MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2012

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Ce problème comporte trois parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Rubinstein et à son comportement asymptotique. Dans la troisième partie, on établit la formule de Black et Scholes, pour le prix d'une option dans le modèle limite obtenu dans la partie II.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- On note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi log-normale* de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives, et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2). Dans la suite, on utilise la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$: d'après le cours sur les lois normales, on sait en effet que si $U \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la v.a.r. $a.U + b$ suit encore une loi normale ; ses paramètres sont respectivement son espérance et sa variance, or d'après les propriétés de ces deux moments :

$$\begin{aligned} E(aU+b) &= aE(U) + b = am + b \text{ par linéarité de l'espérance} \\ V(aU+b) &= a^2 V(U) = a^2.\sigma^2 = (a.\sigma)^2 \end{aligned}$$

Donc $a.U + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a.m + b, (a.\sigma)^2)$.

2. *Cas où* $m = 0$. On suppose dans cette question que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.

(a) *Densité.* Puisque X suit une loi log-normale, c'est une variable aléatoire à valeurs strictement positives, donc : $\forall x \in]-\infty; 0],\ F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$.
Si $x \in]0; +\infty[$: en rappelant que $Y = \ln(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et par bijectivité de ln de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :
$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(\ln(X) \leqslant \ln(x)) = P(Y \leqslant \ln(x)) = P\left(\dfrac{Y}{\sigma} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right)$
puisque $\sigma > 0$, où : $\dfrac{Y}{\sigma} = \dfrac{Y - 0}{\sigma} = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)} = Y^*$, variable centrée réduite associée à Y, dont on sait que $Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi :

$$\begin{cases} \forall x \leqslant 0, F_X(x) = 0 \\ \forall x > 0,\ F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right) \end{cases}$$

La fonction F_X est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ (fonction nulle), elle l'est aussi sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (très précisément, ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, à valeurs

© Major-Prépa

dans $\mathbb{R}$ sur lequel Φ est de classe $\mathcal{C}^1$).
En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_X(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = F_X(0)$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sigma}$ ($\sigma > 0$), et $\lim\limits_{t\to -\infty} \Phi(t) = 0$ (car Φ est une fonction de répartition), donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_X(x) = 0 = F_X(0)$, et F_X est continue en 0.

Finalement : $\begin{cases} F_X \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut-être en } 0 \end{cases}$

Donc X est une variable à densité, qui est obtenue par dérivation de sa fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\sigma} \times \dfrac{1}{x} \times \phi\left(\dfrac{\ln(x)}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

où $\phi = \Phi'$ est la densité de la loi normale centrée réduite : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-x^2/2}$.

On peut prendre $f(0) = 0$, et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\dfrac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) *Espérance.*

i. Les v.a.r. X et Y vérifient la relation : $Y = \ln(X)$ qui s'écrit aussi : $X = e^Y$. Le théorème de transfert assure donc l'existence de l'espérance de X, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y$$

où f_Y est une densité de la variable $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}$.

Pour tout réel y : $e^y.f_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{y-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)$ est strictement positif.

$\star$ Lorsque $y > 0$: $e^y \times e^y.f_Y(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{2y-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ puisque $2y - \dfrac{y^2}{2\sigma^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} -\dfrac{y^2}{2\sigma^2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$.

Donc : $e^y.f_Y(y) = o_{+\infty}(e^{-y})$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y$ converge (elle vaut 1 : cf la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$), donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y$ converge.

$\star$ Lorsque $y \to -\infty$: $e^{-y} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant e^y.f_Y(y) \leqslant f_Y(y)$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_Y(y)\mathrm{d}y$ converge (et vaut $F_Y(0) = \dfrac{1}{2}$), donc par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} e^y.f_Y(y)\mathrm{d}y$ est bien (absolument) convergente, ce qui assure l'existence de l'espérance de X, avec :

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) \mathrm{d}y$$

ii. Le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$ est bien bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $y \mapsto \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$ est une fonction affine strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) \mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((t+\sigma)^2 - 2(\sigma t + \sigma^2)\right)\right) \sigma \mathrm{d}t \end{aligned}$$

© Major-Prépa

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2+2\sigma t+\sigma^2-2\sigma t-2\sigma^2\right)\right)\mathrm{d}t = e^{\sigma^2/2}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

où on reconnaît dans la dernière ligne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = 1$ puisqu'il s'agit de la densité de la loi normale centrée, réduite. On a donc obtenu :

$$E(X) = e^{\sigma^2/2} \text{ si } X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$$

(c) *Variance.*

i. Soit α un réel non nul. Comme X est à valeurs strictement positives, $X^\alpha = \exp(\alpha\ln(X))$ est bien définie, et à valeurs strictement positives, et :
$Z = \ln(X^\alpha) = \alpha.\ln(X) = \alpha.Y$ est une variable aléatoire qui suit, d'après la question 1., la loi normale de paramètres $(0,(\alpha.\sigma)^2)$ puisqu'ici, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
On en déduit que X^α suit la loi log-normale de paramètres $(0,(\alpha.\sigma)^2)$.
Ainsi, la variable aléatoire X^2 suit la loi log-normale de paramètres $(0,4\sigma^2)$, et à ce titre, elle admet une espérance d'après la question (b), qui vaut : $E(X^2) = \exp\left(\frac{4\sigma^2}{2}\right) = e^{2\sigma^2}$.
La variable aléatoire X admet par conséquent une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e^{2\sigma} - \left(e^{\sigma^2/2}\right)^2 = e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2} = e^{\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$.

(a) Soit μ un réel strictement positif : alors $\mu.X$ est encore une variable aléatoire à valeurs strictement positive, et on peut considérer la variable aléatoire
$X = \ln(\mu.X) = \ln(\mu) + \ln(X) = \ln(\mu) + Y$. Toujours d'après la question 1. (ici avec $a = 1$ et $b = \ln(\mu)$, on peut affirmer que $W \hookrightarrow \mathcal{N}(m+\ln(\mu),\sigma^2)$, et donc que $\mu.X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m+\ln(\mu),\sigma^2)$.

(b) On peut alors astucieusement utiliser le résultat précédent avec $\mu = e^{-m} > 0$, de sorte que :
$m + \ln(\mu) = m - +\ln(e^{-m}) = m - m = 0$, et donc : $e^{-m}.X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$.
Ainsi, d'après 2. : $e^{-m}.X$ admet une espérance, et $E(e^{-m}.X) = e^{\sigma^2/2}$.
La linéarité de l'espérance assure alors l'existence de l'espérance de X, et donne : $E(e^{-m}.X) = e^{-m}.E(X)$, d'où :

$$E(X) = e^m.E(e^{-m}X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

De même, et toujours d'après 2., la variable aléatoire $e^{-m}.X$ admet une variance, qui vaut :
$V(e^{-m}X) = e^{\sigma^2(\sigma^2-1)}$.
Par conséquent, et d'après les propriétés de la variance, $X = e^m.(e^{-m}X)$ admet une variance, qui vaut :

$$V(X) = (e^m)^2.V(e^{-m}X) = e^{2m} \times e^{\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2}-1\right) = e^{2m+\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\frac{kt}{n}$, $k \in \{1..n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive, appelée volatilité de l'action sur la durée t ;

© Major-Prépa

- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1;1\}$: autrement dit, $P(Y_k=-1)=P(Y_k=1)=\dfrac{1}{2}$.

On suppose que n est assez grand pour que $1+\dfrac{\mu}{n}-\dfrac{v}{\sqrt{n}}>0$ (hypothèse licite vu que cette quantité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$).
On admet que $S_{n,0},\cdots,S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n*

   (a) L'expression Pascal `random(2)` prend avc équiprobabilité les valeurs 0 et 1.
   Par conséquent, `2*random(2)-1` prend avec équiprobabilité les valeurs : $2\times 0-1=-1$ et $2\times 1-1=1$.
   Cette expression permet donc de simuler l'une des variables aléatoires Y_k.

   (b)
```
function C (n: integer; mu, v :real) :real;
var k:integer; tmp:real;
begin
      tmp:=1;  {S_0,n = 1}
      for k:=1 to n do
          tmp:=tmp*(1+mu/n+v/sqrt(n)*(2*random(2)-1));
C:=tmp;
end;
```

5. (a) Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, Y_k admet une espérance et une variance car c'est une v.a.r. finie, et :
   $E(Y_k)=-1.P(Y_k=-1)+1.P(Y_k=1)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0.$

   $V(Y_k)=E(Y_k^2)-E(Y_k)^2=E(Y_k^2)=(-1)^2P(Y_k=-1)+1^2P(Y_k=1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1.$
   Les v.a.r. Y_k sont donc toutes centrées, réduites.

   (b) i. Pour tout entier naturel non nul $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}C_n=S_{n,n}&=S_{n-1,n}\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_n\right)\\&=S_{n-2,n}\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_{n-1}\right)\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_n\right)\\&=\cdots\\&=S_{0,n}\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_1\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_{n-1}\right)\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_n\right)\end{aligned}$$

   Et comme $S_{0,n}=1$ (variable certaine), cela s'écrit bien : $C_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)$.

   ii. Comme les variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont également mutuellement indépendantes, comme fonctions chacune d'une variable Y_k.
   Par conséquent, et puisque C_n est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}E(C_n)&=E\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}E\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)&&\text{par indépendance des }(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.E(Y_k)\right)&&\text{(linéarité de l'espérance)}\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)=\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n&&E(Y_k)=0\text{ et }1+\frac{\mu}{n}\text{ ne dépend pas de }k\end{aligned}$$

© Major-Prépa

De même, $V(C_n)$ existe et vaut $V(C_n) = E(C_n^2) - E(C_n)^2$, où :

$$
\begin{aligned}
E(C_n^2) &= E\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)^2\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} E\left[\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)^2\right] && \text{toujours par indépendance des } (Y_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(V\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)+\left[E\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)\right]^2\right) && \begin{cases} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ \iff E(X^2) = V(X) + E(X)^2 \end{cases} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{v^2}{n}V(Y_k)+\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2\right) && V(aX) = a^2V(X) \text{ et } \begin{cases} E(Y_k) = 0 \\ V(Y_k) = 1 \end{cases} \\
&= \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

La formule de Koenig-Huygens permet de conclure :
$V(C_n) = E(C_n^2) - E(C_n)^2 = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}$.

(c) Ces calculs de limites sont des incontournables ! $\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right)$, où :
$\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu}{n}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mu}{n} = 0$,
donc $n\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{\mu}{n} = \mu$, ie : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right) = \mu$, d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n = e^{\mu}}$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} = (e^{\mu})^2 = e^{2\mu}$.

Enfin : $\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{2\mu}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}+\frac{v^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\mu+v^2}{n}+\frac{\mu^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\mu+v}{n}$, donc :
$n\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mu+v^2$, ie : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right) = 2\mu+v^2$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2+\frac{v^2}{n}\right)\right) = e^{2\mu+v^2}$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} V(C_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} E(C_n^2) - E(C_n)^2 = e^{2\mu+v^2} - e^{2\mu}\boxed{= e^{2\mu}.\left(e^{v^2}-1\right)}$.

On a vu à la partie I que si $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$, alors $E(X) = e^{m+\sigma^2/2}$ et $V(X) = e^{2m+\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

Il est alors clair qu'en prenant $\boxed{v = \sigma \text{ et } m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}}$, les deux moments correspondent respectivement aux deux limites obtenues.

6. (a) On sait que les variables aléatoires Y_k prennent seulement les valeurs -1 et 1 : $\forall\omega\in\Omega$, $\begin{cases} Y_k(\omega) &= -1 \text{ ou} \\ Y_k(\omega) &= 1 \end{cases}$

et donc $\forall\omega\in\Omega$, $\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right) = \begin{cases} \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right) & \text{ou} \\ \ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{\sqrt{n}}\right) \end{cases}$.

Les deux réels a_n et b_n doivent donc vérifier les deux contraintes suivantes :

$$
\begin{cases} a_n - b_n &= \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ a_n + b_n &= \ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} a_n - b_n &= \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ 2a_n &= \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{cases} L_2 \leftarrow L_1 + L_2
$$

Soit : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{2}.\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\times\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2-\frac{v^2}{n}\right)}$

et $b_n = a_n - \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)$, soit : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right]}$.

© Major-Prépa

(b) La variable aléatoire C_n est à valeurs strictement positives puisque :
$\forall \omega \in \Omega,\ \forall k \in \{1, \cdots, n\},\ 1 + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{v}{\sqrt{n}}.Y_k(\omega) \geqslant 1 + \dfrac{\mu}{n} - \dfrac{v}{\sqrt{n}} > 0$ pour n assez grand, comme supposé au début de cette partie.
Donc la variable aléatoire $\ln(C_n)$ est bien définie, et d'après l'expression obtenue en 5.(b)i. :

$$\begin{aligned}
\ln(C_n) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}.Y_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_n + b_n.Y_k) \text{ avec les réels } a_n \text{ et } b_n \text{ obtenus précédemment} \\
&= na_n + b_n.\sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ puisque } a_n \text{ et } b_n \text{ ne dépendent pas de } n
\end{aligned}$$

(c) $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, centrées et réduites ; si on appelle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$, la variable centrée réduite associée est alors $S_n^* = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Le *théorème de la limite centrée* assure alors que la suite $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge en loi vers la loi normale centrée, réduite quand n tend vers $+\infty$.

7. (a) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 demandé est : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)$.

(b) Puisque $\lim\limits_{x\to 0} vx + \mu x^2 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\ln(1 + vx + \mu x^2) &= (vx + \mu x^2) - \frac{(vx + \mu x^2)^2}{2} + o_0(x^2) \\
&= vx + \mu x^2 - \frac{v^2x^2 + 2\mu v x^3 + \mu^2 x^4}{2} + o_0(x^2) \\
&= vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o_0(x^2)
\end{aligned}$$

De même, $\lim\limits_{x\to 0} -vx + \mu x^2 = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\ln(1 - vx + \mu x^2) &= (-vx + \mu x^2) - \frac{(-vx + \mu x^2)^2}{2} + o_0(x^2) \\
&= -vx + \mu x^2 - \frac{v^2x^2 - 2v\mu x^3 + \mu^2 x^4}{2} + o_0(x^2) \\
&= -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o_0(x^2)
\end{aligned}$$

(c) Avec $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser les 2 développements limités précédents, qui donnent :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\left[-\frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \times \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}) + \frac{v}{\sqrt{n}} + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \times \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right] \\
&= \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) \times \frac{1}{n} + {}_{+\infty}(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Donc $na_n = \mu - \dfrac{v^2}{2} + o_{+\infty}(1)$, c'est-à-dire que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}}$.

De même :

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\frac{v}{\sqrt{n}} + \frac{(\mu - v^2/2)}{n} - \left(-\frac{v}{n} + \frac{(\mu - v^2/2)}{n}\right) + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right]$$

© Major-Prépa

$$= \frac{v}{\sqrt{n}} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$$

Donc : $\sqrt{n}b_n = v + o_{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})$, soit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}b_n = v}$.

Le réel v est strictement positif, donc pour n assez grand, $\sqrt{n}b_n$, très proche de v, est également strictement positif, c'est-à-dire que b_n seul est strictement positif car $\sqrt{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

8. On note F_n la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$, et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

(a) Soit ε un réel strictement positif.

i. Comme Φ est une fonction de répartition, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout réel $\eta > 0$: $y - \eta < y + \eta$, donc on a toujours $\Phi(y - \eta) \leqslant \Phi(y) \leqslant \Phi(y + \eta)$.
On évalue alors :
$0 \leqslant \Phi(y+\eta) - \Phi(y) = \int_y^{y+\eta} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{y + \eta - y}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}$ d'après l'*inégalité de la moyenne*, la densité $\varphi :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ de la loi normale centrée réduite, étant majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sur $\mathbb{R}$.
De même :
$0 \leqslant \Phi(y) - \Phi(y - \eta) = \int_{y-\eta}^{y} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{y - (y - \eta)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}$.
Ainsi pour η assez petit, concrètement tel que :
$\frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff \eta \leqslant \varepsilon \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, on a bien : $0 \leqslant \Phi(y + \eta) - \Phi(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff \Phi(y + \eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$
et $0 \leqslant \Phi(y) - \Phi(y - \eta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y - \eta)$.
On a bien établi l'existence d'un réel η strictement positif tel que :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y - \eta) \leqslant \Phi(y + \eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Remarque : la nature bien connue de la fonction φ permet de fournir ici un résultat au moyen d'arguments d'une difficulté théorique raisonnable pour le programme de ECE2 ; mais on peut proposer une rédaction bien plus succinte encore par des arguments de continuité !

On sait ainsi que Φ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction de répartition d'une variable à densité.
Elle est en particulier continue au point y, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in \mathbb{R},\ |y - x| \leqslant \eta \Longrightarrow |\Phi(y) - \Phi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$$y - \eta \leqslant x \leqslant y + \eta \Longrightarrow \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, pour $x = y-\eta$ et $x = y+\eta$, l'implication est vraie, et donne : $\begin{cases} \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y - \eta) \\ \Phi(y + \eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

ii. On sait depuis 7.(c) que : $\lim_{n\to+\infty} na_n = \mu - \frac{v^2}{2}$, et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}b_n = v > 0$.

Donc par opérations sur les limites : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} = \frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v} = y$, ce qu'on peut écrire avec des quantificateurs tels que suggérés par l'énoncé :

$$\forall \eta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} - y\right| \leqslant \eta$$
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow y - \eta \leqslant \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} \leqslant y + \eta$$

iii. On sait depuis 6.(c) que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
Par définition, cela signifie qu'en tout point de continuité de la fonction de répartition Φ, c'est-à-dire

© Major-Prépa

pour tout réel x, on a : $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \Phi(x)$.
On peut donc écrire, avec y et η introduits précédemment :

$$\begin{aligned}
[x = y+\eta]\ \exists n_1 \in \mathbb{N};\ n \geqslant n_1 &\Longrightarrow |F_n(y+\eta) - \Phi(y+\eta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\\
n \geqslant n_1 &\Longrightarrow \Phi(y+\eta) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2}\\
[x = y-\eta]\ \exists n_2 \in \mathbb{N};\ n \geqslant n_2 &\Longrightarrow |F_n(y-\eta) - \Phi(y-\eta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\\
n \geqslant n_2 &\Longrightarrow \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant F_n(y-\eta) \leqslant \Phi(y-\eta) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, si on note $N = \max(n_1, n_2)$, pour tout entier $n \geqslant N$, les deux implications précédentes sont vraies, on retient :

$$n \geqslant N \Longrightarrow F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

iv. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= P(\ln(C_n) \leqslant x)\\
&= P\left(na_n + b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x\right)\\
&= P\left(b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x - na_n\right)\\
&= P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \frac{x-na_n}{b_n}\right) \quad (b_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand, cf. 7.(c)})\\
&= P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right)
\end{aligned}$$

ce qui exprime exactement que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right)$.

Pour n entier suffisamment grand tel que : $\begin{cases} b_n > 0 \\ n \geqslant n_0 \\ n \geqslant N \end{cases}$, tous les résultats précédents depuis 7.(c) sont valides, et on peut écrire :

d'après 8.(a)ii., $y - \eta \leqslant \dfrac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} \leqslant y+\eta$ donc puisque F_n est croissante sur $\mathbb{R}$ comme fonction de répartition :

$F_n(y-\eta) \leqslant F_n\left(\dfrac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \leqslant F_n(y+\eta)$, et :

$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant F_n(y-\eta) \leqslant F_n\left(\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \leqslant F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui donne, en conservant les deux termes extrêmes des encadrements précédents :

$$\Phi(y) - \varepsilon \leqslant F_n\left(\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) = G_n(x) \leqslant \Phi(y) + \varepsilon \iff |G_n(x) - \Phi(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit : $\left|G_n(x) - \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)\right| \leqslant \varepsilon$, inégalité valable pour tout réel x, dès que n est suffisamment grand tel qu'exprimé plus haut.

(b) Il faut comprendre que le résultat précédent exprime que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{2}\right)$ où, si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite :

$$\Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) = P\left(X \leqslant \frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)$$

© Major-Prépa

$$= P(vX \leqslant x - \mu + \frac{v^2}{2})$$
$$= P\left((vX + (\mu - \frac{v^2}{2}) \leqslant x\right) = F_Z(x)$$

où on note $Z = vX + (\mu - \dfrac{v^2}{2})$, variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2)$ comme rappelé au début de la partie I.
On a donc obtenu : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = F_Z(x)$, ce qui signifie par définition, que la suite $(\ln(C_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge en loi vers la loi normale de paramètres $(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2)$.

9. Avec les notations précédentes, si on définit la variable aléatoire $W = e^Z$: W prend bien des valeurs toutes strictement positives, et bien sûr $Z = \ln(W)$; donc $W \hookrightarrow \mathcal{LN}(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2)$.
Soit alors $x \in \mathbb{R}$, on distingue deux cas, sachant que C_n prend des valeurs toutes strictement positives :
 - si $x \leqslant 0$: $P(C_n \leqslant x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = F_W(x)$.
 - si $x > 0$: par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$,
 $P(C_n \leqslant x) = P(\ln(C_n) \leqslant \ln(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Z \leqslant \ln(x)) = P(e^Z \leqslant x) = F_W(x)$

 Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_{C_n}(x) = F_W(x)}$,
 ce qui exprime que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $W \hookrightarrow \mathcal{LN}(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2)$.

Partie III - La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif.
Á la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

- Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.
On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0, c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1 (soit 100%).
- Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $e^r - 1$, où r est un réel strictement positif.
- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \max(0, x)$.

10. (a) D'après l'énoncé : si à la date t, $C \geqslant K \iff C - K \geqslant 0$, alors l'acheteur paie l'action au prix K, et la revent au prix C. Le bénéfice réalisé est alors $C - K$, c'est la valeur de l'option.
Si par contre, $C < K \iff C - K < 0$, alors l'option a une valeur nulle.
La valeur de l'option à la date t est bien $\max(0, C - K) = f(C - K)$.

(b) Le taux de rentabilité du placement non risqué est le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer l'évolution (ici l'enchérissement) de l'actif non risqué entre les dates 0 et t, c'est-à-dire que : $e^r - 1 = \dfrac{V(t) - V(0)}{V(0)}$, où $V(0) = \pi_K$ est la valeur initiale, correspondant au prix d'achat à $t = 0$.
Soit : $V(t) - \pi_K = \pi_K(e^r - 1) \iff \boxed{V(t) = \pi_K.e^r}$.

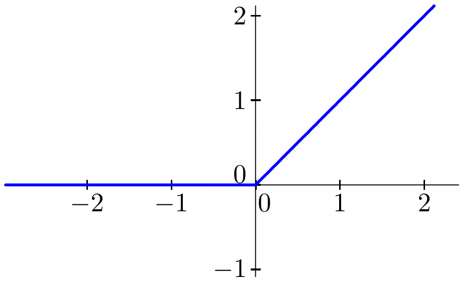
(c) La valeur finale de l'actif non risquée vaut toujours $\pi_K.e^r$, quoi qu'il arrive, tandis que la valeur finale de l'option $f(C - K)$, est soumise aux aléas du marché : la valeur moyenne de cette variable aléatoire est (sous réserve d'existence) son espérance $E(f(C - K))$.
Ces deux stratégies ont donc la même rentabilité moyenne si et seulement si :

$$\pi_K.e^r = E(f(C - K)) \iff \pi_K = e^{-r}.E(f(C - K))$$

Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

© Major-Prépa

11. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \max(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.



La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ (fonction constante nulle), et sur $]0;+\infty[$ (fonction affine).
On étudie donc la continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0)$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$, donc f est continue aussi en 0, c'est-à-dire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La variable aléatoire c suivant une loi log-normale, on se ramène une fois de plus à la loi normale via la variable aléatoire $Y = \ln(C) \hookrightarrow \mathcal{N}(m,v^2)$ qui vérifie donc : $C = e^Y$.
La variable aléatoire $f(C-K) = f(e^Y - K)$ admet donc, d'après le théorème de transfert, une espérance si et seulement si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^x - k)\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x \text{ est absolument convergente}$$

$e^x - K \leqslant 0 \iff e^x \leqslant K \iff x \leqslant \ln(K)$, donc sur $]-\infty;\ln(K)]$, la fonction considérée est nulle et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln(K)} f(e^x-K)\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Sur $[\ln(K),+\infty[$, $\displaystyle f(e^x-K) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) = (e^x-K)\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)$
est une fonction positive, et

$$(e^x-K)\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}e^x.\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) - K.\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)$$

où la première intégrale est absolument convergente sur $]-\infty,+\infty[$, donc sur $[\ln(K);+\infty[$: l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut $E(C)$ qui existe (cf. partie I), tandis que la deuxième intégrale est absolument convergente sur $]-\infty;+\infty[$ (valant 1 : densité d'une loi normale), donc sur $[\ln(K);+\infty[$.
Par somme d'intégrales absolument convergentes, l'intégrale considérée est bien absolument convergente sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'espérance de $f(C-K)$ existe, et vaut bien, d'après le théorème de transfert :

$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}(e^x-K).\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x.$$

12. (a)

$$\begin{aligned}
\pi_K &= e^{-r}.E(f(C-K)) \\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}(e^{x-r}-K.e^{-r}).\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(\frac{-x^2+2mx-m^2+2v^2x-2v^2r}{2v^2}\right)\mathrm{d}x - K.e^{-r}.\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^2-2(m+v^2)x+m^2+2v^2r}{v^2}\right)\mathrm{d}x - \frac{K.e^{-r}}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_K &= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.\frac{(x-(m+v^2))^2-(m+v^2)^2+m^2+2v^2r}{v^2}\right) - \frac{K.e^{-r}}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{x-(m+v^2)}{v}\right)^2-2m-v^2+2r\right]\right)\mathrm{d}x - \frac{K.e^{-r}}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln(K)}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

© Major-Prépa

On réalise alors un changement de variable affine dans chacune des deux intégrales :
$y = \dfrac{x-(m+v^2)}{v}$ dans la première intégrale, et $t = \dfrac{x-m}{v}$ dans la seconde.
Ainsi :$\mathrm{d}y = \dfrac{1}{v}\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}x = v\mathrm{d}y$, et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{v}\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$, d'où :

$$\pi_K = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln(K)-(m+v^2)}{v}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.y^2}\times e^{m+\frac{v^2}{2}-r}v\mathrm{d}y - Ke^{-r}.\int_{\frac{\ln(K)-m}{v}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{v\sqrt{2\pi}}v\mathrm{d}t$$
$$\iff \pi_K = \exp\left(m-r+\frac{v^2}{2}\right).\Phi\left(\frac{m+v^2-\ln(K)}{v}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right)$$

car $\displaystyle\int_a^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = 1-\Phi(a) = \Phi(-a)$ d'après les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques. Dans ce cas, l'expression précédente se simplifie, puisque $m - r + \dfrac{v^2}{2} = 0 \iff e^{m-r+\frac{1}{2}v^2} = 1$:

$$\begin{aligned}\pi_K &= \Phi\left(\frac{v^2+r-\frac{1}{2}v^2-\ln(K)}{v}\right) - Ke^{-r}.\Phi\left(\frac{r-\frac{1}{2}v^2-\ln(K)}{v}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{2}v^2+r-\ln(K)}{v}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}-\frac{v^2}{2v}\right)\\ \pi_K &= \Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}+\frac{v}{2}\right) - Ke^{-r}.\Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v}-\frac{v}{2}\right)\end{aligned}$$

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r-\theta)$.
On appelle alors *volatilité implicite* de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x = \Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right).$$

On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\dfrac{\theta}{v}+\dfrac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\dfrac{\theta}{v}-\dfrac{v}{2}\right)$.

(a) La fonction Φ est une fonction de répartition d'une loi normale, à ce titre elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $v \mapsto \dfrac{\theta}{v}+\dfrac{v}{2}$ et $v \mapsto \dfrac{\theta}{v}-\dfrac{v}{2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions de références (fonction inverse, affine), alors par composition puis somme, la fonction Ψ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall v>0,\ \Psi'(v) &= \left(-\frac{\theta}{v^2}+\frac{1}{2}\right).\phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}.\left(-\frac{\theta}{v^2}-\frac{1}{2}\right).\phi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{v^2}\right).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{v^2}\right).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right).\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{v^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta^2}{v^2}-\theta+\frac{v^2}{4}+2\theta\right)\right).\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{v^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall v>0, \Psi'(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right).\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{v^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{v^2}+\theta+\frac{v^2}{4}\right)\right)}_{=-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{v^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2\right).\left[\frac{1}{2}-\frac{\theta}{v^2}+\frac{1}{2}+\frac{\theta}{v^2}\right]\end{aligned}$$

© Major-Prépa

Soit : $\forall v > 0,\ \Psi'(v) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\theta}{v}+\dfrac{v}{2}\right)^2\right)$

Il est alors évident que : $\forall v > 0,\ \Psi'(v) > 0$, et donc que la fonction Ψ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Calculs des limites :

quel que soit le réel θ, $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \frac{\theta}{v}+\frac{v}{2} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) = \lim_{X\to+\infty} \Phi(X) = 1$ car Φ est une fonction de répartition.

De même, $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \frac{\theta}{v}-\frac{v}{2} = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \Phi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right) = \lim_{X\to-\infty} \Phi(X) = 0$, toujours par le même argument.

Ainsi, dans tous les cas : $\boxed{\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \Psi(v) = 1}$.

- Si $\theta > 0$: $\displaystyle\lim_{v\to 0^+} \frac{\theta}{v}+\frac{v}{2} = +\infty = \lim_{v\to 0^+} \frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}$,

  donc $\displaystyle\lim_{v\to 0^+} \Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) = \lim_{X\to+\infty} \Phi(x) = 1 = \lim_{v\to+\infty}\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right)$,

  et : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Psi(x) = 1-e^{-\theta}}$.
- Si $\theta < 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta}{v}+\frac{v}{2} = \lim_{v\to 0^+} \frac{\theta}{v}-\frac{v}{2} = -\infty$,

  donc $\displaystyle\lim_{v\to 0^+} \Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) = \lim_{X\to-\infty} \Phi(X) = 0 = \lim_{v\to 0^+} \Phi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right)$,

  et : $\boxed{\displaystyle\lim_{v\to 0^+} \Psi(v) = 0}$.
- Si $\theta = 0$: $\Psi(v) = \Phi\left(\dfrac{v}{2}\right) - \Phi\left(-\dfrac{v}{2}\right) \xrightarrow[v\to 0^+]{} \Phi(0)-\Phi(0) = 0$

On en déduit deux tableaux de variations différents suivant que $\theta > 0$ ou $\theta \leqslant 0$:

v	0		$+\infty$
Ψ $(\theta > 0)$	$1-e^{-\theta}$	$\nearrow$	1

v	0		$+\infty$
Ψ $(\theta \leqslant 0)$	0	$\nearrow$	1

(b)
- Si $\theta > 0$: la fonction Ψ, continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $]1-e^{-\theta};1[$. Dans ce cas, l'équation $\Psi(v) = x$ d'inconnue v, admet une unique solution $v \in]0;+\infty[$ si et seulement si : $1-e^{-\theta} < x < 1$.

  Remarquons que dans ce cas : $0 < e^{-\theta} < 1$, donc $1-e^{-\theta} > 0$.
- Si $\theta \leqslant 0$: la fonction Ψ, continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $]0;1[$. Dans ce cas, l'équation $\Psi(v) = x$ d'inconnue v, admet une unique solution $v \in]0;+\infty[$ si et seulement si : $0 < x < 1$.

  Cette fois : $e^{-\theta} \geqslant 1$, donc $1-e^{-\theta} \leqslant 0$.

De façon générale, on peut dire que l'on peut définir la volatilité implicite (en résolvant l'équation $\Psi(v) = x$) si et seulement si :

$$\max(0, 1-e^{-\theta}) < x < 1 \iff f(1-e^{-\theta}) < x < 1$$

★★★ FIN DU SUJET ★★★

© Major-Prépa