# MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2013

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

## Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.

On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ ;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables $U_k$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de $N$ ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, et $X_0$ la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour une compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire $X$ définie par :

$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

  et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si $N$ prend la valeur 0. **On dit que $X$ suit une loi composée.**
- Pour tout entier naturel $j$, on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

## Partie I - Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables $U_k$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$, où $p$ est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : $X_n$ est la somme de $n$ v.a.r. de Bernoulli de paramètre $p$, indépendantes et identiquement distribuées : d'après le cours, $X_n$ suit donc la loi binomiale de paramètres $(n, p)$.
2. Soit $j \in \mathbb{N}$ : on calcule $r_j = P(X = j)$ avec la *formule des probabilités totales* et le système complet d'événements associé à la v.a.r. $N$ :

$$\begin{aligned} r_j = P(X = j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{N=n}(X = j) \times P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{N=n}\left(\sum_{k=1}^{N} U_k = j\right).P(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} U_k = j\right).P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j).p_n \end{aligned}$$

3. Dans cette question 3. on suppose que $N$ suit la loi binomiale de paramètres $m$, entier naturel, et $\pi$, réel dans $]0; 1[$. Soit $j$ un entier naturel.
   (a) La v.a.r. $N$ a pour univers image : $N(\Omega) = [\![0; m]\!]$, donc $X = \sum_{k=1}^{N} U_k$ est au maximum, une somme de $m$ v.a.r. de Bernoulli : par conséquent, $X(\omega) \leqslant m$ pour tout $\omega \in \Omega$, ce qui exprime en particulier que : $\forall j > m$, $r_j = P(X = j) = 0$.

(b) Soit $j \in [\![0;m]\!]$ : vu la loi supposée de $N$, on a : $p_n = P(N=n) = \begin{cases} \binom{m}{n}\pi^n.(1-\pi)^{m-n} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

$X_n$ suit également une loi binomiale (cf 1.), et la formule du 2. se réécrit dans ce cas :

$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j).P(N=n) = \sum_{n=\cancel{0}j}^{m} \binom{n}{j} p^j.(1-p)^{n-j}.\binom{m}{n}\pi^n.(1-\pi)^{m-n}$. ( $\binom{n}{j} = 0$ si $n < j$)

(c) Petit travail classique avec les factorielles : pour tous entiers $j, n, m$ tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$ :
$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!} = \frac{m!}{j!(m-j)!}.\frac{(m-j)!}{(n-j)!(m-n)!} = \binom{m}{j}.\binom{m-j}{n-j}$.

(d) On peut donc reprendre le calcul de somme précédent en appliquant cette formule, puis en sortant en facteur devant la somme, les termes qui ne dépendent plus de l'indice $n$ ; pour tout entier $j \in [\![0;m]\!]$ :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{m} \binom{n}{j} p^j.(1-p)^{n-j}.\binom{m}{n}\pi^n.(1-\pi)^{m-n} \\ &= \sum_{n=j}^{m} p^j(1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} \\ &= \binom{m}{j} p^j \sum_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j}(1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n} \overset{[\ell=n-j]}{=} \binom{m}{j} p^j \sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}(1-p)^{\ell}\pi^{\ell+j}(1-\pi)^{m-(\ell+j)} \\ &= \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}[(1-p)\pi]^{\ell}(1-\pi)^{m-j-\ell} \end{aligned}$$

(e) On peut alors terminer le calcul précédent, puisqu'on reconnaît dans la dernière somme la fomule du binôme de Newton, avec l'exposant $m-j$ et les réels $a = (1-p)\pi$ et $b = (1-\pi)$ :

$\forall j \in [\![0;m]\!],\ r_j = P(X=j) = \binom{m}{j}(p\pi)^j.[(1-p)\pi + (1-\pi)]^{m-j} = \binom{m}{j}(p\pi)^j(1-p\pi)^{m-j}$.

Ceci permet de voir que dans ce cas, <u>$X$ suit la loi binomiale de paramètres $(m, p\pi)$</u>.

4. On suppose dans cette question 4 que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, réel strictement positif.

(a) On repart de la formule établie à la q.2., cette fois la somme reste bien infinie puisque $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout entier naturel $j$ :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j).p_n = \sum_{n=j}^{+\infty}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!} \quad (\text{ on a encore } P(X_n=j) = 0 \text{ si } n<j) \\ &= e^{-\lambda}.p^j.\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{n!}{j!}(n-j)!(1-p)^{n-j}.\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}.\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-j}}{(n-j)!} \end{aligned}$$

en écrivant classiquement : $\lambda^n = \lambda^{n-j+j} = \lambda^{n-j}.\lambda^j$.

(b) Comme précédemment on effectue le changement d'indice $\ell = n-j$ pour écrire :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N},\ r_j = P(X=j) &= e^{-\lambda}.\frac{(\lambda p)^j}{j!}.\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{\ell}}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda}.\frac{(\lambda p)^j}{j!}.e^{\lambda(1-p)} \quad \text{on a reconnu une série exponentielle} \\ &= e^{-\lambda p}.\frac{(\lambda p)^j}{j!} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que dans ce cas, <u>$X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p$</u>.

## Partie II - La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binômiaux aux nombres réels en posant, pour tout $y$ réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ : $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. On exploite ici le fait que les calculs de coefficients binomiaux, même généralisés, peuvent se calculer de proche en proche, par exemple grâce à la formule sans nom, dont les calculs suivants redonnent la preuve :
$\forall k \geqslant 2,\ \binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i) = \frac{y(y-1)...(y-k+1)}{k(k-1)...1} = \frac{y}{k} \times \frac{(y-1)(y-2)...(y-k+1)}{(k-1)(k-2)...1} = \frac{y}{k}\binom{y-1}{k-1}$.
D'où la fonction récursive en Pascal :

```
function cb(y:real;k:integer):real;
if k=0 then cb:=1
       else cb:=y/k*cb(y-1,k-1);
end;
```

Les fonctions récursives sont toujours très courtes à rédiger ! !

6. *la formule du binôme négatif*
Soit $c$ un réel strictement positif, et $x$ un réel de $[0;1[$.

(a) Rappelons ici l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n$) : si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I$, et $a$ et $b$ deux éléments de $I$, alors :
$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n.f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$, où $f^{(k)}$ est la dérivée $k$-ième de $f$.
La fonction ici considérée est $f :\ x \mapsto \frac{1}{(1-x)^c}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$ comme fonction rationnelle (de seule valeur interdite 1).
Pour tout $x \in [0;1[$ : $f(x) = (1-x)^{-c}$ donc $f'(x) = (-1).(-c).(1-x)^{-c-1} = \frac{c}{(1-x)^{c+1}}$ (penser à écrire un inverse comme puissance négative pour dériver facilement !).
Une récurrence évidente( !) montre que plus généralement, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in [0;1[$ :
$$f^{(k)}(x) = \frac{c(c+1)...(c+k-1)}{(1-x)^{c+k}}.$$
En appliquant alors la formule de Taylor avec reste intégral pour $a = 0$ et $b = x$, on obtient :
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n.f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{c(c+1)...(c+k-1)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}.c(c+1)...(c+n)\int_0^x (x-t)^n.\frac{1}{(1-t)^{c+n+1}}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k}x^k + c.\binom{c+n}{n}I_n \end{aligned}$$
Puisqu'en effet : $\binom{c+k-1}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(c+k-1-i) = \frac{(c+k-1)(c+k-2)...c}{k!}$
et $\binom{c+n}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \frac{(c+n)(c+n-1)...(c+1)}{n!}$.

(b) Pour tout $t \in [0;x]$, sachant que $x \in [0;1[$, on a bien sûr : $x-t \geqslant 0$ et $1-t > 0$, donc $\frac{x-t}{1-t} \geqslant 0$.
Pour établir le membre de droite de l'inégalité, on étudie le signe de la différence :
$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x-xt-x+t}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geqslant 0$ comme produit et quotient de trois termes tous positifs.
On a bien : $\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
La croissance de la fonction puissance $y \mapsto y^n$ sur $[0;+\infty[$ donne alors :

$\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$, de même, puisque $0 < 1-x \leqslant 1-t$ pour tout $t \in [0;x]$, alors $0 < (1-x)^{c+1} \leqslant (1-t)^{c+1}$, puis par inverse : $\forall t \in [0;x],\ 0 < \dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1-x)^{c+1}}$, ce qui donne finalement par produit membre à membre d'inégalités entre réels tous positifs :

$$\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Les fonctions concernées (de la variable $t$, celle de droite est donc considérée comme une fonction constante) sont continues sur $[0;x]$, avec $x \geqslant 0$ (bornes dans l'ordre croissant), donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\mathrm{d}t \iff 0 \leqslant I_n \leqslant (x-0) \times \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : par définition, $\dbinom{c+n}{n} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \dfrac{(c+n)(c+n-1)...(c+2)(c+1)}{n(n-1)...2.1}$

$= \dfrac{c+n}{n}.\dfrac{c+n-1}{n-1}...\dfrac{c+2}{2}.\dfrac{c+1}{1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{c+k}{k} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{c}{k}\right)$.

ii. Question ultra-classique, qu'on résout par un argument de convexité : la fonction $h:\ t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$, avec : $\forall t \geqslant 0,\ h'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et $h''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$. La fonction $h$ est donc concave sur $[0;+\infty[$, et sa courbe est située au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0, qui a pour équation : $y = h'(0)(t-0)+h(0) \iff y = t$. D'où l'inégalité : $\forall t \geqslant 0,\ \ln(1+t) \leqslant t$.

iii. Encore une question ultra-classique, qu'on peut rédiger avec l'inégalité des accroissements finis ou par un argument d'intégration :
la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $]0;+\infty[$, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on a : $\forall t \in [k-1;k],\ \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}(\leqslant \dfrac{1}{k-1})$. Par continuité des fonctions concernées sur l'intervalle cité, et puisque $k-1<k$, la croissance de l'intégrale donne :
$\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \iff (k-(k-1)) \times \frac{1}{k} \leqslant [\ln t]_{k-1}^{k} \iff \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1).$
Le passage à la somme dans cette inégalité pour $k$ variant de 2 à $n$ donne alors :
$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\ln(k-1) \iff \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n)-\ln(1) \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n).$
Attention à ne sommer que pour des valeurs de $k$ pour lesquelles l'inégalité est valide !
Ici le terme pour $k=1$ (qui vaut 1) est rajouté en dernier aux deux membres de l'inégalité.

iv. Des questions précédentes, on déduit :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{c}{k} = c.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant c.(1+\ln(n))$$

La croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ permet alors d'écrire : $\dbinom{c+n}{n} \leqslant e^{c(1+\ln(n))} = e^c.n^c$, d'où : $0 \leqslant \dbinom{c+n}{n}.x^{n+1} \leqslant e^c.n^c.x^{n+1}$. Étant donné qu'on a pris $x \in [0;1[$, les croissances comparées classiques donnent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^c.x^{n+1} = 0(=\lim_{n\to+\infty} x^{n+1})$. Ainsi grâce à l'encadrement précédent, le théorème du même nom assure que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}.x^{n+1} = 0$.

(d) La relation obtenue à la question 6.(a) s'écrivant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c.\binom{c+n}{n}x^{n+1}$, où :
$0 \leqslant c\dbinom{c+n}{n}I_n \leqslant \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}}.\dbinom{c+n}{n}x^{n+1}$ d'après 6.(b). Le résultat précédent donne alors, encore une fois par le théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n}I_n = 0$, d'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k} = \frac{1}{(1-x)^c}$,

ce qui exprime bien que la série $\sum_{k\geqslant 0}\binom{c+k-1}{k}$ converge, et a pour somme $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}=\frac{1}{(1-x)^c}$.

7. Soit $p$ un réel de $]0;1[$ et $r$ un réel strictement positif. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $p_k=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$ est un réel positif ; par ailleurs, la formule du binôme négatif précédemment obtenue permet d'écrire : $\sum_{k=0}^{+\infty}p_k=p^r.\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k=p^r.\frac{1}{(1-(1-p))^r}=\frac{p^r}{p^r}=1$. Ainsi, la suite $(p_k)_{n\in\mathbb{N}}$ définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. (loi *binomiale négative* de paramètres $r$ et $p$)
8. Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres $r=1$ et $p$ : on a alors $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et : $\forall k\in\mathbb{N},\ P(Y=k)=\binom{1+k-1}{k}(1-p)^k p^1=\binom{k}{k}(1-p)^k p=(1-p)^k p$.
   On a alors : $(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Y+1=k)=P(Y=k-1)=(1-p)^{k-1}p$.
   L'univers-image et l'expression de la probabilité identifient la loi géométrique de paramètre $p$.
9. *Espérance et variance.*
   Soit $Z$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres $r$ réel strictement positif et $p\in]0;1[$.

   (a) Encore une petite question technique de calcul avec le coefficient binomial généralisé : attention, puisque $r$ est réel, on ne peut pas toujours faire intervenir des factorielles !
   $\forall k\geqslant 1,\ k\binom{r+k-1}{k}=k.\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r+k-1-i)=\frac{1}{(k-1)!}.\prod_{i=0}^{k-2}(r+k-1-i)\times(r+k-1-(k-1))$
   $=r\times\frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(r+k-1-i)$, ce qui donne bien : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ k\binom{r+k-1}{k}=r\binom{r+k-1}{k-1}$ avec la définition.

   (b) Comme $Z(\Omega)=\mathbb{N}$, la v.a.r. $Z$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0}kP(Z=k)$ est absolument convergente ; comme c'est une série à termes positifs ($k\in\mathbb{N},\ P(Z=k)\geqslant 0$ comme probabilité), il suffit d'étudier la convergence simple :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}kP(Z=k)=\sum_{k=\cancel{0}1}^{n}k.\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r=p^r.\sum_{k=1}^{n}r\binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k$$
   $$\overset{[j=k-1]}{=}r.p^r.\sum_{j=0}^{n-1}\binom{r+j}{j}(1-p)^{j+1}=r.p^r.(1-p).\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r+1+j-1}{j}(1-p)^j$$
   dans la dernière somme, on reconnaît le terme général de la formule du binôme négatif, avec $c=r+1$. Comme $(1-p)\in]0;1[$, la série est donc convergente, et $Z$ admet une espérance qui vaut :
   $$E(Z)=\sum_{k=0}^{+\infty}kP(Z=k)=rp^r(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+1+k-1}{k}(1-p)^k=rp^r(1-p).\frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}}$$
   $$=\frac{rp^r(1-p)}{p^{r+1}}=\frac{r(1-p)}{p}.$$

   (c) D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0}k(k-1)P(Z=k)$ est absolument convergente ; là encore c'est une série à termes positifs, et même nuls pour $k=0$ et $k=1$ ; il suffit donc d'étudier la convergence simple :
   $$\forall n\geqslant 2,\ \sum_{k=\cancel{0}2}^{n}k(k-1)P(Z=k)=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r=p^r\sum_{k=2}^{n}(k-1)r\binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k$$
   $$\overset{[j=k-1]}{=}rp^r\sum_{j=1}^{n-1}j\binom{r+j}{j}(1-p)^{j+1}=rp^r(1-p)\sum_{j=1}^{n-1}(r+1)\binom{r+j}{j-1}(1-p)^j$$
   $$\overset{[i=j-1]}{=}r(r+1)p^r(1-p)\sum_{i=0}^{n-2}\binom{r+1+i}{i}(1-p)^{i+1}$$

$$= r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{i=0}^{n-2}\binom{r+2+i-1}{i}(1-p)^i$$

On reconnaît à nouveau la formule du binôme négatif, cette fois avec $c = r+2$. Comme là encore $(1-p) \in ]0;1[$, la série est convergente et $Z(Z-1)$ admet une espérance, qui vaut :

$$E(Z(Z-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(Z=k) = r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{r+2+i-1}{i}(1-p)^i$$
$$= r(r+1)p^r(1-p)^2.\frac{1}{(1-(1-p))^{r+2}} = \frac{r(r+1)p^r(1-p)^2}{p^{r+2}} = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}$$

Par linéarité de l'espérance : $Z^2 = Z(Z-1)+Z$ admet une espérance comme somme de deux v.a.r. qui en admettent une, et :

$$E(Z^2) = E(Z(Z-1)) + E(Z) = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} = \frac{r(r+1)(1-p)^2 + r(1-p)p}{p^2}$$
$$= \frac{r(1-p)[(r+1)(1-p)+p]}{p^2} = \frac{r(1-p)(r+1-rp)}{p^2}.$$

La v.a.r. $Z$ admet alors, d'après la formule de Koenig-Huygens, une variance qui vaut :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{r(1-p)(r+1-rp)}{p^2} - \frac{r^2(1-p)^2}{p^2} = \frac{r(1-p)[r+1-rp-r(1-p)]}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

## Partie III - Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N=k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans tote la suite du sujet que la loi de $N$ vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels $a$ et $b$, avec $a < 1$ et $a+b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}$$

On dira alors que $N$ suit la loi $\mathcal{P}(a,b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

(a) Vu la relation de récurrence vérifiée par les $p_k$, l'expression générale $p_k = \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right)$ est immédiate par induction... La preuve, puisqu'il en faut une, se fait par récurrence sur $k$ :

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k=1$ : $p_0\prod_{i=1}^{1}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0.\left(a+\frac{b}{1}\right) = p_1$ d'après la relation de récurrence pour $k=1$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}^*$ ; montrons qu'alors elle est encore vraie au rang suivant :

$p_{k+1} = \left(a+\frac{b}{k+1}\right).p_k \overset{H.R.}{=} p_0.\prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right).\left(a+\frac{b}{k+1}\right) = p_0.\prod_{i=1}^{k+1}\left(a+\frac{b}{i}\right)$, donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. Dans ce cas, avec l'expression précédente :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p_0.\prod_{i=1}^{k}\frac{b}{k} = p_0.\frac{b}{1}.\frac{b}{2}\cdots.\frac{b}{k-1}.\frac{b}{k} = p_0.\frac{b^k}{k!}.$

Comme la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit la loi d'une variable aléatoire, on doit enfin avoir :

$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \iff p_0.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!} = 1 \iff p_0.e^b = 1 \iff p_0 = e^{-b}$ (on a reconnu une série exponentielle).

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = e^{-b}.\frac{b^k}{k!}$, ce qui prouve qu'ici, $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $b$.

(c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

i. Comme l'énoncé l'indique, supposons que les réels $p_k$ sont tous strictement positifs : la relation de récurrence $p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right).p_{k-1}$ implique alors que pour tout entier naturel non nul $k$, on a $a + \dfrac{b}{k} > 0$.

C'est bien sûr impossible ! Vu que $\lim\limits_{k \to +\infty} a + \dfrac{b}{k} = a < 0$, il existe un premier rang $k_0$ tel que $a + \dfrac{b}{k_0} < 0$.

Mais dans ce cas, $p_{k_0} = \left(a + \dfrac{b}{k_0}\right).p_{k_0-1} < 0$ puisque $p_{k_0-1} > 0$ par hypothèse. Cela contredit donc le fait qu'on doit aussi avoir $p_{k_0} > 0$.

On a ainsi démontré par l'absurde, que les $p_k$ ne sont pas tous strictement positifs. Comme ce sont des réels positifs (ne pas perdre de vue que ce sont des probabilités !) mais pas tous strictement positifs, il existe donc un plus petit entier $r$ tel que $p_r \neq 0$ et $p_{r+1} = 0$.

Dans ce cas, on a $p_{r+2} = \left(a + \dfrac{b}{r+2}\right).p_{r+1} = 0$, et ainsi de suite : $\forall k > r,\ p_k = 0$. Pour la même raison, aucun des $p_k$ n'est nul pour $k \leqslant r$, sinon on aurait $p_r = 0$.

ii. Par définition de l'entier $r$ : $p_r \neq 0$ et $p_{r+1} = \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right).p_r = 0$ ; la règle du produit nul assure donc que : $a + \dfrac{b}{r+1} = 0 \iff a = -\dfrac{b}{r+1} \iff b = -a(r+1)$.

iii. On peut donc réécrire la relation obtenue en 10.(a) :

$\forall k \in [\![1;r]\!],\ p_k = p_0.\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(a + \frac{-a(r+1)}{i}\right) = p_0.\prod_{i=1}^{k}(-a).\frac{r+1-i}{i} = p_0.(-a)^k.\frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}\cdots\frac{r-k+1}{k}$

$= p_0 + (-a)^k.\dfrac{r!}{(r-k)!k!} = (-a)^k.\dbinom{r}{k}.p_0$. La formule est encore vraie pour $k = 0$ puisque $\dbinom{r}{0} = 1$ par convention.

Une fois de plus, la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définissant la loi d'une variable aléatoire, elle doit vérifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \iff p_0.\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}.(-a)^k = 1 \iff p_0.(-a+1)^r = 1 \iff p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$. On a reconnu au passage la formule du binôme de Newton.

iv. Finalement, la loi de $N$ est donnée par : $\forall k \in [\![0;r]\!],\ p_k = \dbinom{r}{k}.(-a)^k.\dfrac{1}{(1-a)^r} = \dbinom{r}{k}\dfrac{(-a)^k}{(1-a)^k}.\dfrac{1}{(1-a)^{r-k}}$, ce qui correspond à une loi binomiale de paramètres $(r, \dfrac{-a}{1-a})$.

<u>Remarque</u> : $\dfrac{-a}{1-a} > 0$ puisqu'ici, $a < 0$ ! et $r = -\dfrac{b}{a} - 1$.

(d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

i. Pour tout entier naturel $k$, 10.(a) donne cette fois : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$p_k = p_0.\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0.\prod_{i=1}^{k} a.\frac{i + \frac{b}{a}}{i} = p_0.a^k.\frac{(\frac{b}{a}+1)(\frac{b}{a}+2)\cdots(\frac{b}{a}+k)}{1.2.\cdots.k} = p_0.a^k.\binom{\frac{b}{a}+k}{k}$.

ii. Il reste à calculer $p_0$, où l'on exprime une fois de plus la condition :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \iff p_0.\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k} = 1 \iff p_0.\frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} \iff p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$. On a ici utilisé la formule du binôme négatif, avec $c = \frac{b}{a} + 1$.

Ainsi donc, la loi de $N$ est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dbinom{\frac{b}{a}+k}{k}.a^k.(1-a)^{\frac{b}{a}+1}$, ce qui correspond à une loi binomiale négative de paramètres $\frac{b}{a} + 1$ et $p = 1 - a$.

11. On étudie successivement les trois cas :

⋆ Lorsque $a = 0$, $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $b$, donc $E(N) = V(N) = b$, ce qui correspond bien à : $E(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $V(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$ avec $a = 0$.

⋆ Lorsque $a < 0$, $N$ suit la binomiale de paramètres $(r, \dfrac{-a}{1-a})$, et dans ce cas $E(N) = \dfrac{-ar}{1-a} = \dfrac{b+a}{1-a}$

puisque $b = -a(r+1)$, et $V(N) = \dfrac{-ar}{1-a}.\dfrac{1}{1-a} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$, on obtient bien les formules attendues.

$\star$ Enfin quand $a > 0$, la va.r. $N$ suit la loi binomiale négative de paramètres $\frac{b}{a}+1$ et $p = 1-a$, d'où (voir les résultats de la partie II) : $E(N) = \dfrac{(\frac{b}{a}+1).a}{1-a} = \dfrac{b+a}{1-a}$, et $V(N) = \dfrac{(\frac{b}{a}+1).a}{(1-a)^2} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

## Partie IV - L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations du sujet et de la partie III
- Si $A$ est un événement et $Y$ une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de $Y$ sachant $A$.
  *C'est-à-dire que tous les calculs se font avec la probabilité conditionnelle $P_A$ : quand $Y$ est une v.a.r. discrète, $E_A(Y) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} y.P_A(Y = y)$ sous réserve d'existence de cette somme.*

12. Soit $n \in \mathbb{N}$ : $P(X_n = 0) = P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i = 0\right) = P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i = 0\right)$. En effet, puisque les $U_i$ sont des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc positives, leur somme est nulle si et seulement si elles sont toutes nulles. L'indépendance de ces mêmes variables aléatoires permet de poursuivre :
$P(X_n = 0) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(U_i = 0) = \prod_{i=1}^{n} P(U_1 = 0) = \prod_{i=1}^{n} q_0 = {q_0}^n$. En effet, les variables $U_i$ suivent toutes la même loi, celle de $U_1$. Il suffit alors de reprendre la formule établie à la question 2. (partie I) pour obtenir :
$$r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = 0).p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} {q_0}^n p_n.$$

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Sachant que $[X_n = j]$ est réalisé, l'espérance conditionnelle de $X_n$ est celle d'une variable certaine ! C'est-à-dire qu'évidemment : $E_{[X_n=j]}(X_n) = j$. Or $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$, et la linéarité de l'espérance donne :
    $E_{[X_n=j]}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_{[X_n=j]}(U_i) \iff j = n \times E_{[X_n=j]}(U_1) \iff E_{[X_n=j]}(U_1) = \frac{j}{n}$ puisque, encore une fois, les $U_i$ suivent toutes la même loi (et donc aussi la même loi conditionnelle sachant $[Xn = j]$).
    (b) Sachant que $j \in \mathbb{N}^*$, $P(X_0 = j) = 0$ (puisqu $X_0 = 0$) et la relation de Panjer donne bien, lorsqu'on revient à la formule de la question 2. :
    $r_j = \displaystyle\sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} P(X_n = j).p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j).\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$, où :
    $a + \dfrac{b}{n} = a + \dfrac{b}{j}.\dfrac{j}{n} = a + \dfrac{b}{j}.E_{[X_n=j]}(U_1) = E_{[X_n=j]}\left(a + \dfrac{b}{j}.U_1\right)$ par linéarité de l'espérance.
    On a bien obtenu la relation : $r_j = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}.U_1\right).P(X_n = j).p_{n-1}$
    (c) Sachant que l'événement $[X_n = j]$ est réalisé, et puisque $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$, l'univers-image conditionnel de $U_1$ sachant $[X_n = j]$, est inclus dans $[\![0;j]\!]$ (dans une somme de termes positifs, l'un d'eux ne peut pas être supérieur au tout !). On peut donc écrire, par le théorème de transfert :
    $E_{[X_n=j]}\left(a + \dfrac{b}{j}U_1\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{b}{j}.i\right).P_{[X_n=j]}(U_1 = i)$, et donc :
$$\begin{aligned} E_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j}.U_1\right) P(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right).P_{[X_n=j]}(U_1 = i).P(X_n = j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right).P([X_n = j] \cap [U_1 = i]) \text{ (probabilités composées)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .P([U_1 = i] \cap [\sum_{k=2}^{n} U_k = j - i])$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .P(U_1 = i).P(X_{n-1} = j - i) \text{par indépendance des } U_k$$

sachant que $\sum_{k=2}^{n} U_k$ suit la même loi que $X_{n-1}$ puisque ce sont toutes les deux des sommes de $n-1$ v.a.r. de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent toutes la même loi et sont indépendantes.

(d) Les résultats précédents permettent donc d'écrire :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i)P(X_{n-1} = j - i).p_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .P(U_1 = i). \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_{n-1} = j - i).p_{n-1} \text{ (après interversion des symboles sommes)}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .q_i. \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_k = j - i).p_k \text{ (avec k=n-1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .q_i.r_{j-i} \text{ (toujours d'après la q. 2)}$$

Dans la dernière somme, on retrouve en fait le membre de gauche $r_j$, lorsque $i = 0$. En le sortant de la somme et en le regroupant avec celui de gauche, on obtient :

$$r_j = a.q_0.r_j + \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .q_i.r_{j-i} \iff r_j.(1 - a.q_0) = \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .q_i.r_{j-i}$$

$$\iff r_j = \frac{1}{1 - a.q_0}. \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) .q_i.r_{j-i}\right).$$

Cette formule permet de calculer récursivement (c'est-à-dire les uns après les autres de proche en proche), les nombres $r_j$ et ainsi de déterminer la loi de $X$.

14. *Des exemples d'application.*

(a) Dans cette question, les variables $U_i$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

i. On reprend donc le résultat de la question 13.(d), sachant qu'ici :
$q_0 = P(U_1 = 0) = 1 - p,\ q_1 = P(U_1 = 1) = p$ et $\forall i \geqslant 2,\ q_i = P(U_1 = i) = 0$ ;
dans ce cas, $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \frac{1}{1 - a(1 - p)}. \left(a + \frac{b}{j}\right) .q_1.r_{j-1} = \frac{p}{1 - a + ap}. \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
Tous les termes de la somme sont en effet nuls, sauf pour $i = 1$.
On peut écrire cette relation sous la forme : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ p_j = \left(A + \frac{B}{j}\right) .p_{j-1}$ avec :
$A = \frac{ap}{1 - a + ap}$ et $B = \frac{bp}{1 - a + ap}$, ce qui permet bien de conclure que $X$ suit dans ce cas une loi de Panjer de paramètres $A$ et $B$.

ii. Comme on a repris dans cette partie les notations de la partie III, la v.a.r. $N$ elle-même suit une loi de Panjer de paramètres $a$ et $b$. Pour retrouver les résultats des questions 3. et 4. de la partie I, on considère donc deux cas :
•$N$ suit une loi binomiale de paramètres $m = r$ et $\pi = \frac{-a}{1 - a}$ lorsque $a < 0$.
Dans ce cas, $A = \frac{ap}{1 - a(1 - p)}$ est aussi strictement négatif, puisque $p \in ]0; 1[$ (cequi implique notamment : $1 - p > 0 et 1 - a(1 - p) > 0$). Mais alors, toujours selon les résultats de la partie III, $X$ elle-même (remplaçant $N$ dans son rôle à cette partie III), suit une loi binomiale de paramètres $R = -\frac{B}{A} - 1 = -\frac{b}{a} - 1$, et $\frac{-A}{1 - A} = \frac{-ap}{1 - a + ap} \times \frac{1 - a + ap}{1 - a} = p \times \frac{-a}{1 - a} = p\pi$. C'est bien le résultat

donné par la question 3. !

$\bullet N$ suit une loi de Poisson de paramètre $b$ si $a=0$, dans ce cas $A=0$ aussi, et toujours en disant que ce qui vaut, dans la partie III, pour $N$ s'applique aussi à $X$ qui suit par conséqent une loi de Poisson de paramètre $B=bp$, ce qui est bien, à nouveau, le résultat obtenu à la question 4. !

(b) Dans cette question, on suppose que $a=0$, rappelons que cela entraîne que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $b$. Soit $p$ un réel de l'intervalle $]0;1[$.

i. La famille de nombres réels $(q_i)_{i\in\mathbb{N}^*}=\left(\alpha.\dfrac{p^i}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$, définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ si et seulement si tous les $q_i$ sont positifs, et si la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} q_i$ est convergente, de somme 1. Il est donc déjà nécessaire d'avoir $\alpha>0$.
Ensuite, la convergence de la série se prouve de façon théorique avec un théorème de comparaison :
Il est évident que : $\forall i\in N^*,\ 0<\dfrac{p^i}{i}\leqslant p^i$, donc $(\alpha>0)$ : $\forall i\in\mathbb{N}^*,\ 0<q_i\leqslant\alpha.p^i$.
La série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}^*}\alpha.p^i$ est convergente comme série géométrique de raison $p\in]0;1[$ ; par le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} q_i$ est donc convergente, et il est possible d'introduire la dernière condition sous la forme :
$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} q_i=1 \iff \alpha.\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{p^i}{i}=1 \iff \alpha=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{p^i}{i}}$, ce qui définit bien $\alpha$ de façon unique !
On pose $q_0=0$, et on suppose que les variables $U_k$ suivent toutes cette loi de probabilité, dite *loi logarithmique discrète.*

ii. Avec cette loi pour les variables $U_k$, la relation obtenue en 13.(d) devient (rappelons qu'ici $a=0$) :
$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ r_j=\dfrac{1}{1-0}.\sum\limits_{i=1}^{j}\dfrac{bi}{j}.\alpha.\dfrac{p^i}{i}.r_{j-i}=\dfrac{b\alpha}{j}\sum\limits_{i=1}^{j}p^i.r_{j-i}$ après simplifications et en sortant en facteurs devant la somme, les termes qui ne dépendent pas de l'indice $i$.

iii. Question très subtile ici : pour réussir à n'écrire $r_j$ qu'en fonction de $r_{j-1}$, il faut réaliser que dans la somme précédente, on peut faire apparaître $r_{j-1}$ en utilisant tous les termes pour $i$ variant de 2 à $j$ ! Plus précisément, pour tout entier $j\geqslant 2$ :

$$\begin{aligned}r_j&=\frac{b\alpha}{j}.\sum_{i=1}^{j}p^i r_{j-i}=\frac{b\alpha}{j}.\left(p.r_{j-1}+\sum_{i=2}^{j}p^i r_{j-i}\right)\overset{[k=i-1]}{=}\frac{b\alpha}{j}.\left(p.r_{j-1}+\sum_{k=1}^{j-1}p^{k+1}.r_{j-(k+1)}\right)\\&=\frac{b\alpha}{j}.p.r_{j-1}+\frac{b\alpha}{j}.p.\sum_{k=1}^{j-1}p^k.r_{j-1-k}=\frac{b\alpha.p}{j}.r_{j-1}+\frac{p(j-1)}{j}.\frac{b\alpha}{j-1}.\sum_{k=1}^{j-1}p^k.r_{j-1-k}\\&=\frac{b\alpha.p}{j}.r_{j-1}+p.\left(1-\frac{1}{j}\right).r_{j-1}=\left(p+\frac{p.(b\alpha-1)}{j}\right).r_{j-1}\end{aligned}$$

Lorsque $j=1$ : $\left(p+\dfrac{p(b\alpha-1)}{1}\right).r_0=pb\alpha.r_0$, à comparer avec la relation obtenue en ii., qui était elle valable dès $j=1$ : $\quad r_1=\dfrac{b\alpha}{1}.\sum\limits_{i=1}^{1}p^i r_{1-i}=b\alpha.p.r_0$, la formule ci-dessus est donc encore vraie pour $j=1$.

iv. La relation obtenue à la question précédente est une relation de Panjer vérifiée par la v.a.r. $X$, avec $A=p>0$ et $B=p(b\alpha-1)$.
La question 10.(d)ii. permet donc de conclure que $X$ suit bien une loi binomiale négative, de paramètres :

$$\frac{B}{A}+1=b\alpha \text{ et } 1-A=1-p.$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★