (où $f \times h$ est bien continue), donc pour tous réels x et y dans I :

$$\int_x^y f(t)h(t)dt = [\Psi(t)]_x^y = \Psi(y) - \Psi(x)$$

b) N'oublions pas les définitions initiales ! Pour tout x de I , $\Psi(x)$ est la probabilité de l'événement $[x \leq X] \cap [U \leq h(X)]$ et $F(x)$ celle de l'événement $[x \leq X]$.

On a toujours : $A \cap B \subset A$ pour tous ensembles A et B , donc ici :

$[x \leq X] \cap [U \leq h(X)] \subset [x \leq X]$, et la croissance de la probabilité donne bien :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) \leq F(x)$$

Or pour tout x de I , $0 \leq \Psi(x)$ puisque $\Psi(x)$ est une probabilité, et par ailleurs il est certain que : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} F(x) = 0$, puisque a est la borne de gauche de l'univers-image de la variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.

L'encadrement : $\forall x \in I, 0 \leq \Psi(x) \leq F(x)$ et le théorème éponyme donnent :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \Psi(x) = 0$$

la limite à gauche en a est la même, puisque s'il existe $x < a$, $\Psi(x)$ est alors nulle vu que $[X \leq x]$ est alors négligeable.

On peut donc passer à la limite quand x tend vers a dans la relation intégrale de la question précédente (principe de définition des intégrales généralisées) pour obtenir :

$$\forall y \in I, \quad \Psi(y) = \int_a^y f(t)h(t)dt$$

ce qu'on peut réécrire avec la variable x ...

c) Soit $x \in I$. On écrit ici : $[U \leq h(X)] = \left([X \leq x] \cap [U \leq h(X)] \right) \cup \left([X > x] \cap [U \leq h(X)] \right)$, union disjointe qui donne :

$$P(U \leq h(X)) = P\left([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]\right) + P\left([X > x] \cap [U \leq h(X)]\right)$$

qu'on peut aussi voir comme une utilisation de la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $\left([X \leq x], [X > x]\right)$... et qui donne :

$$P\left([X > x] \cap [U \leq h(X)]\right) = P(U \leq h(X)) - \Psi(x)$$

De façon analogue à ce qu'on a écrit plus haut :

L'inclusion $[X > x] \cap [U \leq h(X)] \subset [X > x]$ donne, par croissance de la probabilité :

$$0 \leq P\left([X > x] \cap [U \leq h(X)]\right) \leq P(X > x) = 1 - F(x)$$

Or lorsque x tend vers b , borne de droite de l'univers-image de la variable aléatoire X :

$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = 1 \iff \lim_{x \rightarrow b} 1 - F(x) = 0$, donc toujours par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow b} P\left([X > x] \cap [U \leq h(X)]\right) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow b} P(U \leq h(X)) - \Psi(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow b} \Psi(x) = P(U \leq h(X))$$

puisque $P(U \leq h(X))$ ne dépend pas de la variable x . On peut donc, cette fois, passer à la limite quand x tend vers b dans la relation intégrale obtenue en b), ce qui donne bien :

$$P(U \leq h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)dt$$

4. Il est clair que, par événement contraire : $P(U < h(X)) = 1 - P(U \geq h(X))$, qu'on peut aussi réécrire :

$$P(U < h(X)) = 1 - P(U \geq h(X)) = 1 - P(-U \leq -h(X)) = 1 - P(1 - U \leq 1 - h(X))$$

par opérations sur les inégalités.

Il reste à faire le lien avec ce qui précède... Comme U suit la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $V = 1 - U$ suit aussi (transformée affine) la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.

La fonction h est continue sur I , à valeurs dans $[0, 1]$, donc la fonction $k : x \mapsto 1 - h(x)$, est aussi continue sur I , à valeurs dans $[0, 1]$ également.

$$(\forall x \in I : 0 \leq h(x) \leq 1 \iff 0 \geq -h(x) \geq -1 \iff 1 \geq 1 - h(x) \geq 0)$$

Le résultat de la question précédente s'applique donc encore avec la variable V et la fonction k , qui donne :

$$\begin{aligned} P(V \leq k(X)) &= \int_a^b f(t)k(t)dt \iff P(1 - U \leq 1 - h(X)) = \int_a^b f(t)(1 - h(t))dt \\ &\iff P(1 - U \leq 1 - h(X)) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)h(t)dt \end{aligned}$$

puisque X , de densité f , a pour support $I =]a, b[$, alors bien sûr : $\int_a^b f(t)dt = 1$, et on peut donc réécrire le résultat précédent :

$$\begin{aligned} P(1 - U \leq 1 - h(X)) &= 1 - \int_a^b f(t)h(t)dt \iff 1 - P(1 - U \leq 1 - h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)dt \\ &\iff P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)dt \end{aligned}$$

NB : le "principe de symétrie" mis en œuvre ici est très courant en mathématiques, mais il fallait y penser...!

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soient α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1 , S_2 et S_3 . On suppose que :

- pour produire une unité de biens 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
- pour produire une unité de biens 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
- pour produire une unité de biens 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dit que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1 , x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1 , S_2 et S_3 , strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. a) Le système est viable si et seulement si pour chacun des trois secteurs, la production excède les besoins :

- Le secteur S_1 doit fournir αx_1 unités pour la production de x_1 unités de son secteur, et βx_2 unités pour la production de x_2 unités du secteur 2, soit au total $\alpha x_1 + \beta x_2$ unités. Cette quantité doit bien être inférieure aux x_1 unités effectivement produites par la secteur S_1 , il faut donc : $x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2$.
- Le secteur S_2 fournit les secteurs S_1 et S_3 , à raison de αx_1 unités et βx_3 unités respectivement. Là encore, la production doit excéder les besoins, donc : $x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3$.

- Le secteur S_3 se fournit lui-même, ainsi que le secteur S_2 , à raison de αx_2 et βx_3 unités respectivement. Il faut donc que $x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3$.

Le système est donc bien viable si et seulement si il existe un choix des productions $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$X - AX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_3 \\ \alpha x_2 + \beta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha x_1 - \beta x_2 \\ x_2 - \alpha x_1 - \beta x_3 \\ x_3 - \alpha x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix}$$

Au vu du système précédent, le système est effectivement viable si et seulement s'il existe une telle matrice colonne X à composantes strictement positives telle que $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. a) Le calcul : $A - (\alpha + \beta).I_3 = \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 0 \\ \alpha & -\alpha - \beta & \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$ permet de constater que cette matrice voit

la somme de ses colonnes être nulle, ce qui assure qu'elle est non-inversible, donc que $\alpha\alpha + \beta$ est valeur propre de A .

Pour déterminer le sous-espace propre associé, on résout le système : $(A - (\alpha + \beta).I_3)X = 0_{3,1}$,

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} -\beta x + \beta y = 0 \\ \alpha x - (\alpha + \beta)y + \beta z = 0 \\ \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \iff x = y \text{ puisque } \beta > 0 \\ \alpha(x - y) + \beta(z - y) = 0 \\ y - z = 0 \iff y = z \text{ puisque } \alpha > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi : $E_{\alpha+\beta}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

b) Avec ce vecteur X , dont toutes les composantes sont strictement positives :

$X - AX = X - (\alpha + \beta)X = (1 - (\alpha + \beta))X$; si $\alpha + \beta < 1$, alors $1 - (\alpha + \beta) > 0$ et le vecteur X vérifie bien la condition de la question 5.b), donc le modèle est viable dans ce cas.

L'énoncé admettait pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $] -1, 1[$.

7. a) On a déjà vu que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable. Réciproquement : si le modèle est viable, alors les valeurs propres sont toutes dans $] -1, 1[$ d'après ce qui vient d'être admis par l'énoncé, et en particulier : $\alpha + \beta < 1$. Il y a donc bien équivalence entre la viabilité du système est le fait que $\alpha + \beta < 1$.

b) On détermine les autres valeurs propres de A en échelonnant la matrice $A - \lambda.I_3$:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & \beta \\ \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \alpha L_2 - (\alpha - \lambda)L_1} \begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \alpha\beta + \lambda(\alpha - \lambda) & -\beta(\alpha - \lambda) \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \\ 0 & \alpha\beta + \lambda(\alpha - \lambda) & -\beta(\alpha - \lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \alpha L_3 - (\alpha\beta + \lambda(\alpha - \lambda))L_2} \begin{pmatrix} \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= -\alpha\beta(\alpha - \lambda) - (\alpha\beta + \lambda(\alpha - \lambda))(\beta - \lambda) \\ &= -\alpha^2\beta + \lambda\alpha\beta - \alpha\beta^2 + \lambda\alpha\beta - \lambda\alpha\beta + \lambda^2\alpha + \lambda^2\beta - \lambda^3 \\ &= -\alpha\beta(\alpha + \beta) + \lambda\alpha\beta + \lambda^2(\alpha + \beta) - \lambda^3 \\ &= (\lambda - (\alpha + \beta))\alpha\beta + \lambda^2((\alpha + \beta) - \lambda) = (\lambda - (\alpha + \beta))(\alpha\beta - \lambda^2) \end{aligned}$$

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda = \alpha + \beta \\ \text{ou } \lambda^2 = \alpha\beta \end{cases} \quad \text{donc : } \text{Sp}(A) = \{\alpha + \beta, \sqrt{\alpha\beta}, -\sqrt{\alpha\beta}\}$$

Comme α et β appartiennent à $]0, 1[$: $0 < \alpha\beta < 1$, donc $-1 < -\sqrt{\alpha\beta} < 0 < \sqrt{\alpha\beta} < 1$.

8. On suppose dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0, 1[$).

On cherche donc la probabilité : $P(\alpha + \beta < 1) = P(\alpha < 1 - \beta)$.

La variable aléatoire α joue ici le rôle de U dans la partie 1, de même que β est définie selon des hypothèses correspondant à celles de X ; il reste à dire que la fonction h utilisée ici est $h : x \mapsto 1 - x$, fonction bien continue sur $]0, 1[$, à valeurs dans $[0, 1]$, et ainsi :

$$P(\alpha < 1 - \beta) = P(\alpha < h(\beta)) = \int_a^b f(t) \cdot (1 - t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b t f(t) dt = 1 - E(\beta)$$

9. On suppose désormais que α et β sont choisis de sorte que le modèle est viable. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i , et $y_i + z_i$ le prix de vente d'une unité de bien du secteur i . La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'échat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i .

On définit les deux matrices lignes : $Y = (y_1 \ y_2 \ y_3)$ et $Z = (z_1 \ z_2 \ z_3)$, ainsi que la matrice

carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

- a) On évalue ici le produit de la vente de la production de chacun des secteurs : ce prix de vente doit compenser le coût de production.

- Le secteur S_1 achète α unités à lui-même et β unités au secteur S_2 , d'où un prix de : $\alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)$, qui représente donc le coût de production unitaire du secteur S_1 , de sorte que $y_1 = \alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)$.
- Le secteur S_2 achète β unités au secteur S_1 et α unités au secteur S_3 , d'où un coût de production : $y_2 = \beta(y_1 + z_1) + \alpha(y_3 + z_3)$.
- Le secteur S_3 achète α unités au secteur 2, et β unités à lui-même, d'où un coût de production : $y_3 = \alpha(y_2 + z_2) + \beta y_3$.

Les réels y_1, y_2, y_3 et z_1, z_2, z_3 sont donc liés par les relations :

$$\begin{cases} y_1 = \alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2) \\ y_2 = \beta(y_1 + z_1) + \alpha(y_3 + z_3) \\ y_3 = \beta(y_2 + z_2) + \beta y_3 \end{cases}$$

$$\iff (y_1 \ y_2 \ y_3) = (\alpha(y_1 + y_2) \ \beta y_1 + \alpha y_3 \ \beta(y_2 + y_3)) + (\alpha z_2 \ \beta z_1 + \alpha z_3 \ \beta z_2)$$

$$\iff (y_1 \ y_2 \ y_3) = (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} + (z_1 \ z_2 \ z_3) \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff Y = AY + ZB \quad (1)$$

- b) La matrice $I - A$ est inversible, sinon $\lambda = 1$ serait valeur propre de A , ce qui est impossible puisqu'on a supposé ici que le modèle est viable, donc que le spectre de A est inclus dans $] -1, 1[$.

On peut alors réécrire l'équation matricielle précédente sous la forme :

$$Y - YA = ZB \iff Y(I - A) = ZB \iff Y = ZB(I - A)^{-1}$$

ce qui prouve bien que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant (1).

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

Jusqu'à la fin du problème, on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I , de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

3a - Simulation par la méthode d'inversion

10. a) On note H la restriction de G à I . La stricte positivité de g sur I implique la stricte croissance de H sur I , sur lequel cette restriction de la fonction de répartition G est aussi continue.

Il reste à dire que puisque f est supposée nulle en-dehors de $I =]a, b[$, alors nécessairement :
 $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} H(x)$, tandis que $\lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow b^-} H(x)$.

On peut ainsi invoquer le théorème éponyme qui garantit que H réalise une bijection de I sur $]0, 1[$.

En notant H^{-1} la bijection réciproque, le tableau de variations de H^{-1} est le suivant :

x	0	1
H^{-1}	a	b

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de X .

- b) Pour tout réel x de I :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(H^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq H(x)) \quad \text{par stricte croissance et bijectivité de } H \\ &= H(x) = G(x) \quad \text{puisque : } \forall x \in I, H(x) \in]0, 1[! \end{aligned}$$

U suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, a en effet pour fonction de répartition $F_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

et on utilise bien la deuxième expression puisque pour tout x de I , $H(x) \in]0, 1[$.

c) Il reste ici à dire que : $X = H^{-1}(U)$ est à valeurs dans $]a, b[$ d'après le tableau précédent, ce qui garantit que (pour autant que cela ait un sens, suivant que a et/ou b sont infinis) :

$$\forall x < a, \quad F(x) = 0 = G(x) \quad \text{et} \quad \forall x > b, \quad F(x) = 1 = G(x)$$

et ainsi on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x)$. Les deux variables aléatoires X et Z ayant la même fonction de répartition, suivent par conséquent la même loi.

11. Simulation de lois exponentielles.

On suppose dans cette question que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) D'après le cours sur cette loi usuelle, en prenant un intervalle ouvert pour I :

$$I =]0, +\infty[, \quad g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On obtient l'expression de la bijection réciproque H^{-1} en résolvant, pour tout y de $]0, 1[$, l'équation :

$$H(x) = y \iff 1 - e^{-\lambda x} = y \iff 1 - y = e^{-\lambda x} \iff \ln(1 - y) = -\lambda x \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y) = H^{-1}(y)$$

b) Évidemment, **Scilab** dispose déjà d'une fonction de simulation de la loi exponentielle (à savoir `grand(1,1,'exp',1/lambda)`), ce qui n'empêche pas d'écrire celle-ci, qui simule cette loi uniquement à partir de la loi uniforme sur $]0, 1[$:

```

1  function x = expo(lambda)
2      y = rand()
3      x = -log(1-y)/lambda
4  endfunction

```

12. Simulation de la loi de Laplace.

On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (\text{densité de Laplace}).$$

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Soit V une variable aléatoire indépendante de Y , suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie :

$$P(V = -1) = P(V = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $X = VY$.

a) Il est d'emblée clair que g est continue sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions continues sur \mathbb{R} . La stricte positivité de \exp sur \mathbb{R} , assure également que g est strictement positive sur \mathbb{R} .

Il convient enfin de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{1}{2} e^{-|-x|} = \frac{1}{2} e^{-|x|} = g(x)$, la parité de la fonction valeur absolue entraîne celle de g .

Comme : $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut 1, puisque c'est l'intégrale sur son support, de la densité

de Y qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et puisque g est paire sur \mathbb{R} , avec : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge, et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

ce qui achève de prouver que g est bien une densité de probabilité.

b) Les calculs de probabilités associés à $X = VY$ vont se faire à l'aide de la formule des probabilités totales et du système complet d'événements $([V = -1], [V = 1])$ naturellement associé à V :

• Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P([V = -1] \cap [X > x]) + P([V = 1] \cap [X > x]) \\ &= P([V = -1] \cap [-Y > x]) + P([V = 1] \cap [Y > x]) \\ &= P(V = -1) \times P(Y < -x) + P(V = 1) \times P(Y > x) \quad V \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{2}P(Y > x) \quad \text{en effet : } -x \leq 0 \text{ donc } P(Y < -x) = 0 \end{aligned}$$

• De même, pour tout $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(V = -1) \times P(Y \geq -x) + P(V = 1) \times P(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geq -x) \quad \text{en effet : } x \leq 0 \text{ donc } P(Y \leq x) = 0 \end{aligned}$$

c) On en déduit l'expression de la fonction de répartition de X :

- Pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$
- Pour tout $x \leq 0$, $F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}e^x$.

d) La fonction de répartition F de X est de classe C^1 , donc continue sur chacun des deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = F(0)$, donc F est bien continue en 0, et sur \mathbb{R} tout entier.

La variable aléatoire X est donc bien continue et admet une densité f définie par dérivation de F sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$\forall x \in] -\infty, 0[, f(x) = \frac{1}{2}e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

On constate qu'on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = g(x)$, et il suffit alors de choisir arbitrairement $f(0) = \frac{1}{2} = g(0)$ pour en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$, et donc que g est bien une densité de X , ce qui prouve que X suit la loi de Laplace.

e) La fonction Scilab suivante simule la loi de Laplace ; on revient pour cela à la définition $X = VY$, où Y suit la loi exponentielle qu'on sait simuler avec la fonction précédente ; pour V , on utilise une simulation de la loi uniforme sur $]0, 1[$: si on obtient une valeur inférieure à $\frac{1}{2}$ (ce qui arrive avec la probabilité $\frac{1}{2}$), alors on donne à X la valeur de Y (V vaut donc 1), et $-Y$ sinon.

```

1  function x = laplace()
2      y = expo(1)
3      v = rand()
4      if v < 1/2 then
5          x = y
6      else
7          x = -y
8      end
9  endfunction

```

3b - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in I, g(x) \leq cf(x)$.

13. Puisque la fonction f est strictement positive sur I , la fonction $h : x \mapsto \frac{g(x)}{cf(x)}$ est bien définie et continue sur I , comme quotient de fonctions continues sur I , et vérifie bien :

$$\forall x \in I, cf(x)h(x) = g(x) \dots!$$

De plus : $\forall x \in I, 0 \leq g(x) \leq cf(x)$, donc $0 \leq \frac{g(x)}{cf(x)} \leq 1$ en divisant par $cf(x) > 0$, ce qui prouve bien que h est à valeurs dans $[0, 1]$.

On considère alors :

- une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi uniforme sur $]0, 1[$.
- une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]a, b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F .

On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$, les variables $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

14. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires U_k et X_k vérifient les conditions d'application du résultat de la partie I, qui donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(U_k \leq h(X_k)) = \int_a^b f(x)h(x)dx = \frac{1}{c} \int_a^b g(x)dx = \frac{1}{c}$$

au vu du résultat de la question 13., et puisque g est une densité de support $]a, b[$.

Les hypothèses faites ci-dessus prouvent que $([U_k \leq h(X_k)])_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme, d'après le lemme des coalitions, une suite d'événements mutuellement indépendants, tous de même probabilité $\frac{1}{c}$.

Comme N est le temps d'attente de la première réalisation de l'un de ces événements (considéré comme le succès), tous indépendants et de même probabilité, on en déduit effectivement que N suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{c}$:

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(N = k) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{c}, \quad E(N) = \frac{1}{p} = c, \quad V(N) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{c-1}{c} \times c^2 = c(c-1)$$

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N , c'est-à-dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: l'événement $[X \leq x] \cap [N = n]$ est réalisé si et seulement si X_n est la première variable aléatoire pour laquelle $[U_n \leq h(X_n)]$ est réalisé, et donc : pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $[U_k > h(X_k)]$ est réalisé. Dans ce cas X prend la valeur X_n , donc $[X_n \leq x]$ est réalisé. En clair :

$$[X \leq x] \cap [N = n] = \bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)] \cap [U_n \leq h(X_n)] \cap [X_n \leq x]$$

- b) Le résultat de la question 3.b) s'applique avec les variables aléatoires X_n et U_n , qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \int_a^x f(t)h(t)dt = \frac{1}{c} \int_a^x g(t)dt = \frac{1}{c} (G(x) - \lim_{t \rightarrow a^+} G(t)) = \frac{1}{c} G(x)$$

- c) L'indépendance mutuelle des variables $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ implique, dans le passage à la probabilité pour l'événement de la question 15.a) :

$$\begin{aligned} P([X \leq x] \cap [N = n]) &= \prod_{k=1}^{n-1} P(U_k > h(X_k)) \times P([U_n \leq h(X_n)] \cap [X_n \leq x]) \\ &= \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \times \frac{1}{c} G(x) \end{aligned}$$

On remarque donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, P([X \leq x] \cap [N = n]) = P(N = n) \times G(x)$.

- d) Il reste alors à citer la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui donne, pour tout x de I :

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X \leq x] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = n) \times G(x) \quad \text{d'après ce qu'on a remarqué plus haut} \\ &= G(x) \quad \text{puisque } \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = n) = 1 \end{aligned}$$

16. L'égalité précédente, qui s'écrit : $\forall x \in I, F_X(x) = G(x)$, s'étend aussi en-dehors de I , puisque X est à valeurs dans $]a, b[$ (comme les X_n), F_x et G étant nulles avant a , égales à 1 après b .

Les variables aléatoires X et Z suivent donc la même loi, puisqu'elles ont la même fonction de répartition : la méthode du rejet permet bien de simuler la loi de Z .

17. Simulation de la loi normale.

Dans cette question, Z suit la loi normale centrée et réduite, donc $I = \mathbb{R}$.

Soit f la densité de Laplace (question 12.), définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

- a) C'est du cours : la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de Z qui est clairement CSP(\mathbb{R}).

- b) La fonction $a : x \mapsto e^{x-\frac{x^2}{2}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$, et :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad a'(x) = (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}$$

L'exponentielle étant strictement positive, on en déduit que $a'(x)$ a le même signe que $1-x$: la fonction a est par conséquent strictement croissante sur $[0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

c) De ce qui précède, on déduit que la fonction a admet un maximum sur $[0, +\infty[$, atteint en $x = 1$ et qui vaut : $a(1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

On en déduit : $\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{x-\frac{x^2}{2}} \leq \sqrt{e} \iff \forall x \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{e}{2\pi}}e^{-x}$,

C'est-à-dire : $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) \leq \frac{c}{2}e^{-x}$ avec $c = 2\sqrt{\frac{e}{2\pi}}$.

d) L'inégalité précédente est bien : $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) \leq cf(x)$.

Il suffit alors de remarquer que les deux densités g et f sont toutes les deux paires ! Et que par conséquent (principe de symétrie), l'inégalité précédente est aussi vraie pour tout x négatif : en effet, $-x$ est alors positif, donc :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad g(-x) \leq cf(-x) \iff g(x) \leq cf(x)$$

e) On peut alors reprendre le processus étudié précédemment pour simuler la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ suivie par la variable aléatoire Z :

On simule, autant de fois que nécessaire et successivement, U_k et X_k suivant respectivement la loi uniforme sur $]0, 1[$ et la loi de Laplace, jusqu'à ce que pour la première fois, $[U_k \leq h(X_k)]$ soit

réalisé, où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{cf(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\frac{e}{2\pi}}\frac{1}{2}e^{-x}} = e^{-\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}}$; si n est le rang du premier succès, alors on donne à x la valeur de X_n , car on a vu qu'avec cette définition, X suit la même loi que Z .

f) On écrit donc, pour finir, la fonction Scilab permettant de simuler la loi normale centrée, réduite par la méthode du rejet :

```

1  fonction z = normale()
2      x = laplace()
3      u = rand()
4      while u > 1/2*exp(-1/2 - x - x^2/2)
5          x = laplace()
6          u = rand()
7      end
8      z = x
9  endfunction

```

La valeur rendue par la fonction sera bien la dernière valeur prise par x : ce peut être la toute première si dès le début, $[U_1 \leq h(X_1)]$ est réalisé !

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★